الدرس الثالث عشر

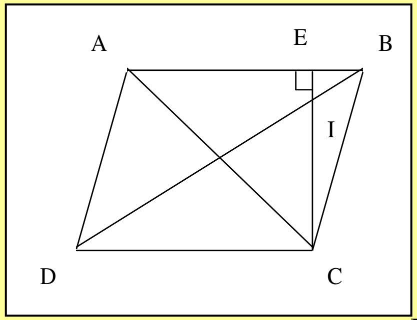
المثلثات المتشابهة

ملخـــــــــــــــص الـــــــــــــدرس

- يكون مثلثان متشابهان إذا كانت زواياهما المتناظرة متقايسة
- خاصية 1) إذا كان مثلثان متشابهان فإن أطوال الأضلاع المتناظرة متقايسة
- خاصية 2) إذا قايست زاويتان من مثلث زاويتين من مثلث آخر، فإن هذين المثلثين متشابهان
- خاصية 3) إذا قايست زاوية من مثلث زاوية من مثلث آخر، و كانت أطوال الأضلاع المحاذية لهاتين الزاويتين متناسبة فيما بينها فإن هذين المثلثين متشابهان
- خاصية 4) إذا كانت أطوال أضلاع مثلث متناسبة مع أطوال أضلاع مثلث آخر فإن هذين المثلثين متشابهان

التمــــــــــــــــــــــــاريـــــــــن :

التمرين الأول :



ليكن ABCD متوازي الأضلاع

E المسقط العمودي للنقطة C على [AB]

I نقطة تقاطع المستقيمين (EC) و (DB)

1- قارن المثلثين IEB و DCI

2- إذا علمت أن : AB = 6 , IB = 2 و ID = 8

$A\hat{C}B = C\hat{B}D$

و بالتالي نبين أن $C\hat{B}D = 34°$

لدينا المثلث ABD لدينا

$A\hat{B}D + A\hat{D}B + B\hat{A}D = 180°$

$A\hat{B}D = 180° - A\hat{D}B - B\hat{A}D$

$= 180° - 34° - 82°$

$= 64°$

من جهة آخرى لدينا $A\hat{B}C = 30°$

$A\hat{B}C + C\hat{B}D = A\hat{B}D$

$C\hat{B}D = A\hat{B}D - A\hat{B}C$

$= 64° - 30°$

$= 34°$

و بالتالي $C\hat{B}D = A\hat{C}B = 34°$

و بالتالي (AC) يوازي (BD) لأن $C\hat{B}D$ و $B\hat{C}A$ متبادلتين داخليا

فاحسب EB

3- حدد نسبة تشابه المثلثين IEB DCI

التمرين الثاني:

لتكن (ζ) الداة المحيطة بالمثلث ABC

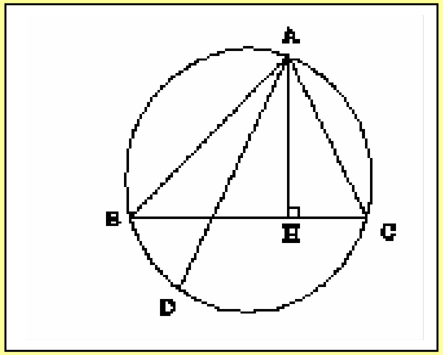
لتكن H المسقط العمودي A على(BC)

و المستقيم (Ao) يقطع (ζ) في D

1- بين أن المثلثين ABD و ACH متشابهان

2- نضع $AB = c$, $AC = b$ و $AH = h$

استنتج أن : $bc = 2\,r\,h$



التمرين الثالث :

ليكن ABC مثلثا و H المسقط العمودي للنقطة A على[BC] بحيث :

$B\hat{A}H = 45°$, $H\hat{A}C = 30°$ و $AH = 6$ cm

نعتبر (ζ) الدائرة ذات القطر [AH] والمركز o

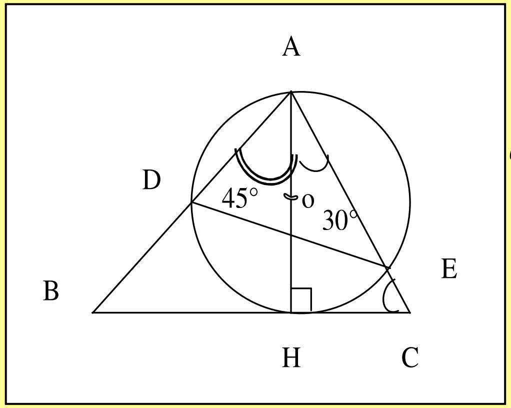
(ζ) تقطع (AB) في D و (AC) في E

1- أحسب AB وAC

2- بين أن $AE = 3\sqrt{3}$ cm

3- بين أن $A\hat{D}E = 60°$

4- بين أن المثلثي ABC و ADE متشابهين



التمرين الرابع :

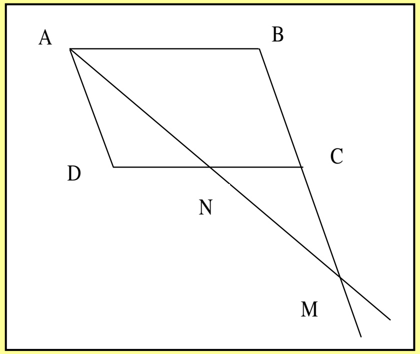
ليكن ABCD متوازي أضلاع

N نقطة من [DC] و (AN)

يقطع (BC) في M

1- بين أن المثلثين ADN و ABM متشابهين

2- استنتج أن $DN \times BM = AB \times AD$



حــــــــــــل تمــاريـــــن المثلــثات المتشــابـــــهة

حل التمرين الأول:

1- بما أن E هي المسقط العمودي للنقطة C على (AB)

فإن (EC) عمودي على (EB) و كذلك (EC) عمودي على(CD)

لأن (CD) $/\!/$ (AB) و بالتالي $I\hat{E}B$ و $D\hat{C}B$ قائمتان

و بالتالي $I\hat{E}B = D\hat{C}I$

من جهة آخرى $I\hat{E}B$ و $D\hat{C}I$ متقايستان لأنهما متبادلتان بالرأس

إذن هناك

$$\left\{\begin{array}{l} I\hat{E}B = D\hat{C}I \\ \\ E\hat{I}B = D\hat{I}C \end{array}\right.$$

زاويتان في المثلث IEB تقايسان زاويتان فيDIC

إذن المثلثان IEB و DCI متشابهان

2- بماأن IEB وDCI متشابهان فإن :

$$\frac{IB}{ID} = \frac{IE}{IC} = \frac{BE}{DC}$$

إذن $BE = \frac{IB}{ID} \times DC = \frac{IB}{ID} \times AB$

$$= \frac{2}{8} \times 6$$

$$= \frac{3}{2}$$

3- نسبة التشابه هي $\frac{BE}{DC} = \frac{\frac{3}{2}}{6} = \frac{3}{12}$

حل التمرين الثاني:

1- بما أن [AD] قطر في الدائرة إذن المثلث ABD قائم الزاوية فيB

و بالتالي $A\hat{H}C = 90° = A\hat{B}D$

بقي الآن محاولة إيجاد زاوية ثانية من المثلث ABD تقايس زاوية من المثلث ACH

أو البرهنة أن $\frac{BA}{BD} = \frac{HA}{HC}$

لاحظ أنه حينما يتعلق الأمر بتمرين في المثاثات المتشابهة داخل الدوائر : اعلم أنه من جد المتوقع استعمال الزوايا المحيطية التي تحاصر الأقواس

لدينا $A\hat{D}B$ و $A\hat{C}B$ تحصر نفس القوس BA

و $A\hat{D}B = A\hat{C}B$ و من المثلثان متشابهان

2- بين أن $bc = 2\,r\,h$

كل ما في هذا الإطار يكتب في ورقة البحث فقط

$$\left\{\begin{array}{ll} \mathbf{AC \times AB = 2\,r \times AH} & \textbf{أو} \\ \mathbf{AC \times AB = AD \times AH} & \textbf{أو} \\ \mathbf{\dfrac{AC}{AD} = \dfrac{AH}{AB}} \quad \mathbf{(1)} & \textbf{أو} \end{array}\right.$$

لأن AD قطر في الدائرة

لاحظ أن النتيجة الأخيرة التي توصلنا إليها هي خاصية في المثلثات المتشابهة

لذلك نبدأ البرهنة : لدينا المثلثات ABD و ACH متشابهان

إذن أضلاع المثلث الأول متناسبة مع أضلاع المثلث الثاني

إذن مع الحفاظ على ترتيب الزوايا و الأضلاع :

$$\frac{AC}{AD} = \frac{AH}{AB} = \frac{CH}{BD}$$

$$AC \times AB = AD \times AB$$

$$AC \times AB = 2\,r \times AB$$

و بالتالي $\boxed{bc = 2\,r\,h}$

حل التمرين الثالث:

1- لدينا في المثلث ABH <== $\cos B\hat{A}H = \dfrac{AH}{AB}$

$$AB = \frac{AH}{\cos 45°} = \frac{6}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{12}{\sqrt{2}} = 6\sqrt{2}\ \text{cm}$$

في المثلث ACH <== $\cos H\hat{A}C = \dfrac{AH}{AC}$

$$AC = \frac{AH}{\cos H\hat{A}C} = \frac{6}{\cos 30°} = \frac{6}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{12}{\sqrt{3}} = 4\sqrt{3}\ \text{cm}$$

2- نعتبر المثلث AHE الذي هو مثلث قائم الزاوية في E لأن AH قطر في الدائرة (ζ)

إذن

$$\cos H\hat{A}E = \frac{AE}{AH}$$

$$AE = AH \times \cos H\hat{A}E$$

$$= 6 \times \cos 30°$$

$$= 6 \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= 3\sqrt{3}\ \text{cm}$$

3- لدينا الزاويتان $A\hat{D}E$ و $A\hat{H}E$ تحصران نفس القوس AE

إذن $A\hat{D}E = A\hat{H}E$

من جهة آخرى المثاث AHE قائم الزاوية في E

$$A\hat{H}E + H\hat{A}E + A\hat{E}H = 180°$$

$$A\hat{H}E = 180° - H\hat{A}E - A\hat{E}H$$
$$= 180° - 30° - 90°$$
$$= 60°$$

وبالتالي $A\hat{D}E = 60°$

و $A\hat{E}D = 180 - A\hat{D}E - 75°$
$$= 180° - 60° - 75°$$
$$= 45°$$

4- لدينا المثلقات AHC وAHB قائمي الزاوية في H

$A\hat{C}H = 60°$ و $A\hat{B}H = 45°$

و بالتالي في المثلثين ADE و ABC لدينا :

$$\begin{cases} A\hat{D}E = 60° = A\hat{C}H \\ A\hat{E}D = 45° = A\hat{B}H \end{cases}$$

زاويتان في المثلث ADE تقايسان زاويتان في المثلثABC

إذن ABC و ADE متشابهين

حل التمرين الرابع:

1- الزاويتان $A\hat{N}D$ و $M\hat{N}C$ متبادلتان بالرأس و بالتالي متقايستان

و من جهة آخرى $(BC) \parallel (AD)$

إذن (AD) و (BC) يكونان مع قاطعهما زاويتين متبادلتين داخليا $A\hat{D}N$ و $N\hat{C}M$

إذن $A\hat{D}N = N\hat{C}M$

و بالتالي المثلثان متشابهان

2- ADN و ABM متشابهان إذن :

$$\frac{ND}{NC} = \frac{NA}{NM} = \frac{DA}{CM}$$

إذن $ND \times CM = NC \times DA$

$$DN \times (BM - BC) = (DC - DN) \times DA$$

$$DN \times BM - DN \times AD = AB \times AD - DN \times AN$$

و بالتالي $DN \times BM = AB \times AD$