الأكاديمية الجهوية للتربية والتكوين
الجهة الشرقية - وجدة

الشعبة أو المسلك : ....

خاص بمصلحة الإمتحانات

34674

امتحان شهادة البكالوريا

مادة : ....

التقدير المفسر للنقطة

النقطة النهائية

$\frac{20}{20}$ على

المصحح وتوقيعه : وغليظو زبيدة

الورقة 1

التمرين الأول :

1) أ) لنبين أن * تبادلي :

لدينا : $\forall (x,y) \in \mathbb{Z}^2 : x * y = x + y - 2$
$= y + x - 2$
$= y * x$

إذن * تبادلي 0,25

لنبين أن (*) تجميعي :

لدينا : $\forall (x,y,z) \in \mathbb{Z}^3 : (x * y) * z = (x + y - 2) * z$
$= x + y + z - 4$
$= x + (y + z - 2) - 2$
$= x + (y * z) - 2$
$= x * (y * z)$

إذن القانون * تجميعي 0,25

ب) $(\mathbb{Z},*)$ يقبل عنصرا محايدا e $\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{Z} : x * e = x$
$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{Z} : x + e - 2 = x$
$\Rightarrow e - 2 = 0$
$\Leftrightarrow e = 2$

إذن $(\mathbb{Z},*)$ تقبل عنصرا محايدا : 2 0,25
(نكتفي ب $x * e = x$ لأن القانون * تبادلي)

ج) لنبين أن لكل عنصر x من $\mathbb{Z}$ يوجد x' من $\mathbb{Z}$ حيث
$x * x' = 2$

لدينا : $x * x' = 2 \Leftrightarrow x + x' - 2 = 2$
$\Leftrightarrow x' = 4 - x \in \mathbb{Z}$

إذن لكل عنصر x من $\mathbb{Z}$ يوجد $x' = 4 - x$ حيث $x * x' = 2$
ومنه لكل عنصر x من $\mathbb{Z}$ له مماثل في $\mathbb{Z}$ هو $x' = 4 - x$ 0,25

لدينا القانون * تجميعي وتبادلي في $\mathbb{Z}$ و $(\mathbb{Z},*)$ يقبل عنصرا محايدا هو 2 من $\mathbb{Z}$ وكل عنصر من $\mathbb{Z}$ يقبل مماثلا بالنسبة للقانون * هو $4 - x$; إذن $(\mathbb{Z},*)$ زمرة تبادلية

② ⓐ لنبين أن f تباينية

لدينا: $\forall(x,y)\in\mathbb{Z}^2 : f(x)=f(y) \Leftrightarrow x+2=y+2$
$\Leftrightarrow x=y$

إذن f تباينية

لنبين أن f شمولية

نعلم أن: f شمولية $\Leftrightarrow (\forall y\in\mathbb{Z})(\exists x\in\mathbb{Z}) : f(x)=y$

لدينا: $f(x)=y \Leftrightarrow x+2=y$
$\Leftrightarrow x=y-2$

إذن $(\forall y\in\mathbb{Z})(\exists x=y-2\in\mathbb{Z}) : f(x)=y$

ومنه f شمولية

لدينا f شمولية و تباينية إذن f تقابل من $\mathbb{Z}$ نحو $\mathbb{Z}$

لنبين أن f تشاكل

لدينا:

$\forall(x,y)\in\mathbb{Z}^2 : f(x)\top f(y)=(x+2)\top(y+2)$

$=(x+2)(y+2)-2(x+2)-2(y+2)+6$

$=xy+2x+2y+4-2x-4-2y-4+6$

$=xy+2$

$=f(x\times y)$

إذن $\forall(x,y)\in\mathbb{Z}^2 : f(x\times y)=f(x)\top f(y)$

ومنه f تشاكل من $(\mathbb{Z},\times)$ نحو $(\mathbb{Z},\top)$

وبما أن f تقابل فإن f تشاكل تقابلي من $(\mathbb{Z},\times)$ نحو $(\mathbb{Z},\top)$

0,5

ⓑ لدينا:

$(\forall(x,y,z)\in\mathbb{Z}^3) : (x\top z)*(y\top z)=(xz-2x-2z+6)*(yz-2y-2z+6)$

إذن $(x\top z)*(y\top z)=xy+yz-2x-2y-4z+10$
$=z(x+y-2)-2z-2(x+y-2)+6$
$=z\top(x*y)$

إذن T توزيعي بالنسبة لـ *

0,25

③ لدينا: ~~$(\mathbb{Z},+,\times)$ حلقة واحدية تبادلية إذن $(\mathbb{Z},\times)$~~

لدينا f تشاكل تقابلي من $(\mathbb{Z},\times)$ نحو $(\mathbb{Z},\top)$ و $(\mathbb{Z},\times)$

③ نعلم أن 1 هو العنصر المحايد في $(\mathbb{Z},\times)$ إذن e العنصر المحايد في $(\mathbb{Z},T)$ هو $e=f(1)=3$

لدينا: $x\times y = y\times x$ ، $\forall(x,y)\in\mathbb{Z}^2$

إذن: $f(x\times y) = f(y\times x)$

ومنه $f(x)\,T\,f(y) = f(y)\,T\,f(x)$ ، $\forall(x,y)\in\mathbb{Z}^2$

وبما أن f تقابلية فإن: $\forall(a,b)\in\mathbb{Z}^2 : aTb = bTa$

إذن T تبادلي في $\mathbb{Z}$.

لنبين أن T تجميعي:

لدينا: $(x\times y)\times z = x\times(y\times z)$ ، $\forall(x,y,z)\in\mathbb{Z}^3$

إذن: $f((x\times y)\times z) = f(x\times(y\times z))$

ومنه $\big(f(x)\,T\,f(y)\big)\,T\,f(z) = f(x)\,T\big(f(y)\,T\,f(z)\big)$ 0,75

وبما أن f تشاكل تقابلي من $(\mathbb{Z},\times)$ نحو $(\mathbb{Z},T)$ فإنه

$\forall(a,b,c)\in\mathbb{Z}^3 : (aTb)Tc = aT(bTc)$

إذن T تجميعي.

حسب ما سبق لدينا:

$$\left.\begin{array}{r} (\mathbb{Z},*) \text{ زمرة تبادلية} \\ T \text{ تجميعي وتوزيعي بالنسبة لـ } * \\ T \text{ يقبل عنصر محايد } 3 \\ T \text{ تبادلي} \end{array}\right\} \Rightarrow (\mathbb{Z},*,T) \text{ حلقة تبادلية وواحدية}$$

④ أ)

$$\begin{aligned} xTy = 2 &\iff xy - 2x - 2y + 6 = 2 \\ &\iff xy - 2x - 2y + 4 = 0 \\ &\iff (x-2)(y-2) = 0 \\ &\iff x = 2 \text{ أو } y = 2 \end{aligned}$$

0,25

ب) بما أن $xTy = 2 \iff x=2$ أو $y=2$ فإن $(\mathbb{Z},*,T)$ خالية من قواسم الصفر أي أنه لا يوجد عنصر x من $(\mathbb{Z},*,T)$ حيث $x\neq 2$ و $xTy=2$ 0,25

إذن $(\mathbb{Z},*,T)$ حلقة كاملة.

ج) نفترض أن $(\mathbb{Z},*,T)$ جسم، إذن كل عنصر من $(\mathbb{Z}\setminus\{2\},T)$ يقبل مماثل x'، أي $\exists x'\in\mathbb{Z}\setminus\{2\} : xTx' = 3$

أي $\exists y'\in\mathbb{Z}\setminus\{1\}$ (f تقابل) $f(y)\,T\,f(y') = f(1)$ 0,25

إذن $f(y\times y') = f(1)$

EXAMEN DU BACCALAUREAT

Note définitive
Sur........................

COMPOSITION DE ....

Appréciations expliquant la note chiffrée

Nom du correcteur et signature ....

ومنه $y.y' = 1$

اذن $y' = \frac{1}{y} \notin \mathbb{Z}$

اذن ليس كل عنصر من $(\mathbb{Z}, \{1\}, T)$ يقبل مماثل

ومنه $(\mathbb{Z}, *, T)$ ليس جسم

التمرين الثاني:

I ① لدينا Δ' مميز (E) يكتب على شكل

$$\Delta = (a(3+i\sqrt{3}))^2 - 4 \times 2 \times (1+i\sqrt{3})a^2$$

$$= a^2((3+i\sqrt{3})^2 - 8(1+i\sqrt{3}))$$

$$= a^2(9 - 3 + 6i\sqrt{3} - 8 - i8\sqrt{3})$$

$$= a^2(-2 - i2\sqrt{3})$$

$$= a^2((-1)^2 - i2\sqrt{3} \times (i\sqrt{3})^2)$$ 0,25

$$= a^2(-1+i\sqrt{3})^2$$

② لدينا Z_1 و Z_2 حلي (E) لدينا

$$Z_1 = \frac{(3+i\sqrt{3})a - (-1+i\sqrt{3})a}{4} = \frac{a}{4}(4) = a$$

و $$Z_2 = \frac{(3+i\sqrt{3})a + (-1+i\sqrt{3})a}{4}$$ 0,5

$$= \frac{a}{2}(1+i\sqrt{3})$$

II ① لدينا $$\frac{b-o}{a-o} = \frac{ae^{i\frac{\pi}{3}} - o}{a-o} = e^{i\frac{\pi}{3}}$$

اذن $$\frac{|b|}{|a|} = |e^{i\frac{\pi}{3}}| = 1$$

ومنه $|a| = |b|$ اذن $OA = OB$ اذن OAB متساوي الساقين

ولدينا $$\arg\left(\frac{b}{a}\right) \equiv \arg(e^{i\frac{\pi}{3}}) [2\pi]$$ 0,5

اذن $$\arg\left(\frac{b}{a}\right) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$$

ومنه $$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$$ اذن OAB مثلث متساوي الأضلاع

N.B: Il est interdit au candidat de signer sa composition ou d'y mettre un signe quelconque pouvant indiquer sa provenance.

امتحان شهادة البكالوريا

خاص بمصلحة الإمتحانات

مادة : ....

التقدير المفسر للنقطة

النقطة النهائية
على ....

إسم المصحح وتوقيعه : ....

الورقة 2

2) أ) لدينا $A_1 = r^{-1}(A)$ إذن

$$a_1 - z = e^{-i\frac{\pi}{3}}(a - z)$$

ومنه $a_1 = \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)a + z\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)$

إذن $a_1 = \left(\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)a + \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 0,25

لدينا $B_1 = r(B)$ إذن

$$b_1 - z = e^{i\frac{\pi}{3}}(b - z)$$

ومنه $b_1 = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)b + \left(1 - \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z$

$$= \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)b + \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z$$

$$= \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 a + \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z$$

$$= \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)a + \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z$$ 0,25

ب) لدينا

$$aff(\overrightarrow{B_1\Gamma}) = z - b_1$$

$$= z - \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)a + \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z$$

$$= \left(\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)a + \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z$$ 0,5

$$= a_1 = aff(\overrightarrow{OA_1})$$

إذن $\overrightarrow{OA_1} = \overrightarrow{B_1\Gamma}$ ومنه الرباعي $OA_1\Gamma B_1$ متوازي الأضلاع

3) أ) لدينا

$$\frac{z - b_1}{z - a_1} = \frac{z - (e^{i\frac{\pi}{3}}(z-b) + z)}{z - (e^{-i\frac{\pi}{3}}(z-a) + z)}$$

$$= \frac{(z-b)e^{i\frac{\pi}{3}}}{(z-a)e^{-i\frac{\pi}{3}}} = \frac{z-b}{z-a} \cdot e^{i\frac{2\pi}{3}}$$

$$= -\frac{z-b}{z-a} \cdot e^{-i\frac{\pi}{3}} = -\frac{z-b}{z-a} \times \frac{a}{b}$$ 0,1

$\frac{z-b_1}{z-a_1} \in \mathbb{R} \iff$ Π و A_1 و B_1 مستقيمية

$\iff \frac{z-b}{z-a} \times \frac{a}{b} \in \mathbb{R}$

$\iff \frac{z-b}{z-a} \div \frac{b-o}{b-a} \in \mathbb{R}$

$\iff$ Π و O و A و B متداورة

0,75

التمرين 3 :

1) أ) n يحقق الخاصية (R) إذن $3^n - 2^n \equiv 0 [n]$

ومنه $n / 3^n - 2^n$ أي $\exists k \in \mathbb{Z} : 3^n - 2^n = kn$

لدينا p هو أصغر قاسم أولي موجب لـ n أي p / n

إذن $\exists m \in \mathbb{Z} : n = mp$ ومنه $3^n - 2^n = k.m.p$

إذن أي أن $p / 3^n - 2^n$ $3^n - 2^n \equiv 0 [p]$

لنفترض أن $p \leq 3$ إذن $p = 3$ أو $p = 2$ (p أولي)

في حالة $p = 3$، لدينا: $3^n - 2^n \equiv 0 [3]$

أي $-2^n \equiv 0 [3]$

إذن $2^n \equiv 0 [3]$ غير ممكن

في حالة $p = 2$ لدينا $3^n - 2^n \equiv 0 [2]$

أي $3^n \equiv 0 [2]$

3 فردي أي 3^n فردي ومنه $3^n \not\equiv 0 [2]$

إذن $p \neq 3$ و $p \neq 2$

وبالتالي $p \geq 5$

0,75

ب) p أولي وأكبر من أو يساوي 5 إذن $p \wedge 2 = 1$

ومنه حسب مبرهنة فيرما لدينا $2^{p-1} \equiv 1 [p]$

p أولي و $p \geq 5$ إذن $p \wedge 3 = 1$ ومنه حسب مبرهنة

فيرما لدينا: $3^{p-1} \equiv 1 [p]$

0,5

ج) p هو أصغر قاسم لـ n، ولدينا $p - 1 < p$ إذن

$n \wedge (p-1) = 1$ ومنه حسب مبرهنة بوزو لدينا:

$\exists (x, y) \in \mathbb{Z}^2 ; \quad xn + y(p-1) = 1$

إذن $\exists (a, b) = (x, -y) \in \mathbb{Z}^2 : an - b(p-1) = 1$

0,5

③ لدينا: $an - b(p-1) = 1$ $\cancel{(q(p-1)+r)n}$

إذن: $(q(p-1)+r)n - b(p-1) = 1$

ومنه $rn = 1 + b(p-1) - qn(p-1)$

أي أن $rn = 1 + (p-1)(b - qn)$

ومنه $\exists k \in \mathbb{Z} ; \quad rn = 1 + k(p-1) \ / \ k = b - qn$

نفترض أن $k \in \mathbb{Z}^-$ إذن: $rn - k(p-1) \geq 0$

لدينا $k \neq 0$ لأن (غير ممكن : $k = 0 \Rightarrow rn = 1$)

إذن $-k \geq 1$

ومنه $-k(p-1) \geq (p-1)$

ونعلم أن $p - 1 \geq 4$ إذن $-k(p-1) \geq 4$ 0,5

ولدينا: $rn \geq 0$ إذن $rn - k(p-1) \geq 4$

تناقض مع كون $rn - k(p-1) = 1$

إذن $k \in \mathbb{N}$

وبالتالي $\exists k \in \mathbb{N} : \quad rn = 1 + k(p-1)$

④ نفترض أنه يوجد n يحقق الخاصية R و $n > 1$،

إذن حسب السؤال ① لدينا:

$\exists (r,k) \in \mathbb{N}^2 ; \quad rn = 1 + k(p-1)$

حيث p هو أصغر قاسم أولي موجب لـ n

~~ومنه~~ ولدينا $\begin{cases} 2^{p-1} \equiv 1[p] \\ 3^{p-1} \equiv 1[p] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2^{k(p-1)} \equiv 1[p] \\ 3^{k(p-1)} \equiv 1[p] \end{cases}$

إذن $\begin{cases} 2^{1+k(p-1)} \equiv 2[p] \\ 3^{1+k(p-1)} \equiv 3[p] \end{cases}$ أي أن $\begin{cases} 2^{rn} \equiv 2[p] \\ 3^{rn} \equiv 3[p] \end{cases}$ 0,75

ومنه $3^{rn} - 2^{rn} \equiv 1[p]$

بما أن n يحقق الخاصية R فإن $3^n - 2^n \equiv 0[p]$

ومنه $3^n \equiv 2^n [p]$

إذن $3^{rn} \equiv 2^{rn} [p]$

وبالتالي $3^{rn} - 2^{rn} \equiv 0[p]$

$\cancel{3^{rn} - 2^{rn} \equiv 1[p]}$ إذن $1 \equiv 0[p]$ تناقض ومنه لا يوجد

عدد صحيح طبيعي n أكبر قطعا من 1 يحقق الخاصية R

MINISTÈRE DE L'EDUCATION NATIONALE
ACADÉMIE RÉGIONALE D'EDUCATION ET DE FORMATION
REGION DE L'ORIENTAL - OUJDA

SERIE OU FILIERE: ....

Réservé au service des Examens

EXAMEN DU BACCALAUREAT

Note définitive
Sur.....................

COMPOSITION DE ....

Appréciations expliquant la note chiffrée

Nom du correcteur et signature ....

المسألة

الجزء الأول

① أ. لدينا:

$$\lim_{x\to 1^+} h(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{x-1}{x\ln(x)} = \lim_{x\to 1^+} \frac{1}{x} \times \frac{x-1}{\ln x}$$

لدينا: $\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$ إذن $\lim_{x\to 1^+} \frac{x-1}{\ln x} = 1$

ومنه $\lim_{x\to 1^+} \frac{x-1}{x\ln x} = \lim_{x\to 1^+} h(x) = 1 = h(1)$

إذن: h متصلة على اليمين في 1.

0,25

ب. نعتبر الدالة $f: x \mapsto \ln x - x + 1$ المعرفة على $[1,+\infty[$

f قابلة للاشتقاق على $[1,+\infty[$ ولدينا:

$$\forall x\in[1,+\infty[\quad f'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x} \leq 0$$

إذن f تناقصية قطعا على $[1,+\infty[$ ومنه لدينا:

$\forall x > 1 \quad f(x) < 1$

أي $\forall x > 1 \quad \ln(x) - x + 1 < 0$

ومنه $\forall x > 1 \quad \ln(x) < x - 1$

لدينا: $x \mapsto \frac{1}{\ln x}$ قابلة للاشتقاق على $]1,+\infty[$ و $x \mapsto \frac{x-1}{x}$ قابلة للاشتقاق على $]1,+\infty[$ إذن h قابلة للاشتقاق على $]1,+\infty[$ ولدينا:

0,75

$$\forall x > 1: h'(x) = \left(\frac{x-1}{x\ln x}\right)' = \frac{x\ln x - (x-1)(1+\ln x)}{(x\ln x)^2} = \frac{+\ln x - x + 1}{(x\ln x)^2} < 0$$

امتحان شهادة البكالوريا

خاص بمصلحة الإمتحانات

النقطة النهائية 20 على 20

مادة : ....

التقدير المفسر للنقطة

اسم المصحح وتوقيعه : ....

الورقة 3

مسألة (تتمة)

الجزء الأول

1) ب) لدينا $\forall x>1 \; h'(x)<0$ إذن h تناقصية قطعا على $]1,+\infty[$

2) أ) $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{x-1}{x}\right) \times \frac{1}{\ln x}$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} \left(1-\frac{1}{x}\right) \times \frac{1}{\ln x} = 0$

0,5

ومنه جدول التغيرات الآتي:

x	1	$+\infty$
$h'(x)$	$\|\|$ —	
$h(x)$	1 ↘	0

ب) حسب السؤال السابق (انطلاقا من جدول التغيرات) لدينا

~~$\forall x \in [1,+\infty[\quad 0<h(x)\leq 1$~~

$\forall x>1, \quad h(x)>0$ و $h(x)<1$

و $h(1)=1$

إذن $\forall x>1 \quad 0<h(x)<1$

و $h(1)=1$

إذن $\forall x\geq 1 \quad 0<h(x)\leq 1$

0,25

الجزء الثاني

1) أ- لدينا $\forall x>1, \int_x^{x^2} \frac{1}{t\ln t}\,dt = \int_x^{x^2} \frac{\frac{1}{t}}{\ln t}\,dt$

$= [\ln(\ln t)]_x^{x^2}$

$= \ln(\ln(x^2)) - \ln(\ln x)$

$= \ln(2\ln x) - \ln(\ln x)$

$\forall x>1 ;\ \int_x^{x^2} \frac{1}{t\ln t}\,dt = \ln\left(\frac{2\ln x}{\ln x}\right) = \ln 2$ ومنه: 0,5

ب) لدينا:

$$\forall x>1 ;\ g(x)-\ln 2 = \int_x^{x^2} \frac{1}{\sqrt{t}\,\ln t}\,dt - \int_x^{x^2} \frac{1}{t\ln t}\,dt$$

$$= \int_x^{x^2} \left(\frac{1}{\sqrt{t}\,\ln t} - \frac{1}{t\ln t}\right) dt$$

$$= \int_x^{x^2} \frac{\sqrt{t}-1}{t\ln t}\,dt$$ 0,25

ج) لدينا: $\forall x>1 ;\ g(x)-\ln 2 = \int_x^{x^2} \frac{\sqrt{t}-1}{t\ln t}\,dt$

نضع $u=\sqrt{t}$ أي $u^2=t$ إذن $dt = 2u\,du$

و $t=x^2 \Rightarrow u=x$

$t=x \Rightarrow u=\sqrt{x}$

ومنه: $\forall x>1 ;\ g(x)-\ln 2 = \int_{\sqrt{x}}^{x} \frac{u-1}{u^2\ln(u^2)} \times 2u\,du$

$$= \int_{\sqrt{x}}^{x} \frac{2(u-1)}{2u\ln u}\,du$$ 0,5

$$= \int_{\sqrt{x}}^{x} \frac{u-1}{u\ln u}\,du = \int_{\sqrt{x}}^{x} \frac{t-1}{t\ln t}\,dt$$

2) أ) لدينا:

$(\forall x>1)\ (\forall t\in[\sqrt{x}, x])$

$$\sqrt{x} \leq t \leq x \Rightarrow h(x) \leq h(t) \leq h(\sqrt{x})$$

$$\Rightarrow \int_{\sqrt{x}}^{x} h(x)\,dt \leq \int_{\sqrt{x}}^{x} h(t)\,dt \leq \int_{\sqrt{x}}^{x} h(\sqrt{x})\,dt$$

$$\Leftrightarrow h(x)\int_{\sqrt{x}}^{x} dt \leq \int_{\sqrt{x}}^{x} \frac{t-1}{t\ln t}\,dt \leq h(\sqrt{x})\int_{\sqrt{x}}^{x} dt$$

$$\Leftrightarrow (x-\sqrt{x})\,h(x) \leq g(x)-\ln 2 \leq h(\sqrt{x})(x-\sqrt{x})$$

ومنه $\forall x>1 ;\ (x-\sqrt{x})\,h(x) \leq g(x)-\ln(2) \leq h(\sqrt{x})(x-\sqrt{x})$ 0,5

ب- لدينا

$$\lim_{x\to1^+}\frac{(x-\sqrt{x})h(x)}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{(x-1)(x-\sqrt{x})}{x\ln x(x-1)}$$

$$\cancel{=\lim_{x\to1^+}\left(\frac{x-1}{\ln x}\right)\left(1-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)}$$

$$=\lim_{x\to1^+}\frac{x-\sqrt{x}}{x\ln x}$$

$$=\lim_{x\to1^+}\frac{1}{\sqrt{x}}\times\frac{\sqrt{x}-1}{2\ln(\sqrt{x})}$$

لدينا: $\lim_{x\to1^+}\frac{x-1}{\ln x}=1 \Rightarrow \lim_{x\to1^+}\frac{\sqrt{x}-1}{\ln\sqrt{x}}=1$ ($t=\sqrt{x}$ نضع)

إذن: $\lim_{x\to1^+}\frac{(x-\sqrt{x})h(x)}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{1}{\sqrt{x}}\cdot\frac{\sqrt{x}-1}{2\ln(\sqrt{x})}=(2)^{-1}=\frac{1}{2}$

لدينا: $\lim_{x\to1^+}\frac{(x-\sqrt{x})h(\sqrt{x})}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{(x-\sqrt{x})(\sqrt{x}-1)}{(x-1)\sqrt{x}\ln\sqrt{x}}$

$$=\lim_{x\to1^+}\frac{(x-\sqrt{x})(\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)\ln\sqrt{x}}$$

$\left(\lim_{x\to1^+}\frac{\sqrt{x}-1}{\ln\sqrt{x}}=1 \text{ لأن}\right)$ $=\lim_{x\to1^+}\frac{\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}+1)\ln\sqrt{x}}=\frac{1}{2}$ 0,5

لدينا: $\lim_{x\to1^+}\frac{(x-\sqrt{x})h(x)}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{(x-\sqrt{x})h(\sqrt{x})}{x-1}=\frac{1}{2}$

إذن: $\lim_{x\to1^+}\frac{g(x)-\ln 2}{x-1}=\frac{1}{2}$

ومنه g قابلة للاشتقاق في 1 على اليمين و $g'_d(1)=\frac{1}{2}$

ج- لدينا: $\lim_{x\to+\infty}(x-\sqrt{x})h(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{(x-\sqrt{x})(x-1)}{x\ln x}$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\ln x}\cdot\left(\left(1-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\left(\frac{x-1}{x}\right)\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\ln x}\cdot\left(1-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\left(1-\frac{1}{x}\right)$$

لدينا: $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0 \Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\ln x}=\pm\infty$

لدينا $\frac{x}{\ln x}>0$ $(\forall x>1)$ إذن $\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\ln x}=+\infty$

EXAMEN DU BACCALAUREAT

Note définitive
Sur........................

COMPOSITION DE ....

Appréciations expliquant la note chiffrée

Nom du correcteur et signature ....

$\lim_{x\to+\infty} (x-\sqrt{x})\ln(x) = +\infty$ إذن

و منه $\lim_{x\to+\infty} (x-\sqrt{x})h(x) + \ln 2 = +\infty$

لدينا $\forall x>1 \quad (x-\sqrt{x})h x + \ln 2 \leq g(x)$

إذن $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$

لدينا $\lim_{x\to+\infty} \frac{(x-\sqrt{x})}{x} \cdot h(x) + \frac{\ln 2}{x} = \lim_{x\to+\infty} \left(1-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)h(x) + \frac{\ln 2}{x}$

0,75

$= 0+0=0$

و لدينا $\forall x>1 \; \frac{(x-\sqrt{x})h x + \ln 2}{x} \leq \frac{g(x)}{x}$

إذن $\lim_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{x} = 0$

3 أ) لدينا $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}\ln x}$ متصلة على $]1,+\infty[$ إذن

تقبل دالة أصلية على $]1,+\infty[$ نسميها H

لدينا $\forall x>1 \; g(x) = H(x^2) - H(x)$

لدينا $x\mapsto x^2$ و $x\mapsto x$ قابلتان للاشتقاق على

$]1,+\infty[$ و $u(]1,+\infty[) = v(]1,+\infty[) =]1,+\infty[$

إذن g قابلة للاشتقاق على $]1,+\infty[$ و لدينا

$\forall x>1 \; g'(x) = H'(x^2) - H'(x)$

$= 2x \times \frac{1}{x\ln x^2} - \frac{1}{\sqrt{x}\ln x}$

0,75

$= \frac{1}{\ln x} - \frac{1}{\sqrt{x}\ln x} = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}\ln x}$

$= \frac{1}{2}h(\sqrt{x})$

ب) لدينا $\forall t>1 \; 0 < h(t) \leq 1$

إذن نضع $t=\sqrt{x}$ لدينا $\forall x>1 \; 0 < h(\sqrt{x}) \leq 1$

N.B: Il est interdit au candidat de signer sa composition ou d'y mettre un signe quelconque pouvant indiquer sa provenance.

امتحان شهادة البكالوريا

خاص بمصلحة الإمتحانات

النقطة النهائية
على ....

مادة : ....

التقدير المفسر للنقطة

اسم المصحح وتوقيعه : ....

مسألة : (تتمة) الورقة: 4

الجزء الثاني :

③ ب) لدينا : $\forall x > 1,\quad 0 < h(\sqrt{x}) < 1 \Longrightarrow 0 < \frac{1}{2} h(\sqrt{x}) < \frac{1}{2}$

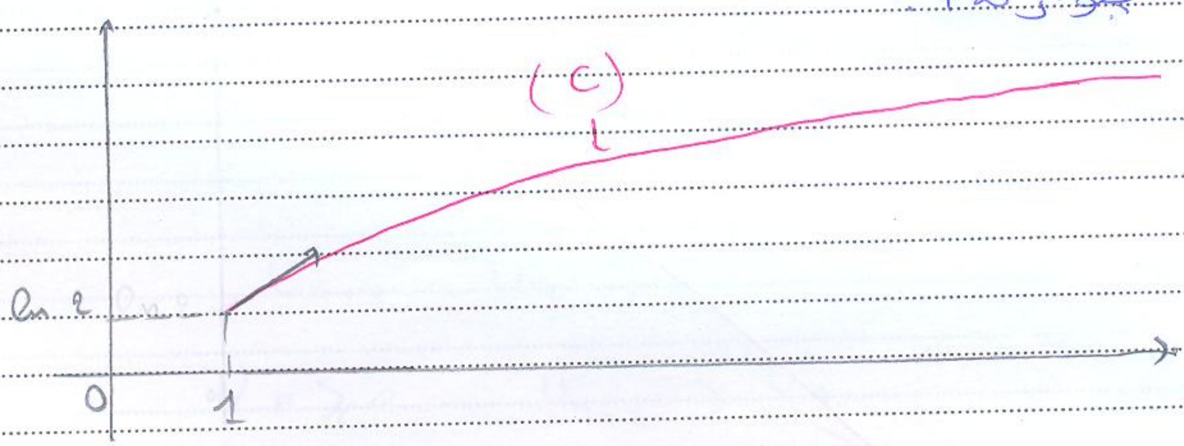
إذن : $\forall x > 1 \quad 0 < g'(x) \leq \frac{1}{2}$ 0,5

ومنه جدول التغيرات التالي :

x	1 $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
$g'(x)$	$+$
$g(x)$	$\ln 2$ $\nearrow$ $+\infty$

ج) لدينا $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{g(x)}{x} = 0$

إذن (C) يقبل فرعا شلجميا باتجاه محور الأفاصيل بجوار $+\infty$.



يمنع على المترشح أن يمضي ورقته أو يجعل أية علامة يمكنها أن تبين أصله

<u>الجزء الثالث:</u>

I - ⓐ k متصلة وقابلة للاشتقاق على $[1,+\infty[$ ولدينا:

$$\forall x > 1 \; ; \; k'(x) = g'(x) - 1 < 0$$

و $k'_d(1) = -\frac{1}{2} < 0$

إذن k تناقصية قطعا على $[1,+\infty[$ ومنه k تقابل من $[1,+\infty[$ نحو $k([1,+\infty[) = k([1,+\infty[)$

لدينا:

$$\lim_{x\to+\infty} (x-\sqrt{x})h(x) - x = \lim_{x\to+\infty} \frac{(x-\sqrt{x})(x-1)}{x\ln x} - x$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(1-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)(x-1) - x\ln x}{\ln x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x - 1 - \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} - x\ln x}{\ln x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\ln x}\left(1 - \frac{1}{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{(\sqrt{x})^3} - \ln x\right)$$

$$= "+\infty \times -\infty" = -\infty$$

إذن:

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) - \ln(2) - x = -\infty$$

ومنه:

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) - x = -\infty$$

وبالتالي فإن:

$$k([1,+\infty[) =]-\infty, \ln 2]$$

② لدينا h تقابل من $[1,+\infty[$ نحو $]-\infty,\ln 2]$ إذن
$(\forall y\in]-\infty,\ln 2])\ (\exists!\, x\in[1,+\infty[) : h(x)=y$
من أجل $y=0$ لدينا:
$\exists!\,\alpha\in[1,+\infty[: h(\alpha)=0$
أي $\exists!\,\alpha\in[1,+\infty[\quad g(\alpha)+1-\alpha=0$
إذن $\exists!\,\alpha\in[1,+\infty[\quad g(\alpha)+1=\alpha$

0,25

II - ① أ. لنبين بالتراجع أن $\forall n\geq 0 : 1\leq U_n<\alpha$

من أجل $n=0$ لدينا: $1\leq U_0<\alpha$

نفترض أن العلاقة السابقة محققة من أجل $n\in\mathbb{N}$
ولنبين أنها كذلك من أجل $n+1$
لدينا: $1\leq U_n<\alpha$

إذن $g(1)\leq g(U_n)<g(\alpha)$

ومنه $1\leq 1+\ln 2\leq 1+g(U_n)<1+g(\alpha)$

أي $1\leq U_{n+1}<\alpha$

وبالتالي فإن $\forall n\geq 0 \quad 1\leq U_n<\alpha$

0,5

ب) لدينا لكل $n\in\mathbb{N}$: $U_{n+1}-U_n=g(U_n)+1-U_n$
$=h(U_n)$

0,5

ولدينا $1\leq U_n<\alpha$

إذن $0<h(U_n)\leq \ln 2$

ومنه $U_{n+1}-U_n>0$

أي $\forall n\geq 0 \quad U_{n+1}>U_n$

وبالتالي $(U_n)_{n\geq 0}$ تزايدية قطعا

EXAMEN DU BACCALAUREAT

Note définitive
Sur........................

COMPOSITION DE ....

Appréciations expliquant la note chiffrée

Nom du correcteur et signature ....

3) لدينا $(U_n)_{n\geq 0}$ تزايدية ومكبورة بـ α إذن فهي متقاربة

لدينا الدالة $1+g(x)$ متصلة و $f([1,\alpha[) \subset [1,\alpha[$

و $\forall n\geq 0 : U_{n+1} = f(U_n)$ و $U_0 \in [1,\alpha[$

و $\lim U_n = l$ إذن $f(l) = l$

أي أن $1+g(l) = l$

وحسب السؤال السابق (I – 1 ب) $f(\alpha) = \alpha$ إذن $l = \alpha$

ومنه $\lim U_n = \alpha$

0.75

4) أ- لدينا $\forall x \in [1,\alpha[, f'(x) = g'(x) \leq \frac{1}{2}$

لنبين أن

$\forall (x,y) \in ([1,\alpha])^2 ;$ $|f(x) - f(y)| \leq \frac{1}{2}|x-y|$

نعتبر x و y من $[1,\alpha]$

نفترض أن $y \geq x$ لدينا

f متصلة على $[x,y]$ و قابلة للاشتقاق على $]x,y[$

ولدينا $\forall c \in [x,y] : f'(c) \leq \frac{1}{2}$ إذن حسب متفاوتة التزايدات

المنتهية نجد أن $|f(y) - f(x)| \leq \frac{1}{2}|x-y|$

بالمثل إذا كان $x \geq y$ نجد أن

$|f(x) - f(y)| \leq \frac{1}{2}|x-y|$

01

ومنه من أجل $x = U_n$ و $y = \alpha$ لدينا :

$|f(U_n) - f(\alpha)| \leq \frac{1}{2}|U_n - \alpha|$

إذن $|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|U_n - \alpha|$

N.B: Il est interdit au candidat de signer sa composition ou d'y mettre un signe quelconque pouvant indiquer sa provenance.

الأكاديمية الجهوية للتربية والتكوين
الجهة الشرقية - وجدة

امتحان شهادة البكالوريا

خاص بمصلحة الإمتحانات

مادة :

التقديـر المفسـر للنقطـة

النقطة النهائية
على

اسم المصحح وتوقيعه :

الورقة 5

مسألة (تتمة)

الجزء الثالث

3) ب- لنبين بالترجع أن $|U_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |U_0 - \alpha| \quad \forall n \in \mathbb{N}$

لدينا من أجل $n = 0$ $\quad |U_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^0 |U_0 - \alpha|$

نفترض أن هذه العلاقة صحيحة من أجل n ولنبين أنها كذلك من أجل $n+1$

لدينا، $\begin{cases} |U_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |U_0 - \alpha| \\ |U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2} |U_n - \alpha| \end{cases}$ و

0,5

إذن، $|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n |U_0 - \alpha|$

ومنه $|U_{n+1} - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} |U_0 - \alpha|$

وبالتالي $|U_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |U_0 - \alpha| \quad \forall n \in \mathbb{N}$

ج) لدينا $0 < \frac{1}{2} < 1$ إذن، $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$

و $|U_0 - \alpha|$ إذن، $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n |U_0 - \alpha| = 0$

0,5

وبالتالي فإن $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n - \alpha = 0$

هذا يعني أن $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = \alpha$