

Représentations.

Définitions

Pour une tension
 $u = u(t) = \hat{U} \cdot \sin(\omega t + \varphi_u)$
 $u = U\sqrt{2} \sin(\omega t + \varphi_u)$.

ou pour un courant
 $i = i(t) = \hat{I} \cdot \sin(\omega t + \varphi_i)$
 $i = I\sqrt{2} \sin(\omega t + \varphi_i)$.

u, i sont les valeurs **instantanées de la tension et du courant**.

$\hat{U}, \hat{I}$ sont les valeurs **maximales ou amplitudes de u et i** .

U, I sont les valeurs **efficaces de u et i** .

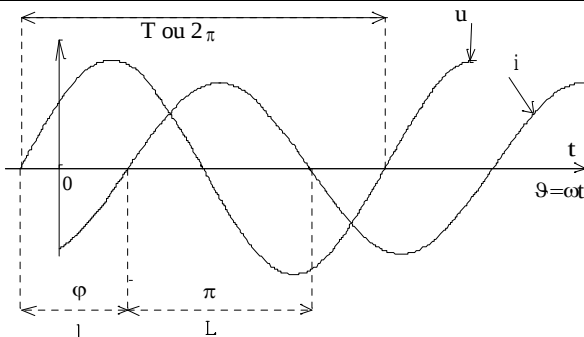
ω est la **pulsation ou vitesse angulaire en rad/s**

$\omega = 2 \cdot \pi \cdot f = 2 \cdot \pi / T$ avec $f = 1/T$: fréquence en Hertz (Hz) et T période en seconde (s).

$\omega t + \varphi_i$ ou $\omega t + \varphi_u$ est la **phase** à l'instant t exprimée en radian.

φ_i, φ_u est la **phase à l'origine ($t=0$)**.

Représentation instantanée



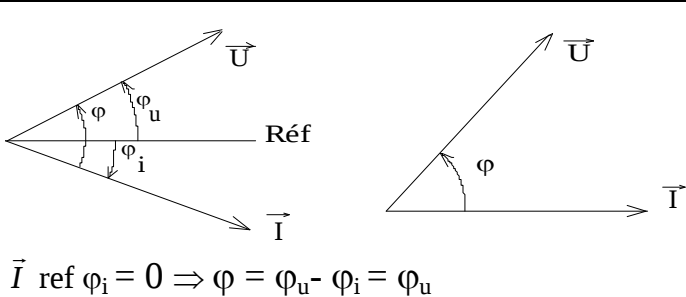
$\varphi = \varphi_u - \varphi_i$ est le **déphasage entre u et i ou différence de phases..**

On mesure le déphasage à l'oscilloscope : règle de 3 :

$$\varphi \text{ (rad)} = \frac{L}{L} \cdot \pi$$

$$\varphi \text{ (°)} = \frac{L}{L} \cdot 180$$

Représentation vectorielle de Fresnel



$$u = \hat{U} \cdot \sin(\omega t + \varphi_u) = U\sqrt{2} \sin(\omega t + \varphi_u)$$

$\vec{U}$ module U et phase $\omega t + \varphi_u = \varphi_u(t=0)$: $\vec{U} (U, \varphi_u)$

$$i = \hat{I} \cdot \sin(\omega t + \varphi_i) = I\sqrt{2} \sin(\omega t + \varphi_i)$$

$\vec{I}$ module I et phase $\omega t + \varphi_i = \varphi_i(t=0)$: $\vec{I} (I, \varphi_i)$

Somme de grandeurs sinusoïdales : $u = u_1 + u_2$

$$\Rightarrow \vec{U} = \vec{U}_1 + \vec{U}_2 \text{ ou } i = i_1 + i_2 \Rightarrow \vec{I} = \vec{I}_1 + \vec{I}_2$$

Représentation complexe

Rappels sur les complexes.

Forme polaire : $\underline{Z} = [Z; \theta] = [a + j b]$ où : Z module, θ argument, a partie réelle, b partie imaginaire
 $Z = [Z, \theta] = Z \cos \theta + j Z \sin \theta$ et $Z = a + j b = [\sqrt{a^2 + b^2}; \theta = \arctg(b/a)]$.

Calculs:

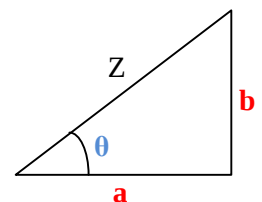
Addition: $\underline{Z} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 = (a_1 + a_2) + j (b_1 + b_2)$.

Soustraction: $\underline{Z} = \underline{Z}_1 - \underline{Z}_2 = (a_1 - a_2) + j (b_1 - b_2)$.

Multiplication: $\underline{Z} = \underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_2 = [Z_1 \cdot Z_2; \theta_1 + \theta_2]$ θ_1 et θ_2 arguments de $\underline{Z}_1$ et $\underline{Z}_2$.

Division: $\underline{Z} = \underline{Z}_1 / \underline{Z}_2 = [Z_1 / Z_2; \theta_1 - \theta_2]$.

Dérivée: $(\underline{Z})' = j \omega \underline{Z}$.



Utilisation en électricité

$$u = U\sqrt{2} \sin(\omega t + \varphi_u) \Rightarrow \underline{U} = [U; \varphi_u] \text{ et } i \Rightarrow \underline{I} = [I; \varphi_i]$$

Si i est la référence alors $\varphi_i = 0$ et $\varphi_u = \varphi \Rightarrow \underline{I} = [I; 0]$ et $\underline{U} = [U; \varphi]$

$$\underline{U} = U \cos \varphi + j U \sin \varphi = a + j b = [\sqrt{a^2 + b^2}; \varphi = \arctg(b/a)]$$

Modèle équivalent d'un dipôle linéaire

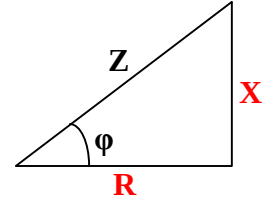
Modèle série : Impédance

$$\underline{Z} = \underline{U}/\underline{I} = R + jX = [Z ; \varphi]$$

R : partie réelle de $\underline{Z} \rightarrow$ **résistance en ohm**,

X : partie imaginaire de $\underline{Z} \rightarrow$ **réactance en ohm**,

$$Z = U/I = \sqrt{(R^2 + X^2)} \rightarrow \text{Impédance en ohm} \quad \text{et } \varphi \text{ tel que } \tan \varphi = X/R$$



$$\varphi = \varphi_U - \varphi_I = \arg \underline{U} - \arg \underline{I} = \arg \underline{Z} \quad (\varphi = (\vec{I}, \vec{U}) \text{ déphasage de } i \text{ sur } u)$$

Les Dipôles élémentaires	relation instantanée	Tension efficace	Déphasage φ	Tension complexe	Impédance complexe
Résistance R	$u = R.i$	$U = R.I$	0	$\underline{U} = R.\underline{I}$	$\underline{Z}_R = R$
Inductance L	$u = L di/dt$	$U = L\omega.I$	$\pi/2$	$\underline{U} = jL\omega.\underline{I}$	$\underline{Z}_L = jL\omega$
Condensateur C	$u = C di/dt$	$U = I/C\omega$	$-\pi/2$	$\underline{U} = -jI/C\omega$	$\underline{Z}_C = -j/C\omega$

Groupement série

Groupement série	R, L	R, C	R, L, C
$\underline{Z} = \sum \underline{Z}_i$	$\underline{Z}_{RL} = R + jL\omega$	$\underline{Z}_{RC} = R - j/C\omega$	$\underline{Z}_{RLC} = R + j(L\omega - 1/C\omega)$

Remarque : $X > 0 \quad \varphi > 0$ le dipôle est **inductif** et $\vec{I}$ est en retard par rapport à $\vec{U}$

$X < 0 \quad \varphi < 0$ le dipôle est **capacitif** et $\vec{I}$ est en avance par rapport à $\vec{U}$

$X = 0 \quad \varphi = 0$ le dipôle est **résistif** et $\vec{I}$ est en phase avec $\vec{U}$

Modèle parallèle : Admittance

$$\underline{Y} = 1/\underline{Z} \Rightarrow \underline{I} = \underline{Y} . \underline{U}$$

Les Dipôles élémentaires	La Résistance R	L'inductance L	Le condensateur C
Admittance	$\underline{Y}_R = 1/R$	$\underline{Y}_L = 1/jL\omega = -j/L\omega$	$\underline{Y}_C = 1/-j/C\omega = jC\omega$

Groupement parallèle

$$\underline{Y} = \sum \underline{Y}_i \quad \text{cas de 2 dipôles } \underline{Y} = \underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 \text{ ou } \underline{Z} = \underline{Z}_1 . \underline{Z}_2 / (\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2)$$

Puissances en alternatif. Théorème de Boucherot. Facteur de puissance

Puissances en alternatif

Les différentes puissances:	active (W) $P = UI \cos \varphi$	réactive (VAR) $Q = UI \sin \varphi$	apparente (VA) $S = UI$	Relations Triangle des puissances
Résistance R	$P = RI^2 = U^2/R$	$Q = 0$	$S = P$	$S = \sqrt{P^2 + Q^2}$ $Q = P . \tan \varphi$
Inductance L	$P = 0$	$Q = L\omega I^2$	$S = Q$	
Condensateur C	$P = 0$	$Q = -U^2 C \omega$	$S = -Q$	

Théorème de Boucherot

Pour un ensemble de récepteurs : $P_t = \sum P_i$ et $Q_t = \sum Q_i$. (On présente les résultats dans un tableau et on calcule I_t et $\cos \varphi_t$.)

$$\tan \varphi_t = Q_t/P_t \Rightarrow \cos \varphi_t \text{ et } I_t = P_t/U \cos \varphi_t \text{ ou } S_t = \sqrt{P_t^2 + Q_t^2} \Rightarrow I_t = S_t/U \text{ et } \cos \varphi_t = P_t/S_t.$$

Relèvement du facteur de puissance.

Pour diminuer le courant en ligne, on ajoute un condensateur en parallèle sur le récepteur.

$Q' \downarrow \Rightarrow S' \downarrow \Rightarrow I' = S'/U \downarrow$ et $\cos \varphi' = P'/S' \downarrow$ ($P' = P$)

La puissance active reste inchangée car $P_c = 0$.

$Q' = Q + Q_c < Q$ car $Q_c = -U^2 C \omega < 0$.

$Q' = Q + Q_c \Rightarrow P' . \tan \varphi' = P . \tan \varphi - U^2 C \omega$

Calcul de C : $C = (P(\tan \varphi - \tan \varphi')) / U^2 \omega$

