



Concours d'accès en 1^{ère} année du Programme Grande École
Examen Type
Épreuve de Mathématiques Générales
Durée : 2 heures

Questionnaire (6 points)

Ce questionnaire comprend 10 questions à choix multiples, chaque question ayant 5 propositions de réponse dont une seulement est juste.

1. La forme développée de $2(x-1)^2$ est (entourez la bonne réponse) :

$2x^2 - 2$	$4x^2 - 8x + 4$	$2x^2 - 4x + 2$	$4x^2 - 4$	$2x^2 - 4x + 4$
------------	-----------------	-----------------	------------	-----------------

2. f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ telle que :

- f est paire
- f est croissante sur $[0 ; +\infty[$
- $f(3) = 4$

Peut-on en conclure que (entourez la bonne réponse) :

- | | | |
|---|----|--------------|
| a) f est décroissante sur $]-\infty ; 0]$ | et | $f(-3) = -4$ |
| b) f est décroissante sur $]-\infty ; 0]$ | et | $f(-3) = 4$ |
| c) f est croissante sur $]-\infty ; 0]$ | et | $f(-3) = 4$ |
| d) f est croissante sur $]-\infty ; 0]$ | et | $f(-3) = -4$ |
| e) f est décroissante sur $]-\infty ; 0]$ | et | $f(-3) = -3$ |

3. Considérons la fonction f définie sur $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = x \ln(a) - a \ln(x)$ a étant un nombre réel strictement positif. Soit f' la fonction dérivée de f sur $]0 ; +\infty[$. Quelle est l'expression juste de f' (entourez la bonne réponse) :

- a) $f'(x) = \ln(a) - a \ln(x)$
- b) $f'(x) = x \ln(a) - \frac{x}{a}$
- c) $f'(x) = \ln(a) - \frac{a}{x}$
- d) $f'(x) = \frac{a}{x} - \ln(x)$
- e) $f'(x) = \ln(a) - \ln(x)$

4. Considérons l'équation $x^2 - ax + b = 0$ avec a et b nombres réels quelconques. Notons par X_1 et X_2 les deux racines de cette équation. Quelle est la proposition juste (entourez la bonne réponse) :

- | | | |
|---------------------|----|----------------|
| a) $X_1 + X_2 = a$ | et | $X_1 X_2 = b$ |
| b) $X_1 + X_2 = a$ | et | $X_1 X_2 = -b$ |
| c) $X_1 + X_2 = -a$ | et | $X_1 X_2 = -b$ |

- d) $X_1 + X_2 = -a$ et $X_1 X_2 = b$
 e) $X_1 + X_2 = a + b$ et $X_1 X_2 = ab$
5. La somme $S_n = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)}$ correspond à (entourez la bonne réponse) :
- a) $S_n = \frac{n}{n+1}$
 b) $S_n = \frac{n+1}{n+2}$
 c) $S_n = \frac{n}{(n+1)(n+2)}$
 d) $S_n = \frac{n^2}{n^2+1}$
 e) $S_n = \frac{1}{n^2+1}$
6. Notons par A l'ensemble de nombres naturels pouvant s'écrire sous la forme $4p+5q$ avec p et q nombres naturels. Quelle est la proposition juste (entourez la bonne réponse) :
- a) 15 n'appartient pas à l'ensemble A
 b) 14 n'appartient pas à l'ensemble A
 c) 13 n'appartient pas à l'ensemble A
 d) 12 n'appartient pas à l'ensemble A
 e) 11 n'appartient pas à l'ensemble A
7. Soit f une fonction réelle définie par $f(x) = |x^2 - x|$ pour x réel. Quelle est la proposition juste (entourez la bonne réponse) :
- a) $f(-3) = f(3)$
 b) Soit $x_n = f(1).f(2)...f(n)$ pour $n \in \mathbb{N}$. Alors $f(2004)=1$
 c) La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$
 d) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$
 e) La fonction f est convexe sur l'intervalle $]0 ; 1[$
8. $(u_n)_{n \geq 1}$ désigne une suite arithmétique de raison a et de terme initial u_1 .
 Si $u_1 = 5$ et que $a = -2$ alors $u_8 =$
- | | | | | |
|-----|----|----|---|----|
| -11 | -9 | 19 | 9 | 11 |
|-----|----|----|---|----|
9. $(u_n)_{n \geq 1}$ désigne une suite géométrique de raison a et de terme initial u_0 .
 Si $u_0 = 1/2$ et que $u_1 = 4$ alors $a =$
- | | | | | |
|---|---|---|----|----|
| 2 | 4 | 8 | 16 | 32 |
|---|---|---|----|----|
10. Soit f la fonction réelle définie sur $]0 ; +\infty[$ par : $f(x) = \ln(x)$. Une primitive de f est (entourez la bonne réponse) :
- a) $F(x) = x \ln(x) - x$
 b) $F(x) = \frac{1}{x}$
 c) $F(x) = x \ln(x) + x$
 d) $F(x) = \frac{x}{\ln(x)}$

e) $F(x) = x + \ln(x)$

Exercice 1 (3 points)

On désigne par P le polynôme défini par : $P(x) = x^3 - x^2 - 14x + 24$

- 1) Calculer $P(2)$
- 2) En déduire les solutions de l'équation $P(x) = 0$
- 3) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $P(x) < 0$

Exercice 2 (3 points)

Une entreprise emploie actuellement 14 femmes et 35 hommes. Elle souhaite recruter autant d'hommes que de femmes. La structure finale du personnel après recrutement doit être tel que le nombre total de femmes employées soit les $\frac{2}{3}$ du nombre total des hommes employés.

Quel est le nombre de personnes à embaucher (autant de femmes que d'hommes) ?

Problème (8 points)

Partie A

Soit g la fonction réelle définie sur $]0 ; +\infty[$ par : $g(x) = x^2 - 1 + 2 \ln(x)$

1. Déterminer les limites de la fonction g aux bornes de son intervalle de définition.
2. Etudier le sens de variation de g.
3. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet le nombre 1 comme unique solution sur $]0 ; +\infty[$
4. Déduire le signe de g(x) en fonction de x.

Partie B

Soit f la fonction réelle définie sur $]0 ; +\infty[$ par : $f(x) = \ln(x) - \frac{\ln(x)}{x^2}$

1. Montrer que pour tout x appartenant à $]0 ; +\infty[$, $f'(x)$ et g(x) sont de même signe.
2. Déterminer les limites de f aux bornes de son intervalle de définition.
3. Dresser le tableau de variation de f.
4. On note C_f la courbe représentative de f et Γ celle de la fonction $x \rightarrow \ln(x)$. Etudier la position de C_f par rapport à Γ .

Partie C

On considère la fonction h, définie sur $]0 ; +\infty[$ par : $h(x) = \frac{1 + \ln(x)}{x}$

1. Calculer $h'(x)$. En déduire une primitive sur $]0 ; +\infty[$ de la fonction $k(x) = \frac{\ln(x)}{x^2}$
2. Calculer l'aire délimitée par les droites d'équation $x = 1$; $x = 4$ et les courbes C_f et Γ