1 –التمرين الأول :

نعتبر سكة $ABCDE$ في مستوى رأسي مكونة من أربعة أجزاء.

– الجزءان AB و BC مستقيمان ومائلان بزاوية α بالنسبة للمستوى الأفقي.

– الجزء CD مستقيمي و أفقي.

– الجزء DE نصف دائري شعاعه $r'=32cm$ ومركزه O

نثبت جسما S_1 كتلته $m_1=0,9kg$ في طرف خيط كتلته مهملة وغير قابل للامتداد. نلف الطرف الآخر للخيط حول مجرى بكرة شعاعها $r=10cm$ وعزم قصورها، بالنسبة لمحور تماثلها هو $J_\Delta=10^{-3}kg.m^2$. نعتبر أن البكرة قابل للدوران حول محور (Δ) أفقي منطبق مع محور تماثلها، بدون احتكاك، وأن الجسم S_1 ينزلق فوق السكة بدون احتكاك عدا فوق الجزء BC. نعطي: $\alpha = 30°$; $g = 10m.s^{-2}$; $AB = 1m$.

نحرر المجموعة بدون سرعة بدئية، فينزلق S_1 فوق AB وفي نفس الوقت تدور البكرة حول المحور Δ.

1– عبر عن السرعة V_B للجسم S_1 عند مروره من النقطة B بدلالة m_1 و r و J_Δ و α و AB و g واحسب V_B.

2– عند لحظة مرور S_1 من *النقطة B ينفصل* الخيط عن S_1 ويتابع هذا الأخير حركته فوق السكة فيمر من النقطة C بسرعة $V_C=V_B=3m.s^{-1}$.

2–1– بتطبيق العلاقة الأساسية للديناميك، عبر عن معامل الاحتكاك K بين S_1 والجزء BC بدلالة α احسب K.

2–2– استنتج شدة القوة $\vec{R}$ التي يطبقها الجزء BC على S_1 أثناء حركته.

3– يتابع الجسم S_1 حركته بنفس السرعة V_C فوق الجزء الأفقي CD.

3–1– عبر عن سرعة S_1 في نقطة M من السكة ممعلمة بالزاوية $\theta =(OD;OM)$ بدلالة V_C و r' و θ و g .

3–2– عبر عن شدة القوة $\vec{R}$ التي تطبقها السكة على S_1 عند M بدلالة V_C و r' و θ و g و m_1.

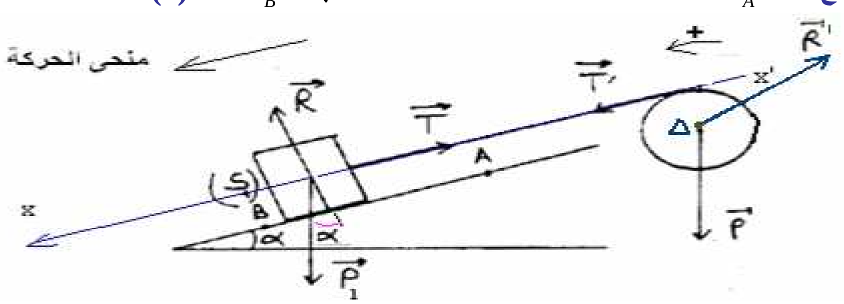
3–3– حدد النقطة التي يغادر عندها S_1 السكة علما أن سرعته عند النقطة D تأخذ القيمة $V_2=4m.s^{-1}$

****

تصحيح:

1 - بتطبيق العلاقة المستقلة عن الزمن على الجسم S_1 بين A وB :

$v_B^2 - v_A^2 = 2.a.AB$ مع $v_A = 0$ $\Leftarrow$ $v_B = \sqrt{2.a.AB}$ (1)



بتطبيق العلاقة الأساسية للتحريك على البكرة : $\Sigma M\vec{F}_{/\Delta} = J_\Delta.\ddot{\theta}$ أي : $0+0+T'.r = J_\Delta.\ddot{\theta}$ **ومنه :** $\boxed{T'. = \frac{J_\Delta.\ddot{\theta}}{r}}$ **(a)**

بتطبيق القانون الثاني لنيوتن على الجسم S_1 لدينا : $\Sigma\vec{F} = m_1.\vec{a}_G$ أي : $\vec{P}_1+\vec{R}+\vec{T} = m_1.\vec{a}_G$ **بالإسقاط على المحور x'x :**

$-P_1.\sin\alpha + 0 + T = m_1.a$ ومنه : $+P_1.\sin\alpha + 0 - T = m_1.a$ **وبما أن الخيط غير قابل للمد فإن :** $T' = T$ ومنه :

$+m_1.g.\sin\alpha - \frac{J_\Delta.\ddot{\theta}}{r} = m_1.a$ ونعلم أن : $a = r.\ddot{\theta}$ $\Leftarrow$ $\ddot{\theta} = \frac{a}{r}$ **العلاقة السابقة تصبح :** $m_1.\sin\alpha - \frac{J_\Delta.a}{r^2} = m_1.a$

$a(\frac{J_\Delta}{r^2}+m_1) = m_1.g.\sin\alpha$ **ومنه :** $a = \frac{m_1.g.\sin\alpha}{\frac{J_\Delta}{r^2}+m_1}$ **وبالتعويض في العلاقة (1)** $\boxed{v_B = \sqrt{\frac{2.m_1.g.\sin\alpha.AB}{m_1+\frac{J_\Delta}{r^2}}}}$

تطبيق عددي: $\boxed{v_B = \sqrt{\frac{2\times0,9\times10.\sin30\times.1}{0,9+\frac{10^{-3}}{0,1^2}}} = 3m/s}$.

أو بطريقة أخرى :

نطبق مبرهنة الطاقة الحركية على (S_1) بين اللحظتين t_A و t_B :

$\frac{1}{2}m_1V_B^2 - \frac{1}{2}m_1V_A^2 = \Sigma W(\vec{F})$ $\Leftarrow$ $\frac{1}{2}m_1(V_B^2 - V_A^2) = W(\vec{P}) + W(\vec{R}) + W(\vec{T})$

* نطبق مبرهنة الطاقة الحركية على البكرة بين اللحظتين t_A و t_B :

$\frac{1}{2}J_\Delta\omega_B^2 - \frac{1}{2}J_\Delta.\omega_A^2 = W(\vec{P'}) + W(\vec{T'}) + W(\vec{R'})$

وبتعويض $W(T)$ بقيمته في العلاقة (1)، نحصل على : $\frac{1}{2}m_1V_B^2 = m_1g\sin\alpha - \frac{1}{2}J_\Delta\omega_B^2$

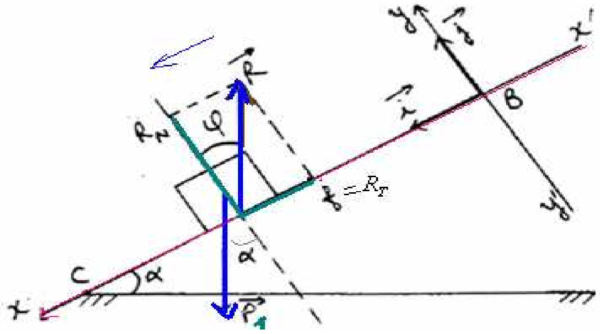
وبما أن الخيط لا ينزلق على مجرى البكرة وغير قابل للامتداد، فإن : $r\omega_B = V_B$

$\frac{1}{2}mV_B^2 + \frac{1}{2}J_\Delta.\frac{V_B^2}{r^2} = m_1.g.AB.\sin\alpha$ $\Leftarrow$ $\frac{1}{2}V_B^2(m_1+\frac{J_\Delta}{r^2}) = m_1gAB\sin\alpha$

ومنه : $V_B = \sqrt{\frac{2m_1g.AB.\sin\alpha}{m_1+\frac{J_\Delta}{r^2}}} = \sqrt{\frac{2.0,9.10.\sin30°}{0,9+\frac{10^{-3}}{(0,1)^2}}} = 3,0\ m.s^{-1}$

-2 2-1 بما أن الجسم S_1 يصل إلى النقطة C بسرعة $V_C = V_B = 3m/s$ فإن حركته على الجزء BC مستقيمية منتظمة :أي تسارعه منعدم .

بتطبيق القانون الثاني لنيوتن : $\Sigma\vec{F} = \vec{0}$ **وبما ان الاحتكاكات غير مهملة بين B وC فإن القوة $\vec{R}$ المقورة بتاثير سطح التماس مائلة فيعكس منحى الحركة ولها مركبتين ، مماسية $f=R_T$ ومنظمية R_N . انظر الشكل .**



وبذلك يصبح لدينا : $\vec{P}_1+\vec{R} = \vec{0}$ **المجموعة شبه معزولة ينطبق عليها مركز القصور .**

بالاسقاط على المحور x'x: $+P_1.\sin\alpha - R_T = 0$ $\Leftarrow$ $R_T = m_1.g.\sin\alpha$

بالاسقاط على المحورy'y: $-P_1.\cos\alpha + R_N = 0$ $\Leftarrow$ $R_N = m_1.g.\cos\alpha$

ومعامل الاحتكاك : $k = tg\varphi = \frac{R_T}{R_N} = \frac{m_1.g.\sin\alpha}{m_1.g.\cos\alpha} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = tg\alpha = tg30 = 0,58$ **ومنه :** $\varphi = \alpha = 30°$

****

- 2-2 $R = \sqrt{R_T{}^2 + R_N{}^2} = \sqrt{(m_1.g.\sin\alpha)^2 + (m_1.g.\cos\alpha)^2} = m_1.g = 0,9.10 = 9N$ أو من خلال العلاقة :

$\vec{P}_1+\vec{R} = \vec{0}$ $\Leftarrow$ $R = P_1 = m_1.g = 9N$

****

-3 1-3 بتطبيق مبرهنة الطاقة الحركية على الجسم S_1 بين D و M لدينا :

$\Delta E_{C\,D\to M} = \Sigma W\vec{F}_{D\to M}$ أي : $\Delta E_{C\,D\to M} = W\vec{P}_{1\,D\to M} + W\vec{R}_{D\to M}$ $\Leftarrow$ $E_{CM} - E_{CD} = m_1.g(z_D - z_M) + 0$ **(b)**

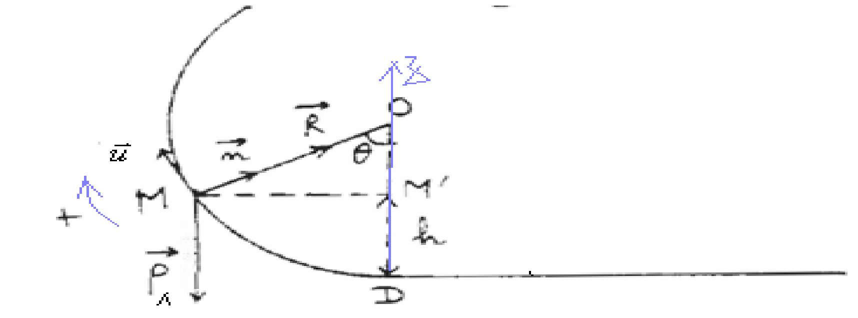
ولدينا : $z_D = 0$ و : $z_M = DM' = h = r' - r'\cos\theta = r'(1-\cos\theta)$ $\Leftarrow$ $z_D - z_M = 0 - r'(1-\cos\theta) = -r'(1-\cos\theta)$

بالتعويض في **(b)** $\frac{1}{2}m_1(v_M{}^2 - v_D{}^2) = -m_1.g.r(1-\cos\theta)$

أي: $v_M{}^2 - v_D{}^2 = -2.g.r'(1-\cos\theta)$ وبما أن : $v_D = v_C$: $v_M = \sqrt{v_C{}^2 - 2.g.r'(1-\cos\theta)}$

****

2-3 - باعتبار معلم فيريني $(o,\vec{u},\vec{n})$ في النقطة **M** . وبتطبيق القانون الثاني لنيوتن على S_1.



$\vec{P}_1 + \vec{R} = m_1.\vec{a}_G$ بالإسقاط على المنظمي : $R - P_1.\cos\theta = m_1.\frac{v_M{}^2}{r'}$ ومنه : $R = m_1.g.\cos\theta + m_1.\frac{v_M{}^2}{r'}$

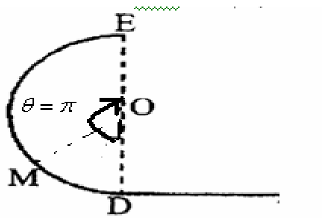
ولدينا من خلال السؤال السابق: $v_M{}^2 = v_D{}^2 - 2.g.r'(1-\cos\theta)$ $\Leftarrow$ $R = m_1.g.\cos\theta + m_1.\left[\frac{v_D{}^2}{r'} - 2.g(1-\cos\theta)\right]$

$R = m_1.g.\cos\theta + m_1\frac{v_D{}^2}{r'} - 2.m_1.g + 2.m_1.g.\cos\theta$ $\Leftarrow$ $R = 3m_1.g.\cos\theta + m_1\frac{v_C{}^2}{r'} - 2.m_1.g = m_1.g\left[.3\cos\theta - 2 + \frac{v_D{}^2}{r'.g}\right]$

عند مغادرة المستوى المائل يكون تأثير السكة منعدما : $R = 0$ و $v_D = v_2 = 4m/s$

زمنه : $3.\cos\theta - 2 + \frac{v_2{}^2}{r'.g} = 0$ ومنه : $\cos\theta = \frac{2}{3} - \frac{v_2{}^2}{3.r'.g} = \frac{2}{3} - \frac{4^2}{3\times0,32\times10.} = -1$ $\Leftarrow$ $\theta = \pi$

الجسم يغادر السكة عند النقطة **E**.

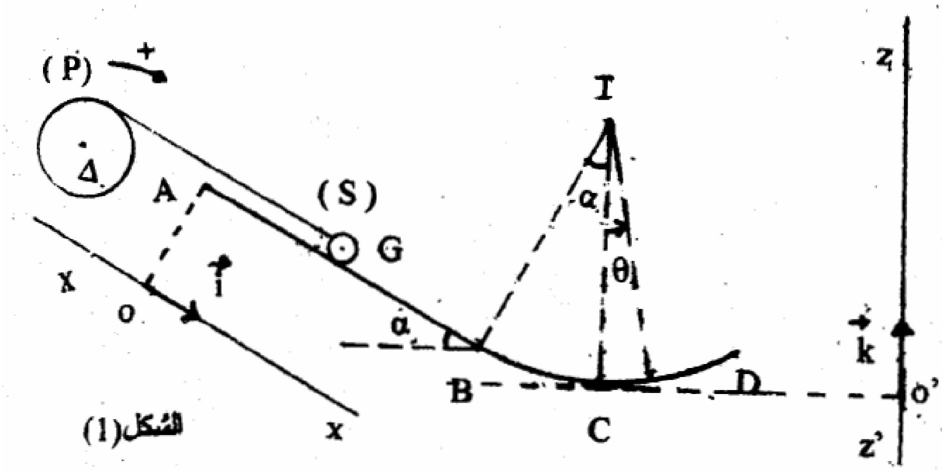


2 –التمرين الثاني :

نعتبر المجموعة الممثلة في الشكل(1) حيث

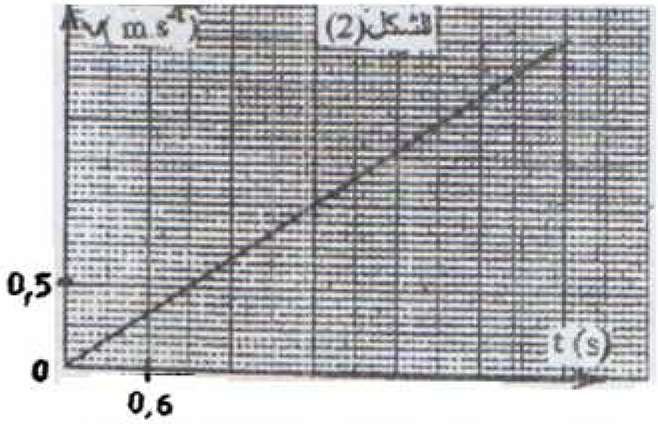
– (P) بكرة متجانسة شعاعها $r = 5cm$ قابلة للدوران في مستوى رأسي حول محور أفقي (Δ) ثابت يمر من مركزها. عزم قصور البكرة بالنسبة للمحور (Δ) هو $J_\Delta = 2.10^{-3}kg.m^2$.

– (S) كرية صلبة مركز قصورها G كتلتها $m = 0,1kg$ مرتبطة بطرف خيط غير قابل للامتداد و كتلة مهملة ملفوف حول مجرى البكرة. يمكن للكرية (S) أن تنزلق على سكة ABCD أسية، هذه السكة مكونة من جزء مستقيمي AB مائل بالزاوية $\alpha = 30^o$ بالنسبة للمستوى الأفقي و جزء BCD من دائرة مركزها I و شعاعها R=1m. نعتبر أن الاحتكاكات على السكة مهملة و أن الخيط لا ينزلق على مجرى البكرة ونأخذ $g=10m.s^{-2}$.



1– نحرر المجموعة في لحظة نعتبرها أصلا للتواريخ $t = 0$، فتنزلق الكرية بدون سرعة بدئية من الموضع A الذي يطابق أصل المعلم $(O,\vec{i})$ وتمر في اللحظة ذات التاريخ $t_1=2,7s$ من الموضع B بالسرعة v_B. نمعلم موضع G في كل لحظة بالا فصول x

في المعلم (O.i).



يمثل المنحنى في الشكل(2) تغيرات سرعة G بدلالة الزمن.

1.1- حدد طبيعة حركة كل من (S) و(P).

1.2- حدد قيمة v_B.

2- تنفصل الكرية،عند مرورها من الموضع B في التاريخ t_1، عن الخيط فتتوقف البكرة (P) بعد انجازها 10دورات ابتداء من التاريخ t_1.

2.1- لحسب السرعة الزاوية للبكرة في التاريخ t_1.

2.2- علما أن البكرة تخضع لمزدوجة مقاومة عزمها M ثابت.

لحسب قيمة M.

3- بعد انفصالها عن الخيط تنزلق الكرية على الجزء BCD من السكة ، حيث ندرس حركة مركز قصورها G. نأخذ $IG \approx R$.

3.1- بتطبيق مبرهنة الطاقة الحركية،أوجد تعبير v_C سرعة الكرية عند مرورها بالموضع C بدلالة R و g و α و V_B.

لحسب قيمة v_C.

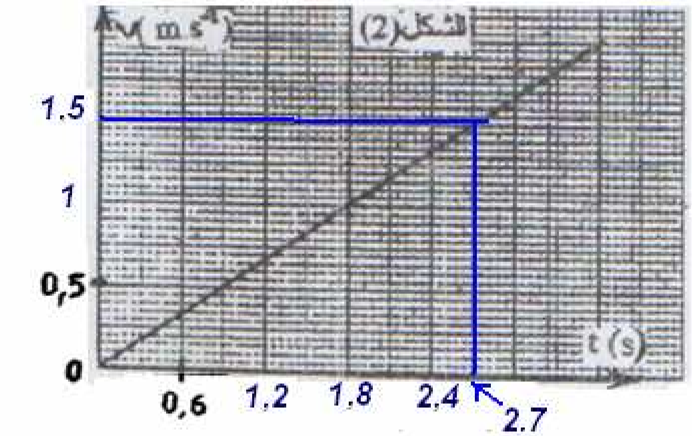
3.2- بتطبيق العلاقة الأساسية للدينامبك،أوجد تعبير شدة القوة $\vec{F}$ التي تؤثر بها السكة BCD على الكرية في الموضع C، بدلالة m وR وg وv_C. لحسب F.

****

تصحيح

1- 1-1--حركة S مستقيمية متغيرة بانتظام متسارعة بينما حركة البكرة P دورانية متغيرة بانتظام.

1-2- بما أ ن الجسم يمر من الموضع B عند اللحظة t=2,7s بالسرعة v_B نجد مبيانيا :



نجد $v_B = 1,5 m/s$

أو من خلال الشكل 2 منحنى v بدلالة t مستقيم يمر من أصل المعلم إذن : $v = k.t$ مع : $k = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{1-0}{1,8-0} = \frac{5}{9} \approx 0,56$

ومنه : $v = 0,56.t$ إذن : $a = \frac{dv}{dt} = 0,56 m/s^2$. $v_B = \frac{5}{9}.t = \frac{5}{9} \times 2,7 = 1,5 m/s$.

2-1-2- $\omega_1 = \frac{v_B}{r} = \frac{1,5}{0,05} = 30 rad/s$.

2-2 – بتطبيق العلاقة المستقلة عن الزمن على البكرة بين لحظة انفلات الحبل ولحظة التوقف :

$\omega_f^2 - \omega_i^2 = 2.\ddot{\theta}.\Delta\vartheta$ مع : $\omega_f = 0$ و: $\Delta\theta = 2.\pi.n$ $\Leftarrow$ $-\omega_i^2 = 4.\ddot{\theta}.\pi.n$ $\Leftarrow$ $\boxed{\ddot{\theta} = \frac{-\omega_1^2}{4\pi.n}}$

بتطبيق العلاقة الأساسية للتحريك على البكرة : $\Sigma M\vec{F}_{/\Delta} = J_\Delta.\ddot{\theta}$ أي : $M\vec{P} + M\vec{R} + M = J_\Delta.\ddot{\theta}$ أي : $0 + 0 + M = J_\Delta.\ddot{\theta}$

ومنه : $\boxed{M = -\frac{J_\Delta.\omega_1^2}{4\pi.n} = -\frac{2.10^{-3} \times 30^2}{4\pi.10} = -1,4.10^{-2} N.m}$

الطريقة الثانية :

*بتطبيق مبرهنة الطاقة الحركية على البكرة بين لحظة انفلات الحبل ولحظة التوقف :

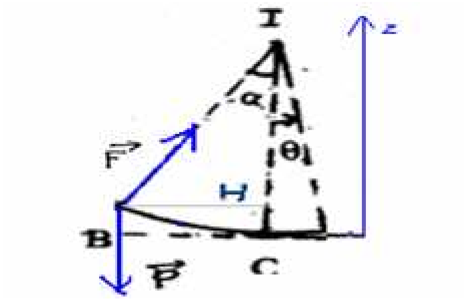
$E_{C.f} - E_{C.i} = \underset{i\to f}{W\vec{P}} + \underset{i\to f}{W\vec{R}} + \underset{i\to f}{W(Cfrott)}$ $\Leftarrow$ $0 - \frac{1}{2}J_\Delta.\omega_i^2 = 0 + 0 + M.\Delta\theta$ مع : $\Delta\theta = 2.\pi.n$

ومنه : $M = -\frac{J_\Delta.\omega_1^2}{4\pi.n} = -\frac{2.10^{-3} \times 30^2}{4\pi.10} = -1,4.10^{-2} N.m$

3- بتطبيق مبرهنة الطاقة الحركية على الكرية بين B وC. $\underset{B\to C}{\Delta E_C} = \underset{B\to C}{\Sigma W\vec{F}}$

$$E_{CC} - E_{CB} = \underset{B\to C}{W\vec{P}} + \underset{B\to C}{W\vec{F}}$$

$E_{CC} - E_{CB} = mg(z_B - z_C) + 0$ مع : $z_C = 0$ و : $z_B = r - r\cos\alpha$



$\frac{1}{2}m.v_C{}^2 - \frac{1}{2}m.v_B{}^2 = m.gR.(1-\cos\alpha) \Leftarrow .v_C{}^2 - .v_B{}^2 = 2.gR.(1-\cos\alpha)$ ومنه : $.v_C = .\sqrt{v_B{}^2 + 2.gR.(1-\cos\alpha)}$

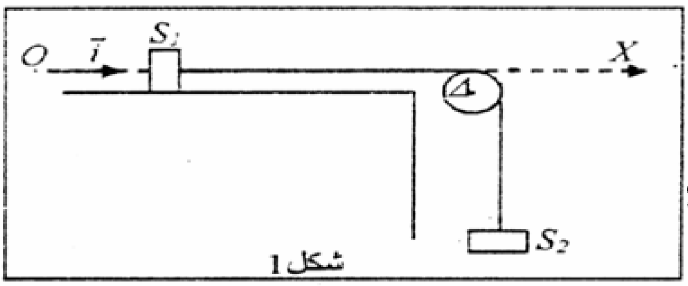
ت.ع: $.v_C = .\sqrt{(1,5)^2 + 2.\times 10\times 1.(1-\cos 30)} = 2,22 m/s$.

2-3- بتطبيق القانون الثاني لنيوتن على الكرية على الجزء BCD $\Sigma\vec{F} = m.\vec{a}_G$

تخضع الكرية لوزنها: $\vec{P}$ وللقوة : $\vec{F}$ المطبقة من طرف سطح التماس وهي عمودية على السطح .

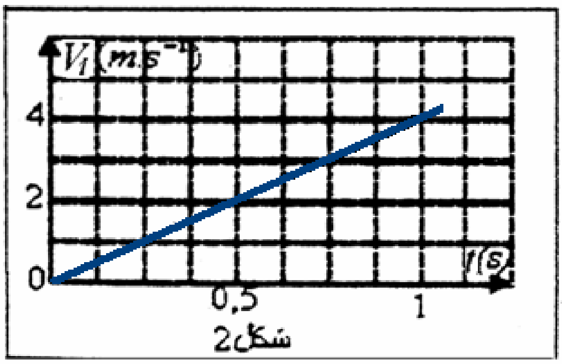
$\vec{F} + \vec{P} = m.\vec{a}_G$ بالاسقاط على المنظمي : $F - P = m.\frac{v_c{}^2}{R} \Leftarrow F = m(g + \frac{v_c{}^2}{R}) = 0,1\times\left[10 + \frac{(2,22)^2}{1}\right] = 1,49N$

3) التمرين الثالث :



1- تتكون المجموعة الممثلة في الشكل 1 من:

- جسم صلب S_1 كتلته M_1 ينزلق بدون احتكاك فوق منضدة أفقية.
- جسم صلب S_2 كتلته M_2 مرتبط بالجسم S_1 بواسطة خيط غير قابل للامتداد وكتلته مهملة.
- بكرة (P) كتلتها M وشعاعها R قابلة للدوران بدون احتكاك حول محورها (Δ) ويمر عبر مجراها الخيط الذي نعتبره لا ينزلق خلال الحركة. نحرر المجموعة عند اللحظة $t=0s$ بدون سرعة بدئية بحيث ينطلق الجسم S_1 من نقطة أفصولها على المحور $\overline{OX}$ هو $0,5cm$ ونحدد تجريبيا تغير V_1 سرعة S_1 بدلالة الزمن فنحصل على الشكل 2.



1-1- اكتب التعبير العددي لـ V_1 بدلالة الزمن.

1-2- استنتج طبيعة حركة S_1 وأعط معادلتها الزمنية $x=f(t)$.

1-3- بين أن لـ S_1 و S_2 نفس التسارع a.

1-4- بتطبيق العلاقة الأساسية للديناميك على كل من S_1 و S_2 و (P) ، أوجد العلاقة بين التسارع a وشدة الثقالة g. نعطي: عزم قصور البكرة $J_\Delta = \frac{1}{2}MR^2$ بالنسبة للمحور (Δ) و $M_1=M_2=M$.

****

تصحيح التمرين الثالث:

1.1 ـ حسب مبيان الشكل -2- الدالة $V_1 = f(t)$ عبارة عن دالة خطية : $V_1 = K.t$

حيث K المعامل الموجه للمستقيم : $K = \frac{\Delta V_1}{\Delta t} = \frac{4-0}{1-0} = 4\ m.s^{-2}$

2.1 ـ المسار مستقيمي و التسارع ثابت السرعة تزايدية .

إذن الحركة مستقيمية متسارعة بانتظام ، معادلتها الزمنية :

$x = \frac{1}{2}a_1t^2 + V_0.t + x_0$. نحدد الثوابت x_0 و V_0 انطلاقا من الشروط البدئية

عند $t=0$ ، تكون : $V_0 = 0$ و $x_0 = 0,5cm$ إذن :

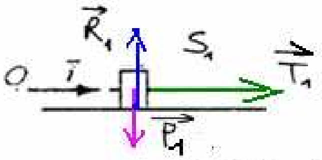
$$\boxed{x = 2t^2 + 5.10^{-3}}$$

3.1 ـ بما أن الخيط الرابط بين (S_1) و (S_2) غير قابل للامتداد، فإنه عند انتقال S_1 بالمسافة x_1 ينتقل (S_2) بالمسافة x_2 حيث : $x_1 = x_2$ في كل لحظة .

نشتق x_1 و x_2 بالنسبة للزمن ، $\dot{x}_1 = \dot{x}_2 \Leftarrow \ddot{x}_1 = \ddot{x}_2$

أي أن : $a_1 = a_2 = a = 4\ m.s^{-2}$:

لـ (S_1) و (S_2) نفس السرعة ونفس التسارع في كل لحظة .



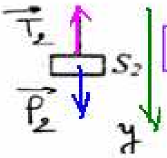
المجموعة المدروسة { الجسم S_1 } تخضع (S_1) خلال حركته لـ :

$\vec P_1$: وزنه .

$\vec R_1$: تأثير السطح الأفقي .

$\vec T_1$: تأثير الخيط (1)

بتطبيق القانون الثاني لنيوتن على S_1 : $\vec P_1 + \vec R_1 + \vec T_1 = M_1 \vec a$ نسقط على $x'x$: $\boxed{T_1 = M_1 a}$



المجموعة المدروسة { الجسم S_2 } تخضع (S_2) خلال حركته لـ :

$\vec P_2$: وزنه

$\vec T_2$: تأثير الخيط (2)

بتطبيق القانون الثاني لنيوتن على الجسم S_2 : $\vec P_2 + \vec T_2 = M\vec a$

نسقط هذه العلاقة على $y'y$: $M_2 g - T_2 = Ma$

$$\boxed{T_2 = M_2 g - Ma}$$

المجموعة المدروسة { البكرة }

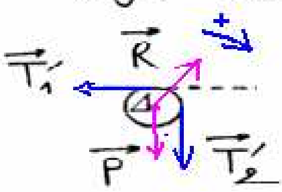
تخضع البكرة أثناء دورانها حول المحور (Δ) لـ :

$\vec P$: وزنها .

$\vec R$: تأثير محور الدوران .

$\vec T'_1$: تأثير الخيط (1)

$\vec T'_2$: تأثير الخيط (2)



$$\mathcal{M}_\Delta(\vec P) + \mathcal{M}_\Delta(\vec R) + \mathcal{M}_\Delta(\vec T'_1) + \mathcal{M}_\Delta(\vec T'_2) = J_\Delta.\ddot\theta$$

مع : $\mathcal{M}_\Delta(\vec R) = 0$ و $\mathcal{M}_\Delta(\vec P) = 0$

$J_\Delta.\ddot\theta = rT'_2 - rT'_1$ الخيط غير قابل للمد $\Leftarrow$ $T'_1 = T_1$ و $T'_2 = T_2$

الخيط لا ينزلق على البكرة : $\ddot\theta = \frac{a}{r}$

نحصل على : $J_\Delta . \frac{a}{r} = rM_2(g-a) - rM_1 a$

$$a\left(\frac{J_\Delta}{r^2} + M_2 + M_1\right) = M_2 g$$

$$\boxed{a = \frac{M_2}{\frac{J_\Delta}{r^2} + M_2 + M_1}.g}$$

مع : $M_1 = M_2 = M$ و $J_\Delta = \frac{1}{2}Mr^2$

نكتب :

$$a = \frac{M}{5.\frac{M}{2}}.g = \frac{2}{5}g.$$

Sbiro Abdelkrim Lycée Agricole + lycée anahda Oulad Taima région d'agadir MAROC.
sbiabdou@yahho.fr

لا تنسونا بصالح دعائكم ونسأل الله لكم العون و التوفيق إنه سميع مجيب الدعاء .