

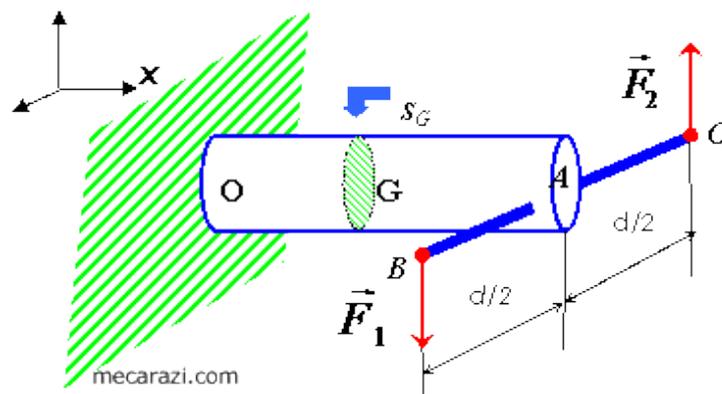
Torsion simple

1- Généralités :

11- Hypothèses :

- poutre cylindrique homogène de section uniforme.
- les déformations sont limités au domaine élastique.

12-Mise en évidence :



Soit la poutre **OA** encastée en **O** et subissant un couple de forces à son extrémité A tel que $F_1=F_2$.

Montrons qu'elle est sollicitée à la torsion simple.

$$\{T_{coh}\}_G = + \{T_{ext \rightarrow GA}\}_G = \{\vec{F}_1 + \vec{F}_2 \ / \ \vec{M}(\vec{F}_1 + \vec{F}_2)\}_G$$

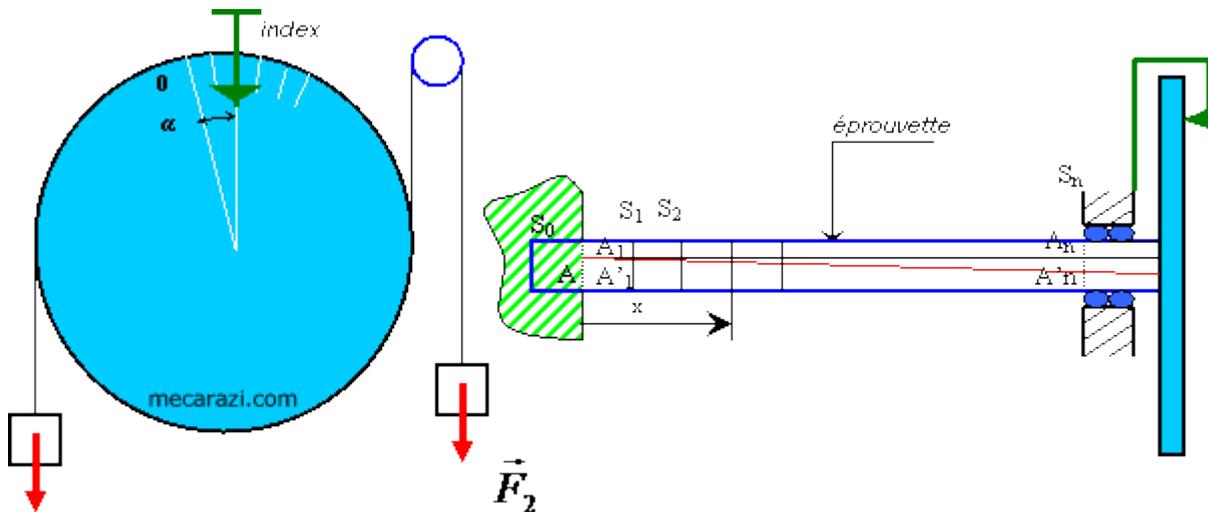
- $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{0}$
- $\vec{M}_G(\vec{F}_1 + \vec{F}_2) = \vec{M}_A(\vec{F}_1 + \vec{F}_2) + \vec{GA} \wedge (\vec{F}_1 + \vec{F}_2) = \vec{AB} \wedge \vec{F}_1 + \vec{AC} \wedge \vec{F}_2 + \vec{GA} \wedge (\vec{F}_1 + \vec{F}_2)$
 $(\frac{d}{2} \cdot \vec{z} \wedge -F \cdot \vec{y}) + (-\frac{d}{2} \cdot \vec{z} \wedge F \cdot \vec{y}) + (x \cdot \vec{x} \wedge \vec{0}) = d \cdot F \cdot \vec{x}$

$$d'où ; \quad \{T_{coh}\}_G = \left\{ \begin{array}{c|c} 0 & d \cdot F \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right\}_G$$

la poutre est donc sollicitée à la torsion simple.

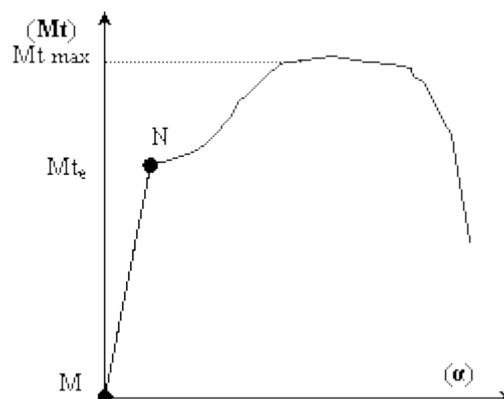
2-Etude expérimentale :

21-Essai de torsion :



- le principe consiste à essayer une éprouvette cylindrique à la torsion.
- une des extrémités de l'éprouvette est encastrée ; l'autre subit un couple
- de force variant progressivement. ($Mt = P \cdot d$)
- un index permet d'indiquer l'angle α dont tournent les sections extrêmes l'une/l'autre.
- une génératrice A_0A_n , et des sections équidistantes S_0, \dots, S_n permettent de voir comment se déforme une fibre // A_0A_n

22-Diagramme représentatif:



23-Observations:

- ▶ la génératrice A_0A_n s'enroule suivant une hélice A_0A_n . Il est de même pour toutes les génératrices // A_0A_n .

Une seule fibre reste rectiligne (fibre indéformable). C'est celle qui est confondue avec l'axe géométrique de la poutre. On l'appelle fibre neutre.

► L'angle α est proportionnel à Mt entre M et N ($Mt \leq Mt_e$). La zone MN est dite **zone élastique**.

L'éprouvette est rompue par cisaillement de la section encastree lorsque $Mt > Mt_{max}$.

$$A_1 A'_1 = \frac{d}{2} \alpha_1$$

$$A_2 A'_2 = \frac{d}{2} \alpha_2$$

$$A_n A'_n = \frac{d}{2} \alpha_n$$

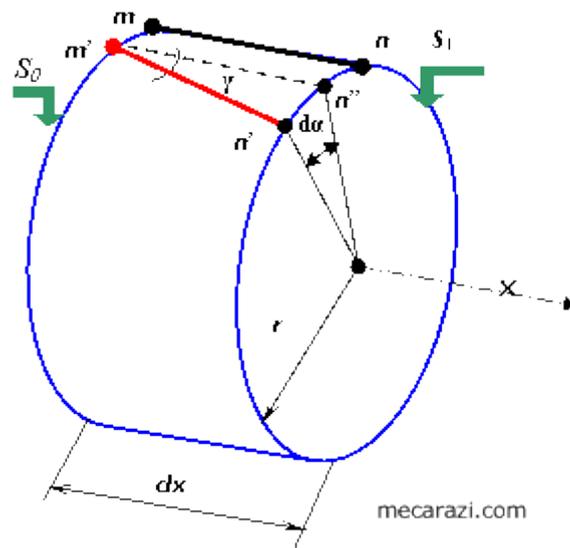
$$\frac{A_1 A'_1}{\alpha_1} = \frac{A_2 A'_2}{\alpha_2} = \dots = \frac{A_n A'_n}{\alpha_n} = \frac{d}{2} = \text{constante}$$

► Toute section plane perpendiculaire à l'axe reste plane et perpendiculaire à l'axe.

3-Etude analytique:

L'étude sera faite dans la zone élastique.

31-Angle unitaire de torsion:



Soient deux sections S_0 et S_1 infiniment proches.

Déterminons le glissement par rotation ($d\alpha$) de S_1/S_0 .

On assimile $m'n'$ à un segment.

$d\alpha$, dx , γ infiniment petits.

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{n' n''}{m' n''} = r \frac{d\alpha}{dx}$$

$$\gamma \text{ petit} \Rightarrow \gamma_{(\text{rad})} = r \frac{d\alpha}{dx} \quad (\text{déviation d'une fibre } mn)$$

α est donc proportionnel à la distance x .

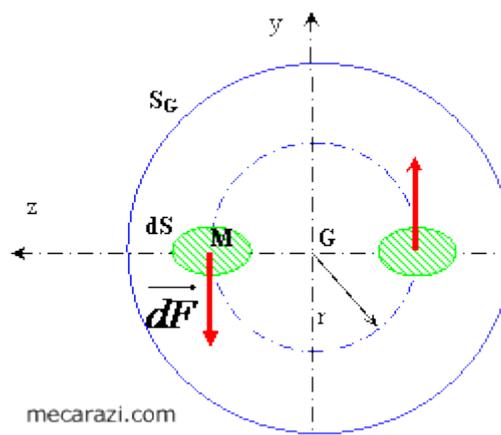
$$\boxed{\frac{d\alpha}{dx} = \theta}$$

est appelé angle unitaire de torsion.

$$\boxed{\theta = \frac{\gamma}{r}}$$

Soit :

32-Moment de torsion :



$$M_G(\overline{dF}) = r \cdot dF$$

$$Mt = \sum M_G(\overline{dF}) = \int r \cdot dF$$

* dF effort élémentaire intérieur dans S_G .

33-Contrainte tangentielle de cisaillement :

Loi de Hooke :

$$\boxed{\tau_M = G \cdot \gamma_M}$$

et $\tau_M = \frac{dF}{dS}$

* unité : N/mm^2 ($1\text{mm}^2 = 1\text{MPa}$)

G : module d'élasticité transversale (mod.de Coulomb)

γ_M : déviation au point M d'une fibre // à l'axe

τ_M : contrainte en un point M de S_G

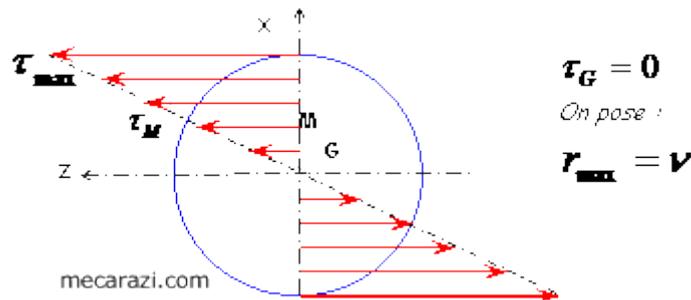
34-Répartition des contraintes dans une section :

$$\tau_M = G \cdot \gamma_M$$

et $\gamma_M = r \cdot \theta \Rightarrow \tau_M = G \theta r \Rightarrow \tau$ est proportionnelle à r .

Pour un matériau donné , G est constant.

θ est constant le long de la poutre.



35-Equation de déformation :

$$\tau = \frac{dF}{dS} = G \theta r \Rightarrow dF = G \theta r dS$$

G, θ constants

$$Mt = \int r \cdot dF = \int G \theta r^2 dS = G \theta$$

$$\text{or } \int r^2 dS = I_G$$

d'où : $Mt = G \theta I_G$

36-Relation entre contrainte et M^t de torsion :

$$Mt = G\theta_G = \frac{\tau}{r} I_G$$

d'où

$$\tau_M = \frac{Mt}{I_G} r$$

on en déduit

$$\tau_{\max} = \frac{Mt}{\left(\frac{I_G}{\nu}\right)}$$

$$\left(\frac{I_G}{\nu}\right)$$

est dit [module de torsion](#)

37-Condition de résistance:

$$\tau_{\max} \leq \tau_p \quad \text{et} \quad \tau_p = \frac{\tau_e}{s}$$

τ_p : contrainte admissible (ou résistance pratique au glissement R_{pg}).

τ_e : limite élastique

s : coefficient de sécurité

38-Condition de rigidité :

Pour certains arbres longs, on limite les déformations en imposant une limite à θ .

$$\theta \leq \theta_{\lim}$$

39-Conditions réelles de torsion :

Les épaulements, entailles, réalisés sur l'arbre créent des concentrations de contraintes dont il faut tenir compte. On définit alors la valeur réelle maximale de la contrainte tangentielle par:

$$\boxed{(\tau_{reelle})_{\max} = k \cdot \tau_{\max}}$$

avec **k** : coef. de concentration de contraintes