مبادئ في المنطق

I- تعاريف ومصطلحات

1- العبارة – الدالة العبارية

أ- تعريف

كل جملة صحيحة نحويا و يمكن الحكم عن صحة معناها أو خطأه بدون نقاش تسمى عبارة.

أمثلة نعتبر النصوص التالية

$p_1 :$ $-2\times 4=-8$ $p_2 :$ 3عدد زوجي

$p_3 :$ $5+7\succ 4$

p_1 و p_3 عبارتان صحيحتان

p_2 عبارة خاطئة

ب- تعريف

كل نص رياضي يحتوي على متغير ينتمي الى مجموعة معينة و يصبح عبارة كلما عوضنا هذا المتغير بعنصر محدد من هذه المجموعة يسمى دالة عبارية.

أمثلة

$x\le 3$ $x\in\mathbb{R}$ دالة عبارية

$x-2y=3$ $(x;y)\in\mathbb{Z}^2$ دالة عبارية

2- المكممات – العبارات المكممة

أ- المكمم الوجودي

لتكن $p(x)$; $x\in E$ دالة عبارية

العبارة $(\exists x\in E):\ p(x)$ تعني يوجد على الأقل عنصرا x من E يحقق $p(x)$.

الرمز $\exists$ يسمى المكمم الوجودي .

إذا كان يوجد عنصرا وحيدا x من E يحقق $p(x)$ فإننا نكتب $(\exists! x\in E):\ p(x)$

أمثلة

$x^2=-1$ $\exists x\in\mathbb{R}$ عبارة خاطئة

$\frac{x}{4}\in\mathbb{Z}$ $\exists x\in\mathbb{Z}$ عبارة صحيحة

$\cos x=\frac{1}{2}$ $\exists! x\in[0;\pi]$ عبارة صحيحة

$x^2=4$ $\exists! x\in\mathbb{R}$ عبارة خاطئة

ب- المكمم الكوني

لتكن $p(x)$; $x\in E$ دالة عبارية

العبارة $(\forall x\in E):\ p(x)$ تعني أن جمع عناصر E تحقق $p(x)$. تقرأ لكل x من E , $p(x)$ محقق (أو صحيحة).

الرمز $\forall$ يسمى المكمم الكوني.

أمثلة

$x^2\ge 0$ $\forall x\in\mathbb{R}$ عبارة صحيحة.

$x-y=1$ $\forall(x;y)\in\mathbb{R}^2$ عبارة خاطئة

د- العبارات المكممة

لتكن $p(x;y)$ دالة عبارية معرفة على $E\times F$

نطبق أحد المكممين على الخاصية $p(x;y)$ بالنسبة للمتغير x

مثلا المكمم الكوني، نحصل على $(\forall x\in E):\ p(x;y)$

دالة عبارية للمتغير y وهي غير مرتبطة بـ x.

نطبق عليها أحد المكممين بالنسبة للمتغير y. مثلا المكمم الوجودي،

فنحصل على العبارة $p(x;y)\quad (\forall x\in E)\quad (\exists y\in F)$.

أمثلة

$y^2=x\quad (\exists y\in\mathbb{R})\quad (\forall x\in\mathbb{R})$ عبارة خاطئة

(نأخذ $x=-1$)

$x+y=-2\quad (\exists y\in\mathbb{R})\quad (\forall x\in\mathbb{R})$ عبارة صحيحة

$x+y=-2\quad (\forall x\in\mathbb{R})\quad (\exists y\in\mathbb{R})$ عبارة خاطئة

$|x+y|\le|x|+|y|\quad (\forall y\in\mathbb{R})\quad (\forall x\in\mathbb{R})$ عبارة صحيحة.

$x+y=3\quad (\exists y\in\mathbb{R})\quad (\exists x\in\mathbb{R})$ عبارة صحيحة.

ملاحظة هامة

ترتيب مكممات من نفس الطبيعة ليس له أهمية في تحديد المعنى التي تحمله العبارة المكممة .

ترتيب مكممات من طبيعة مختلفة له أهمية في تحديد المعنى التي تحمله العبارة المكممة .

II- العمليات المنطقية

1- نفي عبارة

أ- تعريف

نفي عبارة p هي عبارة نرمز لهاب $\overline{p}$ أو بـ $\rceil p$ تكون صحيحة إذا كانت p خاطئة و تكون خاطئة إذا كانت p صحيحة. $\overline{p}$ تقرأ نفي p

جدول حقيقة $\overline{p}$

p	$\overline{p}$
1	1
0	0

أمثلة نفي العبارة $1\prec\sqrt{2}$ هي العبارة $1\ge\sqrt{2}$

نفي العبارة $\sqrt{3}\notin\mathbb{Q}$ هي العبارة $\sqrt{3}\in\mathbb{Q}$

ب- نفي عبارة مكممة

* نفي العبارة $A(X)\quad \forall x\in E$ هي العبارة $\overline{A(X)}\quad \exists x\in E$.

* نفي العبارة $A(X)\quad \exists x\in E$ هي العبارة $\overline{A(X)}\quad \forall x\in E$.

* نفي العبارة $A(x;y)\quad (\forall y\in F)\quad (\forall x\in E)$ هي العبارة $\overline{A(x;y)}\quad (\exists y\in F)\quad (\exists x\in E)$

نفي العبارة $A(x;y)\quad (\exists y\in F)\quad (\forall x\in E)$ هي العبارة $\overline{A(x;y)}\quad (\forall y\in F)\quad (\exists x\in E)$

مثال اعط نفي العبارة التالية $x^2+y^2\prec z\ :(\exists y\in\,]0;1[)\quad (\exists x\in\,]0;1[)\quad (\forall z\succ 0)$

د- نتيجة (الاستدلال بالمثال المضاد)

للبرهان على أن عبارة ما p خاطئة ، يكفي أن نبين أن نفيها $\overline{p}$ صحيحة.

للبرهنة على خطأ $\left[(\forall x\in E):\ A(x)\right]$ يكفي أن نبرهن صحة $\left[(\exists x\in E):\ \overline{A(x)}\right]$

تطبيق بين أن $x+\dfrac{1}{x}\ge 2\ :(\forall x\in\mathbb{R}^*)$ خاطئة

نعتبر $x=-2$ $\quad -2+\dfrac{1}{-2}=\dfrac{-5}{2}\prec 2$ اذن لدينا $x+\dfrac{1}{x}\prec 2\ :(\exists x\in\mathbb{R}^*)$ عبارة صحيحة

و منه $x+\dfrac{1}{x}\ge 2\ :(\forall x\in\mathbb{R}^*)$ خاطئة

2- الفصل المنطقي

تعريف

فصل العبارتين p و q هو العبارة التي تكون صحيحة إذا كانت على الأقل إحدى العبارتين p و q صحيحتين .

و تكتب (p أو q) نكتبها أيضا $p\vee q$

جدول حقيقة $p\vee q$

p	q	$p \vee q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

العبارة $\frac{3}{2} \in \mathbb{N}$ أو $5 \succ 2$ صحيحة

العبارة $2^2 = -4$ أو $-3 \geq 1$ خاطئة

ملاحظة

* العبارتان (p أو q) و (q أو p) تحملان نفس المعنى نقول عملية الفصل تبادلية

* العبارتان r أو(p أو q) و (r أو p) أو q تحملان نفس المعنى، نقول عملية الفصل تجميعية.

3- العطف المنطقي

تعريف

عطف العبارتين p و q هو العبارة التي تكون صحيحة فقط إذا كانت العبارتان p و q صحيحتين معا.
و تكتب(p و q) نكتبها أيضا $p \wedge q$

جدول حقيقة $p \wedge q$

p	q	$p \wedge q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

مثال

العبارة $\frac{3}{2} \in \mathbb{N}$ و $5 \succ 2$ خاطئة

العبارة $\left(\forall x \in \mathbb{R} \quad x^2 \geq 0\right)$ و $-3 \prec 1$ صحيحة

ملاحظة

* العبارتان (p و q) و (q و p) تحملان نفس المعنى نقول عملية العطف تبادلية

* العبارتان r و(p و q) و (r و p) و q تحملان نفس المعنى، نقول عملية العطف تجميعية.

* $\overline{p \wedge q} = \overline{p} \vee \overline{q}$ $\overline{p \vee q} = \overline{p} \wedge \overline{q}$ بين ذلك

4- الاستلزام

تعريف

استلزام العبارتين p و q هو العبارة التي تكون خاطئة فقط إذا كانت p صحيحة و q خاطئة.
و تكتب $p \Rightarrow q$ أقرا p تستلزم q

جدول حقيقة $p \Rightarrow q$

p	q	$p \Rightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

أمثلة

العبارة $\left(\forall x \in \mathbb{R} \quad x^2 \geq 0\right) \Rightarrow 4+1=5$ صحيحة

العبارة $2 \succ 1 \Rightarrow -1 = 2+3$ خاطئة

العبارة $3 \times 2 = 9 \Rightarrow 5-1=20$ صحيحة

العبارة $\left(\forall \in \mathbb{R} \quad |x| \geq 0\right) \Rightarrow 2-1=1$ صحيحة

اصطلاح إذا كانت العبارة $q \Rightarrow p$ صحيحة ، نقول إن q استنتاج منطقي للعبارة p .

ملاحظة

* العبارتان $p \Rightarrow q$ و $(\bar{p} \vee q)$ تحملان نفس المعنى

* $p \Rightarrow q$ يسمى الاستلزام العكسي للاستلزام $q \Rightarrow p$.

* للبرهنة على أن $p \Rightarrow q$ صحيحة ، يكفي أن نفترض أن p صحيحة و نبين أن q صحيحة.

نقول إن p شرط كاف لتحقيق q

تمرين تطبيقي

ليكن $x \in \mathbb{R}$

بين أن $-2 \le x \le \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{-3x+5}{x+4} \le \frac{11}{2}$

(نفترض أن $-2 \le x \le \frac{1}{3}$ و نبين أن $\frac{-3x+5}{x+4} \le \frac{11}{2}$)

5- التكافؤ المنطقي

تعريف

ليكن p و q عبارتين

العبارة ($p \Rightarrow q$ و $q \Rightarrow p$) تسمى تكافؤ العبارتين p و q وتكون صحيحة إذا كانت p و q لهما نفس قيم الحقيقة و نرمز لها بـ $p \Leftrightarrow q$ و تقرأ p تكافئ q أو p إذا وفقط إذا q أو p شرط لازم و كاف لتحقيق q

جدول حقيقة $p \Leftrightarrow q$

p	q	$p \Leftrightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

أمثلة العبارة (5 عدد فردي $\Leftrightarrow 2 \succ 3$) صحيحة

العبارة (-1 عدد موجب $\Leftrightarrow 5+2=3$) صحيحة

العبارة ($-1 \in \mathbb{N} \Leftrightarrow 2 \succ 1$) خاطئة

ملاحظة

* $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (q \Leftrightarrow p)$ نقول إن التكافؤ عملية تبادلية

* $(p \Leftrightarrow (q \Leftrightarrow r)) \Leftrightarrow ((p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow r)$ نقول إن التكافؤ عملية تجميعية

تمرين

باستعمال جداول الحقيقة بين أن

$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\bar{p} \vee q)$ و $(\bar{p} \Rightarrow q) \Leftrightarrow (p \vee q)$

$\overline{p \Rightarrow \bar{q}} \Leftrightarrow (p \wedge q)$ صحيحة

III- القوانين المنطقية

كل عبارة مكونة من عبارتين أو عدة عبارات $p;q;r...$مرتبطةبينها بالعمليات المنطقية و تكون صحيحة مهما كانت العبارات $p;q;r...$تسمى قانونا منطقيا

1- أنشطة

بين أن العبارات التالية قوانين منطقية

$p \vee \bar{p}$ ، $p \Leftrightarrow \bar{\bar{p}}$ ، $(p \wedge (p \Rightarrow q)) \Rightarrow q$

$[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)] \Rightarrow (p \Rightarrow r)$

ملاحظة و اصطلاح

* لدينا $(p \wedge (p \Rightarrow q)) \Rightarrow q$ قانون منطقي و يسمى القاعدة العامة للاستدلال الاستنتاجي .

للبرهان على صحة العبارة q

نبين أن الاستلزام $p \Rightarrow q$ صحيحا حيث p عبارة ما صحيحة، ثم نستنتج أن q صحيحة.

* لدينا $\left[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)\right] \Rightarrow (p \Rightarrow r)$ قانون منطقي نقول إن الاستلزام عملية متعدية.

2- بعض القوانين المنطقية

*أ- قوانين موركان LOIS DE MORGAN

العبارات التالية قوانين منطقية

$\overline{(p \vee q)} \Leftrightarrow \overline{p} \wedge \overline{q}$ $\qquad$ $\overline{(p \wedge q)} \Leftrightarrow \overline{p} \vee \overline{q}$

$p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

$p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

تطبيق حل في $\mathbb{R}^2$ النظمة

$$\begin{cases} 2x - y = 2 \\ x^2 - y^2 = 0 \end{cases}$$

الحل

$$(x;y) \in S \Leftrightarrow 2x - y = 2 \wedge (x - y = 0 \vee x + y = 0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (2x - y = 2 \wedge x - y = 0) \\ \vee (2x - y = 2 \wedge x + y = 0) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (x = 2 \wedge y = 2) \vee \left(x = \frac{2}{3} \wedge y = -\frac{2}{3}\right)$$

اذن $S = \left\{(2;2);\left(\frac{2}{3};-\frac{2}{3}\right)\right\}$

تمرين

اعط نفي العبارات $\forall x \in \mathbb{R}: \quad x + 1 \geq 0 \quad \vee \quad x^2 - 1 \prec 0$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad (x;y) \in [0;1] \Rightarrow 0 \leq \frac{x + y}{1 + xy} \leq 1$$

*ب- قانون التكافؤات المتتالية

العبارة $\left[(A \Leftrightarrow B) \wedge (B \Leftrightarrow C)\right] \Rightarrow (A \Leftrightarrow C)$ قانون منطقي.

نتيجة (الاستدلال بالتكافؤات المتتالية)

نستنتج من هذا القانون أنه اذا كان $(A \Leftrightarrow B)$ و $(B \Leftrightarrow C)$ فان $(A \Leftrightarrow C)$ صحيحا.

تمرين

ليكن $(x;y) \in \mathbb{R}^2$

بين أن $\sqrt{x - 1} + 2\sqrt{y - 4} = \frac{x + y}{2} \Leftrightarrow (x;y) = (2;8)$

* د- قانون الاستلزام المضاد للعكس

العبارة $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow \left(\overline{B} \Rightarrow \overline{A}\right)$ قانون منطقي

ملاحظة

في بعض الأحيان يصعب البرهان على صحة $A \Rightarrow B$

فنلجأ الى البرهان على صحة $\overline{B} \Rightarrow \overline{A}$ ثم نستنتج صحة $A \Rightarrow B$

هذا البرهان يسمى الاستدلال بالاستلزام المضاد للعكس

تمرين ليكن $x \in \mathbb{R}$

بين أن $x \neq -8 \Rightarrow \frac{x + 2}{x + 5} \neq 2$

نتيجة

$(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow \left(\overline{A} \Leftrightarrow \overline{B}\right)$ قانون منطقي

*ج- قانون الخلف

قانون منطقي $\left(\left(\overline{B} \Rightarrow \overline{C}\right) \wedge \left(\overline{B} \Rightarrow C\right)\right) \Rightarrow B$

نتيجة (الاستدلال بالخلف)

نفترض أن $\overline{B}$ صحيحة ، ونبين أن $\overline{B} \Rightarrow \overline{C}$ صحيحة(أي $\overline{C}$
صحيحة) حيث Cعبارة ما صحيحة (أي $\overline{B} \Rightarrow C$ صحيحة)
و هذا تناقض لأن C لا يمكن أن تكون صحيحة و خاطئة في نفس الوقت .ثم نستنتج أن B صحيحة.
هذا نوع من الاستدلال يسمى الاستدلال بالخلف.

تمرين برهن أن $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

* ر- قانون فصل الحالات

قانون منطقي $\left((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)\right) \Rightarrow \left[(A \vee B) \Rightarrow C\right]$

ملاحظة

إذا كانت $A \vee B$ صحيحة فانه للبرهنة على صحة C ، نبين أن $A \Rightarrow C$ صحيحة و $B \Rightarrow C$ صحيحة ،
ثم نستنتج أن C صحيحة.

هذا الاستدلال يسمى الاستدلال بفصل الحالات

عمليا نطبق $\left[(A \Rightarrow C) \wedge \left(\overline{A} \Rightarrow C\right)\right] \Rightarrow C$ لأن $A \vee \overline{A}$ صحيحة دائما.

تمرين حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $x^2 - |x-1| + 1 = 0$

VI- مبدأ الترجـــع

خاصية

لتكن $p(n)$ خاصية لمتغير n صحيح طبيعي

اذا كان يوجد عدد صحيح طبيعي n_0 بحيث تكون العبارة $p(n_0)$ صحيحة .

و اذا كانت العبارة $p(n) \Rightarrow p(n+1)$ $\forall n \geq n_0$ صحيحة. فان العبارة $(\forall n \geq n_0) : p(n)$ صحيحة.

ملاحظة

للبرهان على أن $(\forall n \geq n_0) : p(n)$ صحيحة، نتبع الخطوات التالية

- التحقق:

  نتحقق أن العبارة $p(n_0)$ صحيحة

- افتراض الترجع:

  نفترض أن العبارة $p(n)$ صحيحة $n \geq n_0$ و نبين أن $p(n+1)$ صحيحة.

  هذا الاستدلال يسمى الاستدلال بالترجع

تمرين بين بالترجع $2^n \geq n^2$ $\forall n \geq 4$

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$