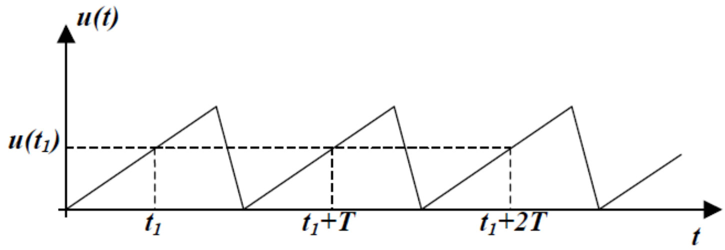
I. Grandeurs variables périodiques



1. Définition

Une grandeur analogique (tension ou intensité) est dite **périodique** si sa courbe représentative se reproduit identique à elle-même de manière cyclique.

2. Période

La période d'une grandeur périodique est l'intervalle de temps **T** qui sépare deux instants consécutifs où la grandeur se reproduit identique à elle-même. La période se note **T** et s'exprime en seconde (**s**).

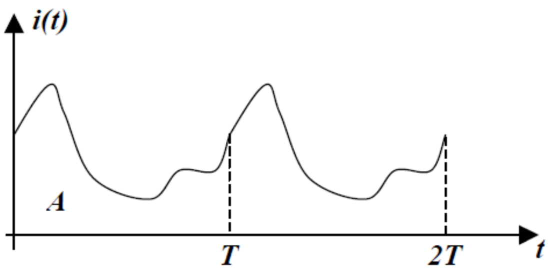
3. Fréquence

La fréquence est le nombre de cycles (motifs) décrits par la grandeur en une seconde.
La fréquence se note ***f*** et s'exprime en en **Hertz (Hz)**.
La fréquence s'exprime en fonction de la période par la relation suivante : $f = 1/T$

4. Valeur instantanée

La valeur instantanée est une grandeur *variable* est la valeur qu'elle prend à tout instant ; on la note par une minuscule : ***u(t)*** ou ***u***.

5. Valeur moyenne



On dispose d'une intensité périodique **i(t)** de période **T**.
Pendant une période **T**, le courant périodique **i** transporte la quantité d'électricité **Q** (cette quantité d'électricité représente l'aire **A** entre la courbe et l'axe des abscisses)
La même quantité d'électricité peut être transportée par un courant d'intensité constante **<i>ou** $\bar{i}$ avec $\bar{i} = A/T$

Mesure

Pour mesurer la valeur moyenne d'une tension ou de l'intensité d'un courant on utilise des appareils à aiguille ***magnétoélectriques*** en position ***DC***, ou des appareils numériques en position ***DC***.

Signal alternatif

Un signal est dit **alternatif** si sa valeur moyenne est **nulle**.

6. Valeur efficace

On appelle intensité efficace, notée **I**, du courant variable **i**, l'intensité du courant continu qui dissiperait la même énergie dans la même résistance pendant la même durée.
On peut montrer que : $I = \sqrt{\overline{i^2(t)}}$

I est la valeur efficace en ampères (**A**) **i** est la valeur instantanée en ampères (**A**).

Mesure

Pour mesurer la valeur efficace d'une tension ou de l'intensité d'un courant on utilise des appareils à aiguille ***ferromagnétiques***, ou des appareils numériques ***RMS*** (ou ***TRMS***) en position ***AC***.

II. Grandeurs périodiques sinusoïdales

1. Définitions

L'expression temporelle de la tension est :

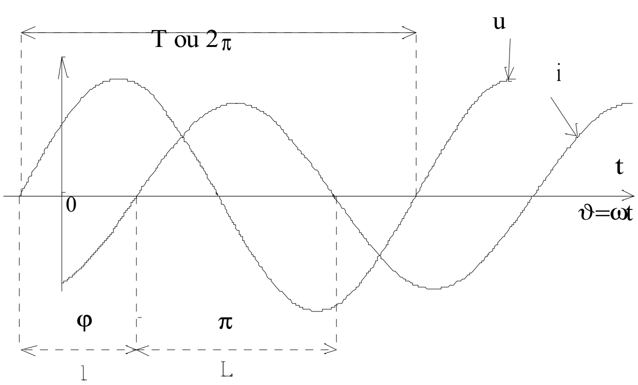
$$u(t) = \hat{U}.\sin(\omega t+\varphi_u)$$
$$u(t) = U\sqrt{2}\sin(\omega t+\varphi_u).$$

L'expression temporelle du courant est :

$$i(t) = \hat{I}.\sin(\omega t+\varphi_i)$$
$$i(t) = I\sqrt{2}\sin(\omega t+\varphi_i).$$

u, i sont les ***valeurs instantanées*** de la tension et du courant.
$\hat{U}$, $\hat{I}$ ***sont les valeurs maximales ou amplitudes de u et i.***
U, I ***sont les valeurs efficaces de u et i.***
ω ***est la pulsation ou vitesse angulaire en rad/s***
$\omega = 2.\pi.f = 2.\pi/T$ *avec* $f = 1/T$ ***: fréquence en Hertz*** (Hz)
et T ***période en seconde*** (s).
$\omega t+\varphi_i$ ou $\omega t+\varphi_u$ ***est la phase à l'instant t exprimée en radian.***
φ_i, φ_u ***est la phase à l'origine.(t=0)***

2. Représentation instantanée.



- *$\varphi = \varphi_u - \varphi_i$ **est le déphasage entre u et i***
- *On mesure le déphasage à l'oscilloscope : règle de 3 :*

$$\varphi\ (rad) = l.\pi / L$$

$$\varphi\ (°) = l.180 / L.$$

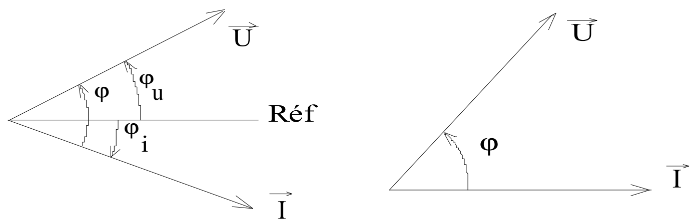
3. Représentation vectorielle de Fresnel.

$u = U\sqrt{2}\sin(\omega t+\varphi_u)$.

$\vec{U}$: module **U** et phase φ_u → $\vec{U}$ **(U, φ_u)**

$i = I\sqrt{2}\sin(\omega t+\varphi_i)$

$\vec{I}$: module I et phase φ_i → $\vec{I}$ **(I, φ_i)**



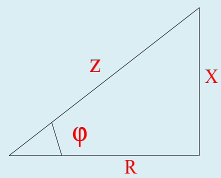
si $\vec{I}$ référence $\varphi_i = 0 \Rightarrow \varphi = \varphi_u - \varphi_i = \varphi_u$

Somme de grandeurs sinusoïdales : $u = u_1+u_2 \Rightarrow \vec{U} = \vec{U_1} + \vec{U_2}$ ou $i = i_1+i_2 \Rightarrow \vec{I} = \vec{I_1} + \vec{I_2}$

4. Représentation complexe .

Rappels sur les complexes .

- $\underline{Z} = [Z;\theta] = [a + jb]$ **Z** module, **θ** argument, **a** partie réelle, b partie imaginaire
- $Z = [Z,\theta] = Z\cos\theta + j\,Z\sin\theta$ et $Z = a + jb = [\sqrt{a^2+b^2}\,;\ \theta = \mathrm{arctg}(b/a)]$.
- Addition $\underline{Z} = \underline{Z_1} + \underline{Z_2} = (a_1 + a_2) + j\,(b_1 + b_2)$.
- multiplication $\underline{Z} = \underline{Z_1}.\underline{Z_2} = [Z1.Z2;\ \theta_1+\theta_2]$ θ_1 et θ_2 arguments de $\underline{Z_1}$ et $\underline{Z_2}$.
- Division $\underline{Z} = \underline{Z_1}/\underline{Z_2} = [Z1/Z2;\ \theta_1-\theta_2]$.



Utilisation en électricité : **u ⇒ $\underline{U}$ = [U; φu] et i ⇒ $\underline{I}$ = [I; φi]**

Si i est la référence alors φi = 0 et φu = φ ⇒ $\underline{I} = [I;0]$ et $\underline{U} = [U;\ \varphi]$

$\underline{U} = U\cos\varphi + j\,U\sin\varphi = a + jb = [\sqrt{a^2+b^2}\,;\ \varphi = \mathrm{arctg}\,(b/a)]$.

5. Dipôles élémentaires passifs linéaires.

Un dipôle élémentaire peut être une résistance, une bobine parfaite ou un condensateur

Les Dipôles élémentaires	*relation instantanée*	*Tension efficace*	*Déphasage φ*	*Tension complexe*	*Impédance complexe*
La Résistance R	***u =R.i***	***U=R.I***	***0***	***$\underline{U}$ = R.$\underline{I}$***	***$\underline{Z_R}$=R***
L'inductance L	***u =Ldi/dt***	***U=LωI***	***π/2***	***$\underline{U}$ = jLω$\underline{I}$***	***$\underline{Z_L}$ =jLω***
Le condensateur C	***u = Cdi/dt***	***U= I/Cω***	***-π/2***	***$\underline{U}$ = - jI/Cω***	***$\underline{Z_c}$ = -j/Cω***

6. Modèle équivalent d'un dipôle passifs linéaire .

6.1. Modèle série : **Impédance : Z = $\underline{U}/\underline{I}$ = R + jX = [Z ;φ]**

R : *partie réelle de* $\underline{Z}$ → ***résistance en ohm*** , X ***: partie imaginaire de*** $\underline{Z}$ → ***réactance en ohm***

$Z = U/I = \sqrt{R^2+X^2}$ → ***Impédance en ohm*** et φ tel que **tan φ = X/R**

$\varphi = \varphi u - \varphi i = \arg\underline{U} - \arg\underline{I} = \arg\underline{Z}$ $\varphi = (\vec{I},\vec{U})$ déphasage de i sur u

Groupement série	R, L	R, C	R, L, C
$\underline{Z}=\sum \underline{Z}_i$	$\underline{Z}_{RL}=R+jL\omega$	$\underline{Z}_{RC}=R-j/C\omega$	$\underline{Z}_{RC}=R+j(L\omega-1/C\omega)$

Remarque : X>0 φ>0 le dipôle est ***inductif*** et $\vec{I}$ ***est en retard par rapport à*** $\vec{U}$
X<0 φ<0 le dipôle est ***capacitif*** et $\vec{I}$ ***est en avance par rapport à*** $\vec{U}$
X=0 φ=0 le dipôle est ***résistif*** et $\vec{I}$ ***est en phase avec*** $\vec{U}$

Résonance série*: Z est minimum si* $L\omega = 1/C\omega$ *soit* $LC\omega^2=1$ $\rightarrow$ *Imax=U/R et* $\varphi = 0$.

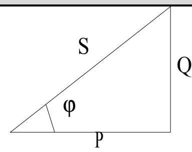
6.2. Modèle parallèle : **Admittance :** $\underline{Y}=1/\underline{Z}$ $\Rightarrow \underline{I} = \underline{Y}\,.\,\underline{U}$

Les Dipôles élémentaires	La Résistance R	L'inductance L	Le condensateur C
Admittance (***siemens***)	$\underline{Y}_R=1/R$	$\underline{Y}_L=1/jL\omega=-j/L\omega$	$\underline{Y}_c=1/-j/C\omega=jC\omega$

Groupement parallèle: $\underline{Y}=\sum \underline{Y}_i$ cas de 2 dipôles $\underline{Y}=\underline{Y}_1+\underline{Y}_2$ *ou* $\underline{Z}=\underline{Z}_1.\underline{Z}_2/(\underline{Z}_1+\underline{Z}_2)$

Résonance parallèle: *Y est minimum si* $C\omega=1/L\omega$ *soit* $LC\omega^2=1$*, le déphasage est nul.*

7. Puissances en alternatif. Théorème de Boucherot. Facteur de puissance .

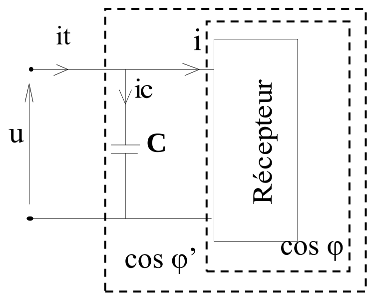
Les différentes puissances:	*active (W)* ***P = U I cos φ***	*réactive (VAR)* ***Q = U I sin φ.***	*apparente (VA)* ***S = U I***	*Relations Triangle des puissances*
Résistance R	$P=RI^2=U^2/R$	$Q=0$	$S=P$	
Inductance L	$P=0$	$Q=L\omega I^2$	$S=Q$	
Condensateur C	$P=0$	$Q=-U^2C\omega$	$S=-Q$	$S=\sqrt{P^2+Q^2}$ ***et*** $Q=P\tan\varphi$

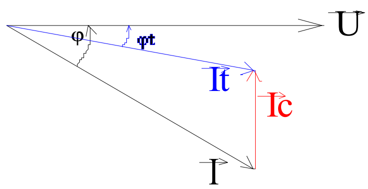
7.1.Théorème de Boucherot :

Pour un ensemble de récepteurs : $Pt=\sum P_i$ ***et*** $Q_t=\sum Q_i$.
(On présente les résultats dans un tableau et on calcul I_t et cos φ_t.)
$tg\varphi_t=Q_t/P_t \Rightarrow \cos\varphi_t$ et $I_t=P_t/U\cos\varphi_t$ ou $S_t=\sqrt{Q_t^2+P_t^2} \Rightarrow I_t=S_t/U$ et $\cos\varphi_t=P_t/S_t$.

7.2. Relèvement du facteur de puissance.

Pour diminuer le courant en ligne, on ajoute un condensateur en parallèle sur le récepteur.
Q' ↓ ⇒ S'↓ ⇒ It=S'/U ↓ et cosφ' =P'/S' ↓
(P'=P) La puissance active reste inchangée car Pc=0.
$Q'=Q+Qc<Q$ car $Qc=-U^2C\omega<0$.
$Q'=Q+Qc \Rightarrow P.\tan\varphi'=P.\tan\varphi-U^2C\omega$





$\Rightarrow C=P(\tan\varphi-\tan\varphi')/U^2\omega$