I -الدالة الاسية النبيرية
Fonction exponentielle népérienne

1- تعريف

- الدالة العكسية لدالة اللوغاريتم النبيري تسمى الدالة الآسية النبيرية أو الدالة الآسية ونرمز لها بالرمز exp أو e .

$$\forall x\in\mathbb{R};\forall y\in\left]0;+\infty\right[$$
$$e^x=y\Leftrightarrow x=\ln(y)$$

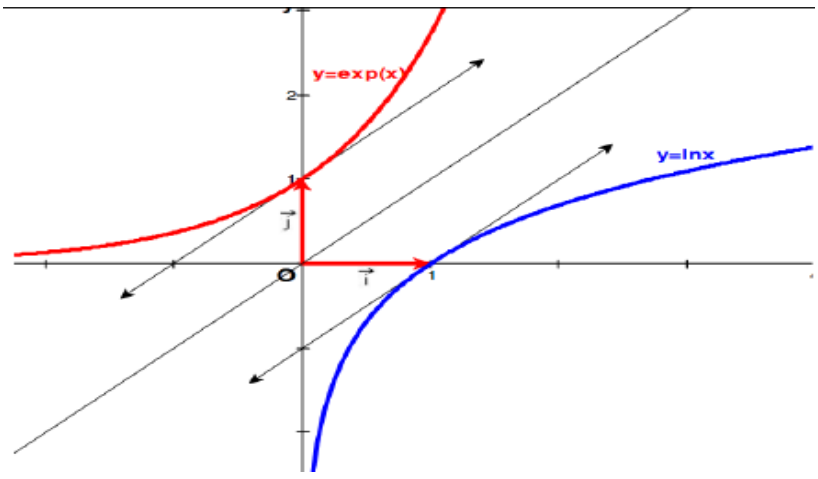
2 -خصائص

$$\forall(x;y)\in\mathbb{R}^2;e^x=e^y\Leftrightarrow x=y$$
$$e^x\prec e^y\Leftrightarrow x\prec y$$
$$\frac{e^x}{e^y}=e^x-e^y$$
$$e^x.e^y=e^{x+y}$$
$$\left(e^x\right)^r=e^{xr}$$

$$\ln e^f=f;e^0=1;e^1=e;e^{\ln f}=f$$

3- التمثيل المبياني للدالة الاسية

في معلم متعامد ممنظم منحنى الدالةlnو منحنى الدالة e متماثلان بالنسبة للمنصف الأول



4 -مجموعة تعريف الدالة الاسية

الدالة f معرفة كما يلي :	مجموعة تعريف الدالة f هي :
$f(x)=e^{x}$	$D_f=\mathbb{R}$
$f(x)=e^{u(x)}$	$D_f=\{x\in\mathbb{R}/x\in D_u\}$

تمرين

حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية:

1) $(\ln x)^2-\ln x-2=0$

2) $(\ln x)^2-2\ln x=0$.

3) $e^{2x}-e^{x}-2=0$

4) $e^{2x}-2e^{x}=0$.

حل في $\mathbb{R}$ المتراجحات:

1) $e^{2x}-2e^{x}\geq 0$

2) $(\ln x)^2-2\ln x\leq 0$

$e^{-3-x}e^{1+2x}>\frac{1}{e^{x}}$. -(2

$e^{x}<e^{\frac{1}{x}}$ -(3

5.المشتقة

بما أن دالة $\ln$ قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ و مشتقتها لا تنعدم على $]0;+\infty[$ فان الدالة الأسية قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \left(e^x\right)' = \frac{1}{\ln'\left(e^x\right)} = \frac{1}{\frac{1}{e^x}} = e^x$$

الدالة $x \to e^x$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \left(e^x\right)' = e^x$$

إذا كانت u قابلة للاشتقاق على مجال I فان الدالة $x \to e^{u(x)}$ قابلة للاشتقاق على I

$$\forall x \in I \qquad \left[e^{u(x)}\right]' = u'(x)e^{u(x)}$$

تمرين

أحسب $f'(x)$ على المجال I في الحالات التالية:

1) $I = \mathbb{R}, f(x) = e^{x^2-3x}$

2) $I =]0,+\infty[, f(x) = (x-1)e^{\frac{1}{x}}$

3) $I = \mathbb{R}, f(x) = x - \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$

4) $I =]1,+\infty[, f(x) = \ln\left(e^x - e\right)$

6- النهايات

دالة e^x : دالة متصلة وتزايدية على $\mathbb{R}$

$$\lim_{+\infty} e^x = +\infty \quad ; \lim_{+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$$

$$\lim_{-\infty} e^x = 0 \; ; \lim_{-\infty} xe^x = 0$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

أحسب النهايات التالية

$\lim\limits_{x \to -\infty} (2x-1)e^x$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^{2x} - e^x}{1 + e^x}$

$\lim\limits_{x \to 0^-} xe^{\frac{1}{x}}$.

II- لدالة الأسية للأساس a ($a>0$ و $a\neq 1$) Fonction exponentielle de base a

1 تعريف

- لكل $a\in\mathbb{R}^*_+-\{1\}$ الدالة $e^{x\ln a}$ المعرفة على $\mathbb{R}$ تسمى الدالة الآسية للأساس a ونرمز لها ب: $\exp_a$
- ولكل x من $\mathbb{R}$ $\leftarrow$ $a^x=e^{x\ln a}$ و $a^0=1$ و $a^1=a$
- جميع خصائص الدالة الآسية النبيرية تبقى صالحة للدالة الآسية ذات الأساس a

الدالة $x\longmapsto e^x$ هي الدالة الأسية للأساس e.
الدالة $x\longmapsto 10^x$ هي الدالة الأسية للأساس 10

2 دراسة الدالة $x\to a^x$

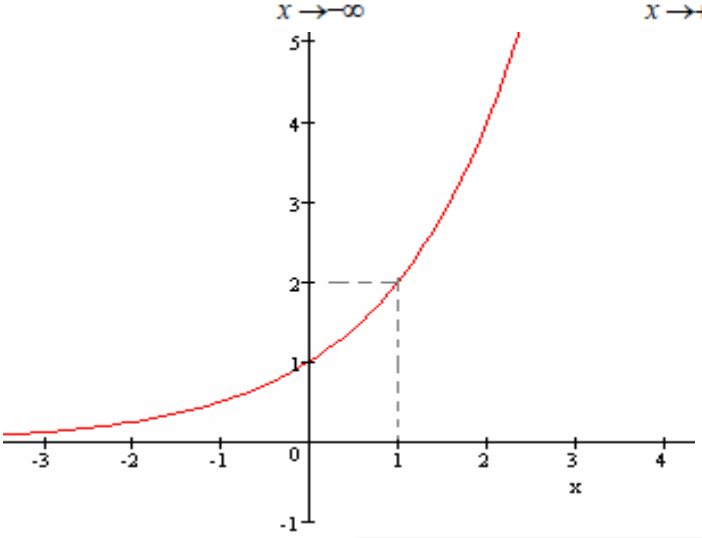
ليكن $a\in\mathbb{R}^{+*}-\{1\}$

الدالة $x\to a^x$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و $\left(a^x\right)'=a^x\ln a$ $\forall x\in\mathbb{R}$

الحالة الأولى

ادا كان $a>1$ فان $\ln a>0$ ومنه الدالة $x\to a^x$ تزايدية قطعا على $\mathbb{R}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} a^x=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x=0$

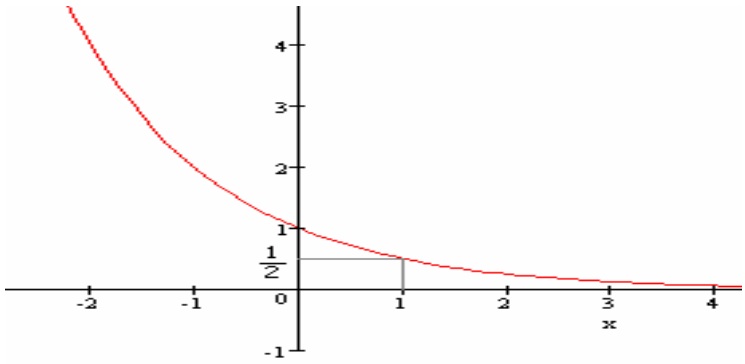


الحالة الثانية

ادا كان $0<a<1$ فان $\ln a<0$

ومنه الدالة $x\to a^x$ تناقصية قطعا على $\mathbb{R}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} a^x=0$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x=+\infty$



3-استنتاجات وخاصيات

$\forall (x;y) \in \mathbb{R}^2$ $a^x \times a^y = a^{x+y}$ $(r \in \mathbb{Q}) \quad (a^x)^r = a^{rx}$ $\frac{1}{a^x} = a^{-x}$ $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$	$\forall x \in \mathbb{R} \quad a^x = e^{x \ln a}$ $\ell og_a(a^x) = x$
	$\forall x \in]0;+\infty[\quad a^{\ell og_a(x)} = a$
	$\forall (x;y) \in \mathbb{R}^2 \quad a^x = a^y \Leftrightarrow x = y$
	$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in]0;+\infty[$ $a^x = y \Leftrightarrow x = \ell og_a(y)$

$0 < a < 1$	$a > 1$
$a^x < a^y \Leftrightarrow x < y$	$a^x > a^y \Leftrightarrow x > y$
$\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = 0$ $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = +\infty$	$\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = +\infty$ $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = 0$
$\lim\limits_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$	

$$(a^x)' = (\ln a) \times a^x$$

تمرين

1)- حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التاليه:

أ)- $2^{x+1} = 16$ ب- $3^x = 6$ ج)- $10^{2x} - 14 \times 10^x + 40 = 0$

2)- حل في $\mathbb{R}$ المتراجحات التالية:

أ)- $2^{x-1} < 4^{2x}$ ب)- $3^x > 2$ ج)- $3^x - 3^{2-x} - 8 > 0$

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على IR بمايلي : $f(x)=(x-2)^2e^x$

و ليكن (C) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$ (الوحدة 1 cm)

عادية 2013

1) أ - بين أن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

ب – بين أن $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}=+\infty$ ثم استنتج أن المنحنى (C)يقبل، بجوار $+\infty$ ، فرعا شلجميا يتم تحديد اتجاهه.

2) أ - تحقق من أن $f(x)=x^2e^x-4xe^x+4e^x$ لكل x من IR

ب - بين أن $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$ وأول هذه النتيجة هندسيا (نذكر $\lim\limits_{x\to-\infty} x^ne^x=0$ لكل n من IN^*)

3) أ- بين أن : $f'(x)=x(x-2)e^x$ لكل x من IR

ب- بين أن الدالة f تزايدية على كل من المجالين $]-\infty,0]$ و $[2,+\infty[$ وأن الدالة f تناقصية على المجال $[0,2]$

ج- ضع جدول تغيرات الدالة f على IR

4) أ- بين ان $f''(x)=(x^2-2)e^x$ لكل x من IR ثم استنتج أن للمنحنى (C) نقطتي انعطاف تحديد أرتوبيهما غير مطلوب .

ب- أنشئ (C) في المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$

5) أ- بين أن الدالة $H:x\mapsto(x-1)e^x$ دالة أصلية للدالة $h:x\mapsto xe^x$ على IR ثم احسب $\int_0^1 xe^x\,dx$

ب- باستعمال مكاملة بالأجزاء ، بين أن : $\int_0^1 x^2e^x\,dx=e-2$

ج- بين أن مساحة حيز المستوى المحصور بين المنحنى (C) و محو الأفاصيل والمستقيمين اللذين معادلتاهما $x=0$ و $x=1$ هي $5(e-2)cm^2$

6) استعمل المنحنى لإعطاء عدد حلول المعادلة : $x\in IR,\ x^2=e^{-x}+4x-4$

I – نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $g(x)=(1-x)e^x-1$.

1) أ – بين أن : $g'(x)=-xe^x$ لكل x من $\mathbb{R}$.

ب – بين أن الدالة g تناقصية على $[0,+\infty[$ وتزايدية على $]-\infty,0]$ و تحقق من أن $g(0)=0$.

2) استنتج أن : $g(x)\leq 0$ لكل x من $\mathbb{R}$.

II – لتكن f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $f(x)=(2-x)e^x-x$.

وليكن (C) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$ (الوحدة $1cm$) .

1) أ – بين أن : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$.

ب – بين أن : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=-\infty$ ثم استنتج أن المنحنى (C) يقبل فرعا شلجميا بجوار $+\infty$ يتم تحديد اتجاهه .

2) أ – بين أن : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ ثم احسب $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)+x]$ (نذكر أن : $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x=0$) .

ب – بين أن المستقيم (D) الذي معادلته $y=-x$ مقارب مائل للمنحنى (C) بجوار $-\infty$.

3) أ – بين أن : $f'(x)=g(x)$ لكل x من $\mathbb{R}$.

ب – أول هندسيا النتيجة $f'(0)=0$.

ج – بين أن الدالة f تناقصية قطعا على $\mathbb{R}$ ثم ضع جدول تغيرات الدالة f .

4) بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في $\mathbb{R}$ وأن $\dfrac{3}{2}<\alpha<2$ (نقبل أن $e^{\frac{1}{2}}>3$) .

5) أ – حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $f(x)+x=0$ واستنتج أن (C) و (D) يتقاطعان في النقطة $A(2,-2)$.

ب – ادرس إشارة $f(x)+x$ على $\mathbb{R}$.

ج – استنتج أن (C) يوجد فوق (D) على $]2,+\infty[$ وتحت (D) على $]-\infty,2[$.

6) أ – بين أن المنحنى (C) يقبل نقطة انعطاف وحيدة زوج إحداثيتيها هو $(0,2)$.

ب – أنشئ المستقيم (D) والمنحنى (C) في نفس المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

7) أ – باستعمال مكاملة بالأجزاء بين أن $\int_1^0(2-x)e^x dx=3-\dfrac{4}{e}$.

ب – استنتج ب cm^2 مساحة حيز المستوى المحصور بين المنحنى (C) والمستقيم (D) والمستقيمين اللذين معادلتاهما $x=-1$ و $x=0$.

I) نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $g(x)=1+4xe^{2x}$.

1) بين أن : $g'(x)=4(2x+1)e^{2x}$ لكل x من $\mathbb{R}$.

2) بين أن الدالة g تزايدية على المجال $\left[-\frac{1}{2},+\infty\right[$ وتناقصية على المجال $\left]-\infty,-\frac{1}{2}\right]$.

3) أ- بين أن $g\left(-\frac{1}{2}\right)=1-\frac{2}{e}$ ثم تحقق من أن $g\left(-\frac{1}{2}\right)>0$.

ب - استنتج أن : $g(x)>0$ لكل x من $\mathbb{R}$.

II) لتكن f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $f(x)=(2x-1)e^{2x}+x+1$.

وليكن (C) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$ $\left(\|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|=2cm\right)$.

1) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ثم بين أن $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ (نذكر أن : $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^{x}=0$) .

2- بين أن : $f'(x)=g(x)$ لكل x من $\mathbb{R}$ ثم استنتج أن الدالة f تزايدية قطعا على $\mathbb{R}$.

3) أ - احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$ واستنتج أن (C) يقبل فرعا شلجميا في اتجاه محور الأراتيب .

ب - احسب $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-(x+1)]$ واستنتج أن المستقيم (Δ) الذي معادلته $y=x+1$ مقارب للمنحنى (C) بجوار $-\infty$.

ج - حدد زوج إحداثيتي نقطة تقاطع المستقيم (Δ) والمنحنى (C) ثم بين أن المنحنى (C) يوجد تحت المستقيم (Δ) على المجال $\left]-\infty,\frac{1}{2}\right[$ و فوق المستقيم (Δ) على المجال $\left]\frac{1}{2},+\infty\right[$.

4) أ - بين أن $y=x$ هي معادلة للمستقيم (T) مماس المنحنى (C) في النقطة O .

ب - بين أن للمنحنى (C) نقطة انعطاف أفصولها $-\frac{1}{2}$ (تحديد أرتوب نقطة الانعطاف غير مطلوب) .

5) أنشئ المستقيمين (Δ) و (T) والمنحنى (C) في المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

6) أ - باستعمال مكاملة بالأجزاء بين أن : $\int_0^{\frac{1}{2}}(2x-1)e^{2x}dx=1-\frac{e}{2}$.

ب - بين أن مساحة حيز المستوى المحصور بين المنحنى (C) و المستقيم (T) المماس للمنحنى (C) والمستقيمين اللذين معادلتاهما $x=0$ و $x=\frac{1}{2}$ هي $(6-2e)cm^2$.

نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x بحيث : $f(x)=2\ln\left(e^x-2\sqrt{e^x}+2\right)$

(C) يرمز للمنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

I) 1) تحقق من أن : $e^x-2\sqrt{e^x}+2=\left(\sqrt{e^x}-1\right)^2+1$ لكل x من $\mathbb{R}$ ثم استنتج أن مجموعة تعريف الدالة f هي $\mathbb{R}$ وأن : $(\forall x\in\mathbb{R})\ 1-\frac{2}{\sqrt{e^x}}+\frac{2}{e^x}>0$.

2) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ثم بين أن : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\ln 4$ و أول هذه النتيجة هندسيا .

3) أ- بين أن : $f'(x)=\frac{2\sqrt{e^x}\left(\sqrt{e^x}-1\right)}{\left(\sqrt{e^x}-1\right)^2+1}$ لكل x من $\mathbb{R}$ وتحقق من أن $f'(0)=0$.

ب- ادرس إشارة $\sqrt{e^x}-1$ على $\mathbb{R}$ واستنتج أن الدالة f تزايدية على المجال $[0,+\infty[$ وتناقصية على المجال $]-\infty,0]$.

4) أ- تحقق من أن : $(\forall x\in\mathbb{R})\ f(x)=2x+2\ln\left(1-\frac{2}{\sqrt{e^x}}+\frac{2}{e^x}\right)$.

ب- بين أن المستقيم (D) الذي معادلته $y=2x$ مقارب للمنحنى (C) بجوار $+\infty$.

5) أ- تحقق من أن : $e^x-3\sqrt{e^x}+2=\left(\sqrt{e^x}-1\right)\left(\sqrt{e^x}-2\right)$ لكل x من $\mathbb{R}$.

ب- ادرس إشارة كل من $\sqrt{e^x}-2$ و $\left(\sqrt{e^x}-1\right)\left(\sqrt{e^x}-2\right)$ على $\mathbb{R}$.

ج-استنتج أن : $e^x-2\sqrt{e^x}+2\le\sqrt{e^x}$ لكل x من المجال $[0,\ln 4]$.

د- بين أن : $f(x)\le x$ لكل x من المجال $[0,\ln 4]$.

6) أنشئ المنحنى (C) (نقبل أن للمنحنى (C) نقطتي انعطاف الفصول بإحداهما أصغر من -1 و الفصول الأخرى أكبر من 2 تحديدهما غير مطلوب ونأخذ $\ln 4\simeq 1,4$) .

II) لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة بما يلي : $u_0=1$ و $u_{n+1}=f(u_n)$ لكل n من $\mathbb{N}$.

يمكنك في ما يلي استعمال نتائج دراسة الدالة f .

1) بين أن : $0\le u_n\le\ln 4$ لكل n من $\mathbb{N}$.

2) بين أن المتتالية (u_n) تناقصية .

3) استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة وحدد نهايتها .

المسلك :	
الشعب(ة):	شعبة العلوم التجريبية بمسالكها وشعبة العلوم والتكنولوجيات بمسالكها

الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا
(الدورة الاستدراكية 2008)
الموضوع

I) نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $g(x)=e^{2x}-2x$.

1) احسب $g'(x)$ لكل x من $\mathbb{R}$ ثم بين أن g تزايدية على $[0,+\infty[$ و تناقصية على $]-\infty,0]$.

2) استنتج أن $g(x)>0$ لكل x من $\mathbb{R}$ (لاحظ أن $g(0)=1$) .

II) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $f(x)=\ln\left(e^{2x}-2x\right)$

ليكن (C) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

1) أ- بين أن $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$.

ب- تحقق من أن $\frac{f(x)}{x}=\left(\frac{e^{2x}}{x}-2\right)\frac{\ln\left(e^{2x}-2x\right)}{e^{2x}-2x}$ لكل x من $\mathbb{R}^*$.

ج- بين أن $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=0$ (نذكر أن : $\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{\ln t}{t}=0$).

د- استنتج أن المنحنى (C) يقبل ، بجوار $-\infty$ ، فرعا شلجميا يتم تحديد اتجاهه .

2) أ- لكل x من $[0,+\infty[$ ، تحقق من أن $1-\frac{2x}{e^{2x}}>0$ وأن $f(x)=2x+\ln\left(1-\frac{2x}{e^{2x}}\right)$.

ب- استنتج أن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ (نذكر أن : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^u}{u}=+\infty$) .

ج- بين أن المستقيم (D) الذي معادلته $y=2x$ مقارب مائل للمنحنى (C) بجوار $+\infty$.

د- بين أن : $f(x)-2x\le 0$ لكل x من $[0,+\infty[$ واستنتج أن (C) يوجد تحت (D) على المجال $[0,+\infty[$.

3) أ- بين أن : $f'(x)=\frac{2\left(e^{2x}-1\right)}{g(x)}$ لكل x من $\mathbb{R}$.

ب- ادرس إشارة $f'(x)$ لكل x من $\mathbb{R}$ ثم ضع جدول تغيرات الدالة f .

4) أنشئ (D) و (C) في المعلم $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ (نقبل أن للمنحنى (C) نقطتي انعطاف) .

المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية والتعليم العالي والتكوين المهني والبحث العلمي

المركز الوطني للامتحانات

الامتحان الوطني الموحد للباكالوريا
(الدورة العادية 2007)

المادة: الرياضيات

I) نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $g(x)=e^{-x}+x-1$.

1) احسب $g'(x)$ لكل x من $\mathbb{R}$ ثم استنتج أن g تزايدية على $[0,+\infty[$ و تناقصية على $]-\infty,0]$.

2) بين أن $g(x)\geq 0$ لكل x من $\mathbb{R}$ (لاحظ أن $g(0)=0$) ثم استنتج أن $e^{-x}+x\geq 1$ لكل x من $\mathbb{R}$.

II) نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة بما يلي : $f(x)=\dfrac{x}{x+e^{-x}}$

و ليكن (C) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $(o,\vec{i},\vec{j})$.

1) بين أن حيز تعريف الدالة f هو $\mathbb{R}$ (يمكن استعمال نتيجة السؤال I)2)) .

2) أ –بين أن : $f(x)=\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{xe^{x}}}$ لكل x من $\mathbb{R}^*$

ب –بين أن : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$ ثم أول هندسيا هاتين النتيجتين .

3) أ – بين أن : $f'(x)=\dfrac{(1+x)e^{-x}}{\left(x+e^{-x}\right)^2}$ لكل x من $\mathbb{R}$.

ب- ادرس إشارة $f'(x)$ ثم ضع جدول تغيرات الدالة f .

4) أ- اكتب معادلة المماس للمنحنى (C) في النقطة O أصل المعلم .

ب- تحقق من أن : $x-f(x)=\dfrac{xg(x)}{g(x)+1}$ لكل x من $\mathbb{R}$ ثم ادرس إشارة $x-f(x)$ على $\mathbb{R}$.

ج- استنتج الوضع النسبي للمنحنى (C) و المستقيم (Δ) الذي معادلته هي : $y=x$.

5) أنشئ (Δ) و(C) في المعلم $(o,\vec{i},\vec{j})$ (نأخذ $\dfrac{1}{1-e}\simeq -0,6$).

III) نعتبر المتتالية العددية (U_n) المعرفة بما يلي $U_0=1$ و $U_{n+1}=f(U_n)$ لكل n من $\mathbb{N}$.

1) بين بالترجع أن $0\leq U_n\leq 1$ لكل n من $\mathbb{N}$

2) بين أن المتتالية (U_n) تناقصية (يمكن استعمال نتيجة السؤال II)4)ب).

3) استنتج أن (U_n) متقاربة ثم حدد نهايتها.