Suites numériques
المتتاليات العددية

I. Définitions – Exemples et Notations: | تعريفات أمثلة وترميز : .I

.1 تعريف: كل تطبيق من I نحو IR بحيث $(I \subset IN)$، يسمى متتالية عددية.
نرمز للمتتالية المعرفة من I نحو IR بالرمز $(U_n)_{n\in I}$ ونرمز لصورة عدد ما p من I بالرمز U_p ويسمى الحد العام للمتتالية $(U_n)_{n\in I}$.
إذا كان p_0 هو أول عنصر من I فإن الحد U_{p_0} يسمى الحد الأول للمتتالية $(U_n)_{n\in I}$

.2 أمثلة:

المثال 1: نعتبر المتتالية $(U_n)_{n\in IN}$ بحيث : $U_n = \dfrac{\sqrt{n+2}}{n^2+1}$.

هذه المتتالية معرفة على IN، حدها العام هو $U_n = \dfrac{\sqrt{n+2}}{n^2+1}$ وحدها الأول هو $U_0 = \sqrt{2}$

ويمكن أن نحسب قيمة أي حد بشكل مباشر ، حيث نعوض مباشرة في صيغة الحد العام مثلا:

$U_1 = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ، $U_2 = \dfrac{2}{5}$ ، $U_7 = \dfrac{3}{50}$ ، $U_{15} = \dfrac{\sqrt{17}}{226}$ ، $U_{1000} = \dfrac{\sqrt{1002}}{1000001}$ الخ ...

المثال 2: نعتبر المتتالية $(U_n)_{n\in IN}$ المعرفة كما يلي : $\begin{cases} U_0 = 2 \\ (\forall n \in IN)\ ;\ U_{n+1} = 2U_n - 5 \end{cases}$.

هذه المتتالية معرفة على IN، حدها الأول هو $U_0 = 2$ وحدها العام هو U_n لكن صيغته غير محددة مباشرة بدلالة n . لكن المتتالية محددة بواسطة علاقة بين الحد U_n والحد الموالي U_{n+1} وهي : $U_{n+1} = 2U_n - 5$.

هنا لا يمكن أن نحسب قيمة أي حد بشكل مباشر ، حيث لا بد من الرجوع الى البداية حيث:

$U_0 = 2$
ثم نحدد $U_1 = 2U_0 - 5 = 4 - 5 = -1$
ثم نحدد $U_2 = 2U_1 - 5 = -2 - 5 = -7$
ثم نحدد $U_3 = 2U_2 - 5 = -14 - 5 = -19$
الخ ...

نقول أن المتتالية $(U_n)_{n\in IN}$ متتالية ترجعية $(U_n)_{n\in IN}$ est une suite récurrente .

II. Propriétés des suites : | خصائص المتتاليات : .II

.1 تغيرات متتالية:

- ✓ $(U_n)_{n\in I}$ تزايدية على I يعني $\forall n \in I\ ;\ U_n \prec U_{n+1}$
- ✓ $(U_n)_{n\in I}$ تناقصية على I يعني $\forall n \in I\ ;\ U_{n+1} \prec U_n$
- ✓ $(U_n)_{n\in I}$ ثابتة على I يعني $\forall n \in I\ ;\ U_{n+1} = U_n$

أمثلة:

المثال 1: أدرس تغيرات المتتالية بحيث : $U_n = \sqrt{n^2+3}$.

لدينا :
$$U_{n+1} - U_n = \sqrt{(n+1)^2+3} - \sqrt{n^2+3}$$
$$U_{n+1} - U_n = \frac{(n+1)^2+3-(n^2+3)}{\sqrt{(n+1)^2+3}+\sqrt{n^2+3}} = \frac{2n+1}{\sqrt{(n+1)^2+3}+\sqrt{n^2+3}} \succ 0$$

Suites numériques
المتتاليات العددية

نستنتج أن المتتالية $(U_n)_{n\in IN}$ تزايدية على IN.

المثال 2: أدرس تغيرات المتتالية $(U_n)_{n\in IN}$ المعرفة كما يلي : $\begin{cases} U_0 = 2 \\ (\forall n\in IN)\ ;\ U_{n+1} = U_n - 5 \end{cases}$.

لدينا : $U_{n+1} - U_n = U_n - 5 - U_n = -5 \prec 0$
نستنتج أن المتتالية $(U_n)_{n\in IN}$ تناقصية على IN.

2. المتتالية المكبورة والمتتالية المصغورة:

- ✓ $(U_n)_{n\in I}$ مكبورة بالعدد M على I يعني $\forall n\in I\ ;\ U_n \le M$
- ✓ $(U_n)_{n\in I}$ مصغورة بالعدد m على I يعني $\forall n\in I\ ;\ m \le U_n$
- ✓ $(U_n)_{n\in I}$ محصورة بين m و M على I يعني $\forall n\in I\ ;\ m \le U_n \le M$

مثال:

نعتبر المتتالية $(U_n)_{n\in IN}$ المعرفة كما يلي : $U_n = -3 + \dfrac{1}{n^2+1}$.

لدينا مهما يكن n من IN : $1 \le n^2+1$ إذن $0 \prec \dfrac{1}{n^2+1} \le 1$ وبالتالي $-3 \prec U_n \le -2$

نستنتج أن المتتالية $(U_n)_{n\in IN}$ محصورة على IN.

III. Suites Arithmétiques et Géométriques : | III. المتتاليات الحسابية و المتتاليات الهندسية: :

1. تعريفات:

✓ نقول أن $(U_n)_{n\in I}$ متتالية حسابية ، إذا وجد عدد حقيقي r مستقل عن n بحيث :

$$\forall n\in I\ ;\ U_{n+1} = U_n + r$$

العدد r يسمى أساس المتتالية الحسابية $(U_n)_{n\in I}$

✓ نقول أن $(U_n)_{n\in I}$ متتالية هندسية ، إذا وجد عدد حقيقي q مستقل عن n بحيث :

$$\forall n\in I\ ;\ U_{n+1} = q\,U_n$$

العدد q يسمى أساس المتتالية الحسابية $(U_n)_{n\in I}$

2. تغيرات المتتالية الحسابية:

لدينا $\forall n\in I\ ;\ U_{n+1} - U_n = r$ نستنتج أن:

$(U_n)_{n\in I}$ تزايدية يعني $r \succ 0$
$(U_n)_{n\in I}$ تناقصية يعني $r \prec 0$
$(U_n)_{n\in I}$ ثابتة يعني $r = 0$

Suites numériques
المتتاليات العددية

3. *تغيرات المتتالية اهندسية:*

هناك عدة حالات :

إذا كان $q \prec 0$: فإن المتتالية ليست تزايدية ولا تناقصية، نقول في هذه الحالةأن $(U_n)_{n\in I}$ متناوبة

إذا كان $q = 0$: فإن المتتالية $(U_n)_{n\in I}$ تكون منعدمة وبالتالي فهي ثابتة انطلاقا من الحد الثاني

إذا كان $0 \prec q \prec 1$: فإن المتتالية $(U_n)_{n\in I}$ تكون تناقصية

إذا كان $q = 1$: فإن المتتالية $(U_n)_{n\in I}$ تكون ثابتة

إذا كان $1 \prec q$: فإن المتتالية $(U_n)_{n\in I}$ تكون تزايدية

4. *أهم قواعد وطرق المتتاليات الحسابية والهندسية من خلال الجدول التالي:*

	المتتاليات الحسابية	المتتاليات الهندسية
تحديد طبيعة المتتالية	$U_{n+1} = U_n + r$	$U_{n+1} = q\,U_n$
حساب U_n بدلالة n	$U_n = U_p + (n-p)r$	$U_n = q^{n-p} \times U_p$
$S_n = U_p + U_{p+1} + \dots + U_n$	$S_n = \frac{n-p+1}{2}\left(U_p + U_n\right)$	$S_n = U_p \frac{q^{n-p+1} - 1}{q-1}$