1S$_1$: DEVOIR SURVEILLÉ N°8 (2 heures)

Exercice 1 (2 points)

Calculer les sommes suivantes :

$$S_1 = 1 + 2 + 3 + ... + 1999 + 2000 \quad \text{et} \quad S_2 = 2001 + 2002 + 2003 + ... + 9998 + 9999.$$

Exercice 2 (3 points)

La suite (u_n) est arithmétique de raison r. On sait que $u_{50} = 406$ et $u_{100} = 806$.

1. Calculer la raison r et u_0.
2. Calculer la somme $S = u_{50} + u_{51} + ... + u_{100}$.

Exercice 3 (4 points)

Une entreprise décide de verser à ses ingénieurs une prime annuelle de 500 Euros.

Pour ne pas se dévaluer, il est prévu que chaque année la prime augmente de 2% par rapport à l'année précédente. On note (u_n) la suite des primes avec $u_1 = 500$.

1. Calculer u_2 puis u_3 (c'est-à-dire la prime versée par l'entreprise la 2ème année et la 3ème année)
2. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n. En déduire la nature de la suite (u_n).

   Un ingénieur compte rester 20 ans dans cette entreprise à partir du moment où est versée la prime.
3. Calculer la prime qu'il touchera la 20ème année (c'est-à-dire u_{20})
4. Calculer la somme totale S des primes touchées sur les 20 années (c'est-à-dire $S = u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_{20}$)

Exercice 4 (4 points)

On considère les deux suites (u_n) et (v_n) définies, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par :

$$u_n = \frac{3\times 2^n - 4n + 3}{2} \quad \text{et} \quad v_n = \frac{3\times 2^n + 4n - 3}{2}$$

1. Soit (w_n) la suite définie par $w_n = u_n + v_n$. Démontrer que (w_n) est une suite géométrique.
2. Soit (t_n) la suite définie par $t_n = u_n - v_n$. Démontrer que (t_n) est une suite arithmétique.
3. Démontrer que : $\quad u_n = \dfrac{1}{2}(w_n + t_n)$
4. Exprimer la somme suivante en fonction de n :

$$S_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$$

Exercice 5 (7 points)

On considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \dfrac{2}{1+u_n} \end{cases}$ pour tout entier naturel n.

1. Calculer u_1 et u_2. La suite (u_n) est-elle arithmétique ? Géométrique ?
2. Démontrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n, on a : $\quad 0 \leqslant u_n \leqslant 3$.
3. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 2}$$

   a) Calculer v_0, v_1 et v_2. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique.

   b) Exprimer v_n en fonction de n.

   c) Exprimer u_n en fonction de v_n. Que vaut u_{10} ?

$1S_1$: DEVOIR SURVEILLÉ SUR LES SUITES : CORRIGÉ

Exercice 1

Rappelons que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $1 + 2 + ... + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$. On en déduit immédiatement :

$S_1 = 1 + 2 + ... + 1999 + 2000 = \dfrac{2000 \times 2001}{2} = 2001000$.

$S_1 + S_2 = 1 + 2 + ... + 9999 = \dfrac{9999 \times 10000}{2} = 49995000$ d'où $S_2 = 49995000 - S_1 = 47994000$.

Exercice 2

1) <u>Calcul de la raison r</u> :

On a :
$$u_n = u_p + (n - p)r$$

D'où, lorsque $n \neq p$:
$$r = \frac{u_n - u_p}{n - p}$$

Avec $n = 100$ et $p = 50$, cela donne : $r = \dfrac{u_{100} - u_{50}}{100 - 50} = \dfrac{806 - 406}{50} = 8$.

<u>Calcul de u_0</u> :

On a :
$$u_{100} = u_0 + 100r$$

D'où :
$$u_0 = u_{100} - 100r = 806 - 100 \times 8 = 6.$$

2) Rappelons que dans la somme $S = u_p + ... + u_n$, il y a $N = n - p + 1$ termes.

La somme $S = u_{50} + u_{51} + ... + u_{100}$ contient donc $N = 100 - 50 + 1 = 51$ termes.

En outre, S est une somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique de raison $r = 8$.

Nous pouvons donc utiliser la formule :
$$S = \frac{N(P + D)}{2}$$

Avec $P = u_{50} = 406$ et $D = u_{100} = 806$, nous obtenons :
$$S = \frac{51(406 + 806)}{2} = 30906$$

Exercice 3

Rappelons qu'une augmentation de t% se traduit par une multiplication par $1 + \dfrac{t}{100}$.

En particulier, le coefficient multiplicateur associé à une augmentation de 2% est 1,02.

1) $u_2 = u_1 + \dfrac{2}{100} u_1 = (1 + \dfrac{2}{100})u_1 = 1{,}02u_1 = 1{,}02 \times 500 = 510$. De même, $u_3 = 1{,}02u_2 = 1{,}02 \times 510 = 520{,}2$.

La deuxième année, l'ingénieur touche une prime de 510 euros et la troisième une prime de 520,2 euros.

2) La prime u_{n+1} s'obtient de la prime u_n par augmentation de 2% donc :
$$u_{n+1} = 1{,}02\ u_n \text{ pour tout entier } n \geqslant 1$$

On en déduit, par définition, que la suite (u_n) est **géométrique** de raison $q = 1{,}02$.

3) <u>Calcul de u_{20}</u> : comme (u_n) est une suite géométrique, on a :
$$u_n = q^{n-1}\ u_1$$

En particulier, avec $n = 20$, $q = 1{,}02$ et $u_1 = 500$, cela donne :
$$u_{20} = 1{,}02^{19} \times 500 \simeq 728{,}41 \text{ (à } 10^{-2} \text{ près)}$$

La vingtième année, l'ingénieur touchera une prime 728,41 euros (au centime près).

4) $S = u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_{20}$ est une somme de $N = 20$ termes consécutifs d'une suite géométrique de raison $q = 1{,}02$. Nous pouvons donc utiliser la formule :

$$S = \frac{P(1-q^N)}{1-q}$$

Ce qui, dans notre cas ($P = u_1 = 500$), donne :

$$S = \frac{500(1-1{,}02^{20})}{1-1{,}02} \simeq 12148{,}69 \text{ à } 10^{-2} \text{ près}$$

La somme totale des primes touchées par l'ingénieur sur les 20 années est : 12149 euros (à un euro près)

Exercice 4

1) On a : $$w_n = u_n + v_n = \frac{3\times 2^n - 4n + 3}{2} + \frac{3\times 2^n + 4n - 3}{2} = 3 \times 2^n.$$

La suite (w_n) est du type $w_n = ba^n$ avec $b = 3$ et $a = 2$. C'est donc une suite géométrique de raison $q = a = 2$.

En effet, les termes de (w_n) sont clairement non nuls et pour tout entier n, on a :

$$\frac{w_{n+1}}{w_n} = \frac{3\times 2^{n+1}}{3\times 2^n} = 2$$

2) On a : $$t_n = u_n - v_n = \frac{3\times 2^n - 4n + 3}{2} - \frac{3\times 2^n + 4n - 3}{2} = -4n + 3.$$

La suite (t_n) est du type $t_n = an + b$ avec $a = -4$ et $b = 3$. C'est une suite arithmétique de raison $r = a = -4$.

En effet, pour tout entier n, on a :

$$t_{n+1} - t_n = -4(n+1) + 3 - (-4n + 3) = -4$$

3) On a, pour tout entier n :

$$\frac{1}{2}(w_n + t_n) = \frac{1}{2}(u_n + v_n + u_n - v_n) = \frac{1}{2} \times 2 \times u_n = u_n.$$

4) D'après la question 3), chaque terme u_k ($0 \leqslant k \leqslant n$) de la somme S peut s'écrire : $u_k = \frac{1}{2}(w_k + t_k)$

Ainsi : $$S_n = \frac{1}{2}(w_0 + t_0) + \frac{1}{2}(w_1 + t_1) + ... + \frac{1}{2}(w_n + t_n)$$

En factorisant par $\frac{1}{2}$ et en regroupant les termes de la suite (w_n) et ceux de la suite (t_n), on obtient :

$$S_n = \frac{1}{2}[(w_0 + w_1 + ... + w_n) + (t_0 + t_1 + ... + t_n)]$$

Or, d'après la question 1, la suite (w_n) est géométrique de raison $q = 2$. On a donc :

$$w_0 + w_1 + ... + w_n = \frac{P(1-q^N)}{1-q} = \frac{w_0(1-2^{n+1})}{1-2} = 3(2^{n+1} - 1)$$

Et d'après la question 2, la suite (t_n) est arithmétique de raison $r = -4$. On a donc :

$$t_0 + t_1 + ... + t_n = \frac{N(P+D)}{2} = \frac{(n+1)(t_0 + t_n)}{2} = \frac{(n+1)(3 - 4n + 3)}{2} = (n+1)(3 - 2n)$$

Finalement :

$$S_n = \frac{1}{2}[3(2^{n+1} - 1) - (n+1)(3 - 2n)] = 3\times 2^n - n^2 - \frac{1}{2}n$$

Exercice 5

1) $u_0 = 3$; $u_1 = \dfrac{2}{1+u_0} = \dfrac{1}{2}$; $u_2 = \dfrac{2}{1+u_1} = \dfrac{4}{3}$

On a : $u_1 - u_0 = -\dfrac{5}{2}$ et $u_2 - u_1 = \dfrac{5}{6}$. Comme $u_1 - u_0 \neq u_2 - u_1$, on en déduit immédiatement que la suite (u_n) n'est pas arithmétique.

On a : $\dfrac{u_1}{u_0} = \dfrac{1}{6}$ et $\dfrac{u_2}{u_1} = \dfrac{8}{3}$. Comme $\dfrac{u_1}{u_0} \neq \dfrac{u_2}{u_1}$, on en déduit immédiatement que la suite (u_n) n'est pas géométrique.

2) Considérons la propriété $\wp(n)$: $0 \leqslant u_n \leqslant 3$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- Comme $0 \leqslant u_0 \leqslant 3$, on a $\wp(0)$.
- Montrons : $\wp(n) \Rightarrow \wp(n+1)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

  Supposons $\wp(n)$: $\qquad 0 \leqslant u_n \leqslant 3$

  Ajoutons 1 : $\qquad 1 \leqslant 1 + u_n \leqslant 4$

  La fonction inverse étant décroissante sur $]0 ; +\infty[$, on déduit :

  $$\frac{1}{1} \geqslant \frac{1}{1+u_n} \geqslant \frac{1}{4}$$

  Multiplions par 2 : $\qquad 2 \geqslant \dfrac{2}{1+u_n} \geqslant \dfrac{1}{2}$

  D'où : $\qquad 2 \geqslant u_{n+1} \geqslant \dfrac{1}{2}$

  Or : $3 \geqslant 2$ et $\dfrac{1}{2} \geqslant 0$, d'où : $\qquad 3 \geqslant u_{n+1} \geqslant 0$

  On a donc $\wp(n+1)$.

Du principe de raisonnement par récurrence, on déduit $\wp(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire :

$$0 \leqslant u_n \leqslant 3 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

La suite (u_n) est donc bien définie (puisque $u_n \neq -1$ pour tout entier n)

3) Remarquons que la suite (v_n) est bien définie puisque d'après la question précédente, $u_n \neq -2$.

a) $v_0 = \dfrac{u_0 - 1}{u_0 + 2} = \dfrac{2}{5}$; $v_1 = \dfrac{u_1 - 1}{u_1 + 2} = -\dfrac{1}{5}$; $v_2 = \dfrac{u_2 - 1}{u_2 + 2} = \dfrac{1}{10}$.

La suite (v_n) semble géométrique de raison $q = -\dfrac{1}{2}$. Démontrons-le.

Pour tout entier n, on a :

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1} - 1}{u_{n+1} + 2} = \frac{\dfrac{2}{1+u_n} - 1}{\dfrac{2}{1+u_n} + 2} = \frac{\dfrac{2-(1+u_n)}{1+u_n}}{\dfrac{2+2(1+u_n)}{1+u_n}} = \frac{\dfrac{1-u_n}{1+u_n}}{\dfrac{2(2+u_n)}{1+u_n}} = \frac{1}{2} \times \frac{1-u_n}{2+u_n} = -\frac{1}{2} v_n$$

(Les quotients ci-dessus sont bien définie puisque $u_n \neq -2$ et $u_n \neq -1$ (d'après la question 2))

Ce qui prouve que la suite (v_n) est géométrique de raison $q = -\dfrac{1}{2}$.

b) Exprimons v_n en fonction de n. Puisque (v_n) est une suite géométrique, nous avons :

$$v_n = q^n v_0 = \left(-\frac{1}{2}\right)^n \times \frac{2}{5}$$

c) Exprimons u_n en fonction de v_n. Pour cela, on utilise la relation :

$$v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 2}$$

En multipliant par $u_n + 2 \neq 0$: $v_n(u_n + 2) = u_n - 1$

Factorisons par u_n : $u_n(v_n - 1) = -1 - 2v_n$

Divisons par $v_n - 1 \neq 0$: $u_n = \dfrac{-1-2v_n}{v_n - 1} = \dfrac{1+2v_n}{1-v_n}$

Calculons u_{10} : $u_{10} = \dfrac{1+2v_{10}}{1-v_{10}}$

Or : $v_{10} = \left(-\dfrac{1}{2}\right)^{10} \times \dfrac{2}{5} = \dfrac{1}{2^{10}} \times \dfrac{2}{5} = \dfrac{1}{2^9 \times 5}$

D'où : $u_{10} = \dfrac{1+\dfrac{2}{2^9 \times 5}}{1-\dfrac{1}{2^9 \times 5}} = \dfrac{2^9 \times 5 + 2}{2^9 \times 5 - 1} = \dfrac{2562}{2559} \simeq 1{,}00117$ (à 10^{-5} près)