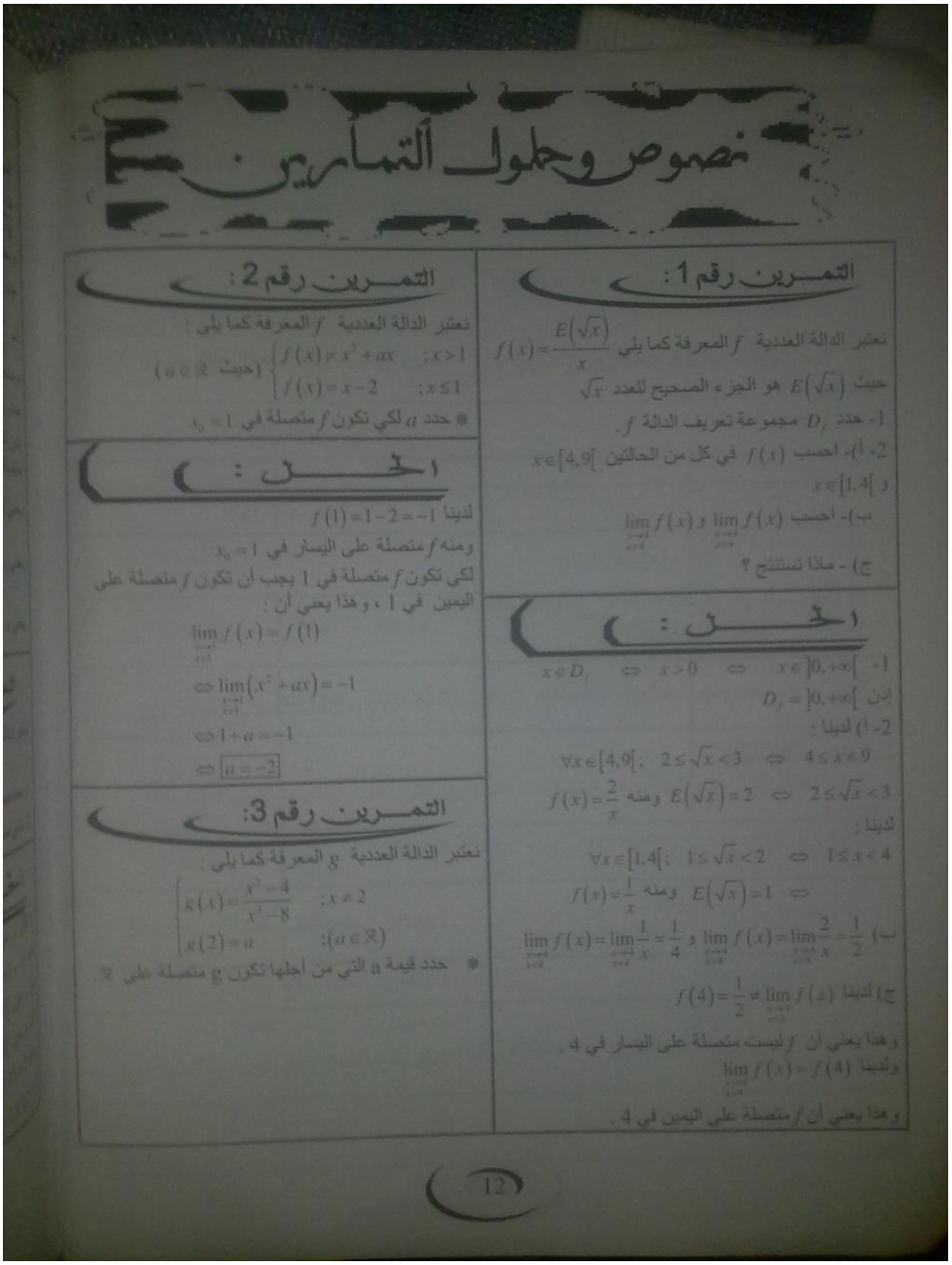
سلسلة
لنيل شهادة
البكالوريا
20/20
الرياضيات
السنة الثانية من سلك البكالوريا
شعبة العلوم التجريبية
شعبة العلوم والتكنولوجيات الصناعية
• معارف أساسية
• تمارين محلولة
• تمارين للبحث
2 باك

www.9alami.com

الفهرس

رقم الدرس	اسم الدرس	تمارين أساسية	نصوص وحلول التمارين	تمارين للبحث
	مقدمة	2		
	الفهرس	3		
1	الاتصال والاشتقاق ودراسة الدوال	4	12	43
2	المتتاليات العددية	45	48	57
3	الدوال الأصلية	60	62	71
4	الدوال اللوغاريتيمة والدوال الأسية : الجزء الأول : الدوال اللوغاريتية	73	77	93
	الدوال اللوغاريتيمة والدوال الأسية : الجزء الثاني : الدوال الأسية	96	99	134
5	المعادلات التفاضلية	137	139	145
6	حساب التكاملات	147	151	164
7	الأعداد العقدية	166	174	188
8	التعداد	192	198	206
9	الاحتمالات	208	214	227
10	المتغيرات العشوائية والقانون الحداني	230	234	252
11	الجداء السلمي في الفضاء وتطبيقاته	255	262	270
12	الجداء المتجهي	273	277	290



نصوص وحلول التمارين

التمرين رقم 1 :

نعتبر الدالة العددية f المعرفة كما يلي $f(x)=\dfrac{E(\sqrt{x})}{x}$

حيث $E(\sqrt{x})$ هو الجزء الصحيح للعدد $\sqrt{x}$

1- حدد D_f مجموعة تعريف الدالة f.

2-أ)- احسب $f(x)$ في كل من الحالتين $x\in[4,9[$ و $x\in[1,4[$

ب)- احسب $\lim\limits_{\substack{x\to 4\\ x>4}} f(x)$ و $\lim\limits_{\substack{x\to 4\\ x<4}} f(x)$

ج) - ماذا تستنتج ؟

حل :

1- $x\in D_f \Leftrightarrow x>0 \Leftrightarrow x\in]0,+\infty[$

إذن $D_f=]0,+\infty[$

2-أ) لدينا :

$\forall x\in[4,9[\;;\; 2\le\sqrt{x}<3 \Leftrightarrow 4\le x<9$

ومنه $E(\sqrt{x})=2 \Leftrightarrow 2\le\sqrt{x}<3$ و $f(x)=\dfrac{2}{x}$

لدينا :

$\forall x\in[1,4[\;;\; 1\le\sqrt{x}<2 \Leftrightarrow 1\le x<4$

ومنه $E(\sqrt{x})=1 \Leftrightarrow$ $f(x)=\dfrac{1}{x}$

ب) $\lim\limits_{\substack{x\to 4\\ x<4}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 4\\ x<4}}\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{4}$ و $\lim\limits_{\substack{x\to 4\\ x>4}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 4\\ x>4}}\dfrac{2}{x}=\dfrac{1}{2}$

ج) لدينا $f(4)=\dfrac{1}{2}\neq\lim\limits_{\substack{x\to 4\\ x<4}} f(x)$

وهذا يعني أن f ليست متصلة على اليسار في 4 .

ولدينا $\lim\limits_{\substack{x\to 4\\ x>4}} f(x)=f(4)$

وهذا يعني أن f متصلة على اليمين في 4 .

التمرين رقم 2 :

نعتبر الدالة العددية f المعرفة كما يلي :

$$\begin{cases} f(x)=x^2+ax & ;x>1\\ f(x)=x-2 & ;x\le 1\end{cases}\quad (a\in\mathbb{R}\text{ حيث})$$

* حدد a لكي تكون f متصلة في $x_0=1$

الحل :

لدينا $f(1)=1-2=-1$

ومنه f متصلة على اليسار في $x_0=1$

لكي تكون f متصلة في 1 يجب أن تكون f متصلة على اليمين في 1 ، وهذا يعني أن :

$\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x)=f(1)$

$\Leftrightarrow \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}(x^2+ax)=-1$

$\Leftrightarrow 1+a=-1$

$\Leftrightarrow \boxed{a=-2}$

التمرين رقم 3:

نعتبر الدالة العددية g المعرفة كما يلي :

$$\begin{cases} g(x)=\dfrac{x^2-4}{x^3-8} & ;x\neq 2\\ g(2)=a & ;(a\in\mathbb{R})\end{cases}$$

* حدد قيمة a التي من اجلها تكون g متصلة على $\mathbb{R}$.

الحـــــل :

$D_g = \mathbb{R}$: لدينا

$\forall x \in]-\infty,2[\; ; \; g(x) = \frac{x^2-4}{x^3-8}$

ومنه g دالة متصلة على المجال $]-\infty,2[$ لأنها دالة حدرية و $]-\infty,2[\subset D_g - \{2\}$

ثم $\forall x \in]2,+\infty[\; ; \; g(x) = \frac{x^2-4}{x^3-8}$

ومنه g دالة متصلة على المجال $]2,+\infty[$ لأنها دالة حدرية و $]2,+\infty[\subset D_g - \{2\}$

إذن لكي تكون g دالة متصلة على $\mathbb{R}$ يجب أن تكون متصلة في 2 .

$\lim_{x \to 2} g(x) = g(2)$ يعني $\lim_{x \to 2} \frac{x^2-4}{x^3-8} = a$ يعني

$\lim_{x \to 2} \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x^2+2x+4)} = a$ يعني

$\lim_{x \to 2} \frac{x+2}{x^2+2x+4} = a$ يعني $a = \frac{1}{3}$

التمـــرين رقم 4:

نعتبر الدالة العددية f المعرفة كما يلي :

$f(x) = E(x)$

1- حدد صورة المجال $[-1,2]$ بالدالة f

2- أنشئ منحنى الدالة f على المجال $[-1,2]$.

الحـــــل :

1- لكل x من $[-1,0[$

لدينا $E(x) = -1$

لكل x من $[0,1[$ لدينا $E(x) = 0$

لكل x من $[1,2[$ لدينا $E(x) = 1$

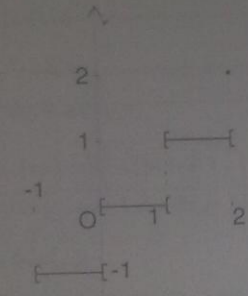
ولدينا $E(2) = 2$

إذن $f([-1,2]) = E([-1,2]) = \{-1,0,1,2\}$

2- الإنشاء :

$$f(x) = \begin{cases} -1 & ; \; x \in [-1,0[\\ 0 & ; \; x \in [0,1[\\ 1 & ; \; x \in [1,2[\\ 2 & ; \; x = 2 \end{cases}$$ لدينا :

ومنه



التمـــرين رقم 5:

نعتبر الدالة العددية f التي جدول تغيراتها هو :

x	$-\infty$	-1	0	1	4	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$ ↘	5 ↘	3	$+\infty$ ↘	-2 ↗	0 ↗ 12

* حدد بالدالة f صورة كل من المجالات $I = [1,4]$ و $J = [-1,0[$ و $K =]0,+\infty[$.

الحل :

لدينا f متصلة على كل من المجالات المقترحة.

- صورة المجال I :

f تزايدية على المجال I

إذن $f(I)=f([1,4])=[f(1),f(4)]$

يعني $f(I)=[-2,0]$

- صورة المجال J :

f تناقصية على المجال J

إذن $f(J)=f([-1,0[)=\left]\lim_{x\to 0^-} f(x),f(-1)\right]$

$=]3,5]$

- صورة المجال K :

f ليست رتيبة على المجال K ، لكن f تناقصية على المجال $]0,1]$ وتزايدية على المجال $[1,+\infty[$

إذن $f(K)=f(]0,1])\cup f([1,+\infty[)$

$=\left[f(1),\lim_{x\to 0^+} f(x)\right[\cup\left[f(1),\lim_{x\to+\infty} f(x)\right[$

$=[2,+\infty[\cup[-2,12[$

$=[-2,+\infty[$

التمرين رقم 6:

بين أن المعادلة $x^3-6x^2+6=0$ تقبل على الأقل حلا α في المجال $[1,2]$ ، ثم اعط تأطيرا للعدد α بالدقة 5.10^{-1}

الحل :

نضع $f(x)=x^3-6x^2+6$

f متصلة على $\mathbb{R}$ لأنها دالة حدودية ومنه f متصلة على المجال $[1,2]$.

ثم لدينا $f(1)=1>0$ و $f(2)=-10<0$

إذن $f(1).f(2)<0$

ومنه حسب مبرهنة القيم الوسيطية يوجد على الأقل حلا α للمعادلة $f(x)=0$ على المجال $]1,2[$

لدينا $m=\frac{1+2}{2}=\frac{3}{2}$ مركز المجال $[1,2]$

ولدينا $f\left(\frac{3}{2}\right)=-4,125<0$

و $f(1)>0$

إذن $\alpha\in\left]1,\frac{3}{2}\right[$

يعني $1<\alpha<\frac{3}{2}$ أي $1<\alpha<1,5$

وهذا تأطير للعدد α بالسعة $1,5-1=0,5$

$=5.10^{-1}$

التمرين رقم 7:

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $I=\left[-\frac{1}{2},3\right]$

بما يلي : $f(x)=\frac{x+3}{x+1}$

1- بين أن f تقابل من I إلى مجال J يتم تحديده .

2- أنشئ $(\mathcal{C}_f)$ و $(\mathcal{C}_{f^{-1}})$ منحنيي f و f^{-1} على التوالي في نفس المعلم المتعامد الممنظم .

3- حدد $f^{-1}(x)$: $(\forall x\in J)$

الحل :

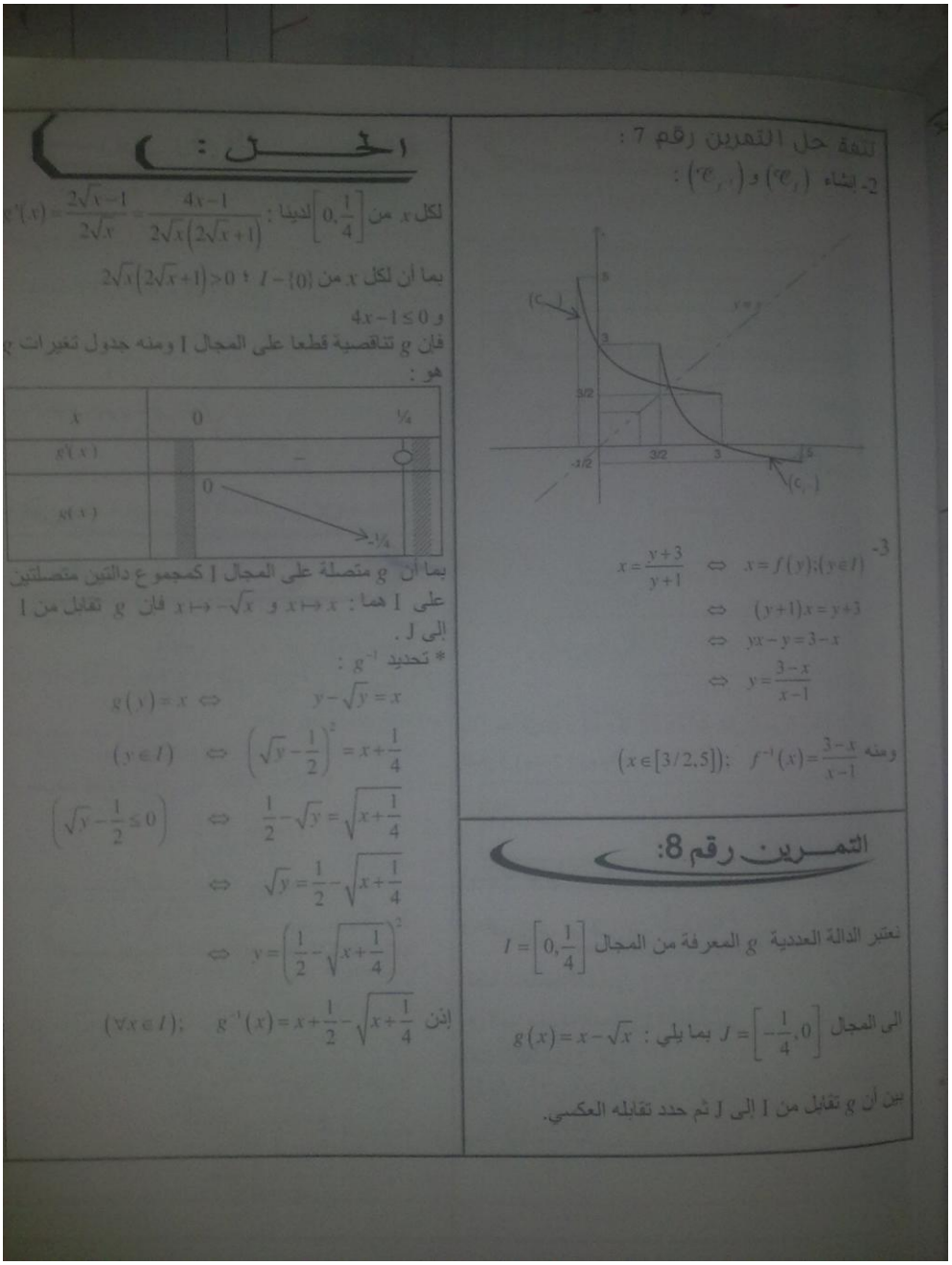
1- لدينا لكل x من $\left[-\frac{1}{2},3\right]$: $f'(x)=\frac{-2}{(x+1)^2}<0$

إذن جدول تغيرات f هو :

x	$-\frac{1}{2}$		3
$f'(x)$		$-$	
$f(x)$	5	↘	$3/2$

f متصلة على I (لأنها دالة جذرية و $I\subset D_f$)

و f تناقصية قطعا على المجال I ، إذن f تقابل من I الى $J=f(I)=\left[\frac{3}{2},5\right]$



لتتمة حل التمرين رقم 7 :

2- إنشاء $(\mathcal{C}_f)$ و $(\mathcal{C}_{f^{-1}})$:

3- $x=\frac{y+3}{y+1} \Leftrightarrow x=f(y);(y\in I)$

$\Leftrightarrow (y+1)x=y+3$

$\Leftrightarrow yx-y=3-x$

$\Leftrightarrow y=\frac{3-x}{x-1}$

ومنه $f^{-1}(x)=\frac{3-x}{x-1}$; $(x\in[3/2,5])$

التمرين رقم 8:

نعتبر الدالة العددية g المعرفة من المجال $I=\left[0,\frac{1}{4}\right]$ الى المجال $J=\left[-\frac{1}{4},0\right]$ بما يلي : $g(x)=x-\sqrt{x}$

بين أن g تقابل من I إلى J ثم حدد تقابله العكسي.

الحل :

لكل x من $\left[0,\frac{1}{4}\right]$ لدينا : $g'(x)=\frac{2\sqrt{x}-1}{2\sqrt{x}}=\frac{4x-1}{2\sqrt{x}(2\sqrt{x}+1)}$

بما أن لكل x من $I-\{0\}$; $2\sqrt{x}(2\sqrt{x}+1)>0$

و $4x-1\le 0$

فإن g تناقصية قطعا على المجال I ومنه جدول تغيرات g هو :

x	0	$\frac{1}{4}$
$g'(x)$	‖	−
$g(x)$	‖ 0 ↘	$-\frac{1}{4}$

بما أن g متصلة على المجال I كمجموع دالتين متصلتين على I هما : $x\mapsto x$ و $x\mapsto -\sqrt{x}$ فان g تقابل من I إلى J .

* تحديد g^{-1} :

$g(x)=x \Leftrightarrow y-\sqrt{y}=x$

$(y\in I) \Leftrightarrow \left(\sqrt{y}-\frac{1}{2}\right)^2=x+\frac{1}{4}$

$\left(\sqrt{y}-\frac{1}{2}\le 0\right) \Leftrightarrow \frac{1}{2}-\sqrt{y}=\sqrt{x+\frac{1}{4}}$

$\Leftrightarrow \sqrt{y}=\frac{1}{2}-\sqrt{x+\frac{1}{4}}$

$\Leftrightarrow y=\left(\frac{1}{2}-\sqrt{x+\frac{1}{4}}\right)^2$

إذن $(\forall x\in J);\ g^{-1}(x)=x+\frac{1}{2}-\sqrt{x+\frac{1}{4}}$

التمرين رقم 9:

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $]-1,+\infty[$ بما يلي : $f(x)=\frac{x+2}{\sqrt{x+1}}-2$

1- احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x>-1}} f(x)$

2- أ) بين أن $f'(x)=\frac{x}{2(x+1)\sqrt{x+1}}$

ب) ضع جدول تغيرات f.

3- أ) احسب f'' (المشتقة الثانية ل f)

ب) استنتج زوج احداثيتي I نقطة انعطاف $(\mathscr{C}_f)$ منحنى f

ج) حدد معادلة المماس (T) للمنحنى $(\mathscr{C}_f)$

الحل :

1- * حساب $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x>-1}} f(x)$:

لدينا $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x>-1}}\sqrt{x+1}=0^+$ و $\lim\limits_{x\to-1}(x+2)=1$

ومنه $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x>-1}} f(x)=+\infty$

* حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+2}{\sqrt{x+1}}-2$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+2/\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}\sqrt{1+1/x}}-2$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}+2/\sqrt{x}}{\sqrt{1+1/x}}-2$$
$$=+\infty$$

1- $f'(x)=\frac{(x+2)'\sqrt{x+1}-(x+2)\left(\sqrt{x+1}\right)'}{x+1}$

$$=\frac{\sqrt{x+1}-\frac{x+2}{2\sqrt{x+1}}}{x+1}$$
$$=\frac{x}{2(x+1)\sqrt{x+1}}$$

ب) بما أن $2(x+1)\sqrt{x+1}>0$ فإن إشارة $f'(x)$ هي إشارة x ومنه : $\forall x\in]-1,0]\ ;\ f'(x)\le 0$ *

$\forall x\in[0,+\infty[\ ;\ f'(x)\ge 0$ *

جدول تغيرات f هو :

x	-1		0		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

3- أ)

$$f''(x)=(f'(x))'=\left(\frac{x}{2(x+1)\sqrt{x+1}}\right)'$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\sqrt{(x+1)^3}}\right)'$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{(x+1)^3}-x\frac{3(x+1)^2}{2\sqrt{(x+1)^3}}}{(x+1)^3}$$
$$=\frac{2-x}{4(x+1)^2\sqrt{x+1}}$$

ب) بما أن $4(x+1)^2\sqrt{x+1}>0$ فإن إشارة $f''(x)$ هي إشارة $(2-x)$ ومنه :

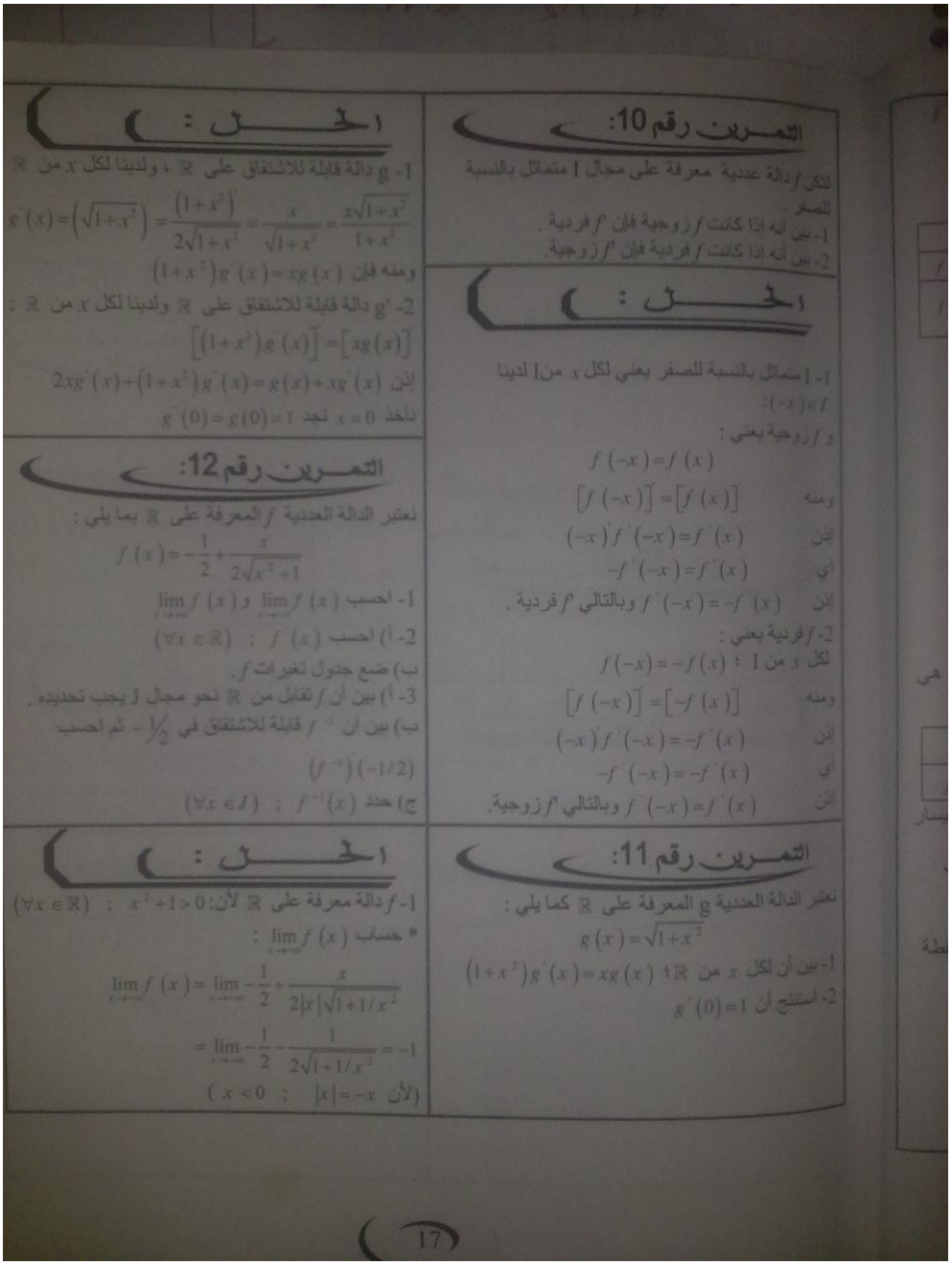
x	-1		2		$+\infty$
$f''(x)$	‖	$+$	0	$-$	

المشتقة الثانية f'' تنعدم في 2 وتغير إشارتها على اليسار وعلى اليمين في 2 ، إذن النقطة $I\left(2,\frac{4\sqrt{3}-6}{3}\right)$ هي نقطة انعطاف للمنحنى $(\mathscr{C}_f)$.

ج) لدينا معادلة المماس (T) للمنحنى $(\mathscr{C}_f)$ عند النقطة ذات الأفصول 2 هي :

(T): $y=f'(2)(x-2)+f(2)$

ومنه (T): $y=\frac{\sqrt{3}}{9}x+\frac{10\sqrt{3}-18}{9}$



التمرين رقم 10:

لتكن f دالة عددية معرفة على مجال I متماثل بالنسبة للصفر .

1- بين أنه إذا كانت f زوجية فإن f' فردية .

2- بين أنه إذا كانت f فردية فإن f' زوجية.

الحل :

1- I متماثل بالنسبة للصفر يعني لكل x من I لدينا $-x \in I$:

و f زوجية يعني :

$$f(-x)=f(x)$$

ومنه $[f(-x)]'=[f(x)]'$

إذن $(-x)'f'(-x)=f'(x)$

أي $-f'(-x)=f'(x)$

إذن $f'(-x)=-f'(x)$ وبالتالي f' فردية .

2- f فردية يعني :

لكل x من I ؛ $f(-x)=-f(x)$

ومنه $[f(-x)]'=[-f(x)]'$

إذن $(-x)'f'(-x)=-f'(x)$

أي $-f'(-x)=-f'(x)$

إذن $f'(-x)=f'(x)$ وبالتالي f' زوجية.

التمرين رقم 11:

نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي :

$$g(x)=\sqrt{1+x^2}$$

1- بين أن لكل x من $\mathbb{R}$ ؛ $(1+x^2)g'(x)=xg(x)$

2- استنتج أن $g'(0)=1$

الحل :

1- g دالة قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ، ولدينا لكل x من $\mathbb{R}$

$$g'(x)=\left(\sqrt{1+x^2}\right)'=\frac{(1+x^2)'}{2\sqrt{1+x^2}}=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}=\frac{x\sqrt{1+x^2}}{1+x^2}$$

ومنه فإن $(1+x^2)g'(x)=xg(x)$

2- g' دالة قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا لكل x من $\mathbb{R}$:

$$\left[(1+x^2)g'(x)\right]'=\left[xg(x)\right]'$$

إذن $2xg'(x)+(1+x^2)g''(x)=g(x)+xg'(x)$

نأخذ $x=0$ نجد $g''(0)=g(0)=1$

التمرين رقم 12:

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي :

$$f(x)=-\frac{1}{2}+\frac{x}{2\sqrt{x^2+1}}$$

1- احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

2- أ) احسب $f'(x)$ ؛ $(\forall x\in\mathbb{R})$

ب) ضع جدول تغيرات f.

3- أ) بين أن f تقابل من $\mathbb{R}$ نحو مجال J يجب تحديده .

ب) بين أن f^{-1} قابلة للاشتقاق في $-1/2$ ثم احسب $(f^{-1})'(-1/2)$

ج) حدد $(f^{-1})'(x)$ ؛ $(\forall x\in J)$

الحل :

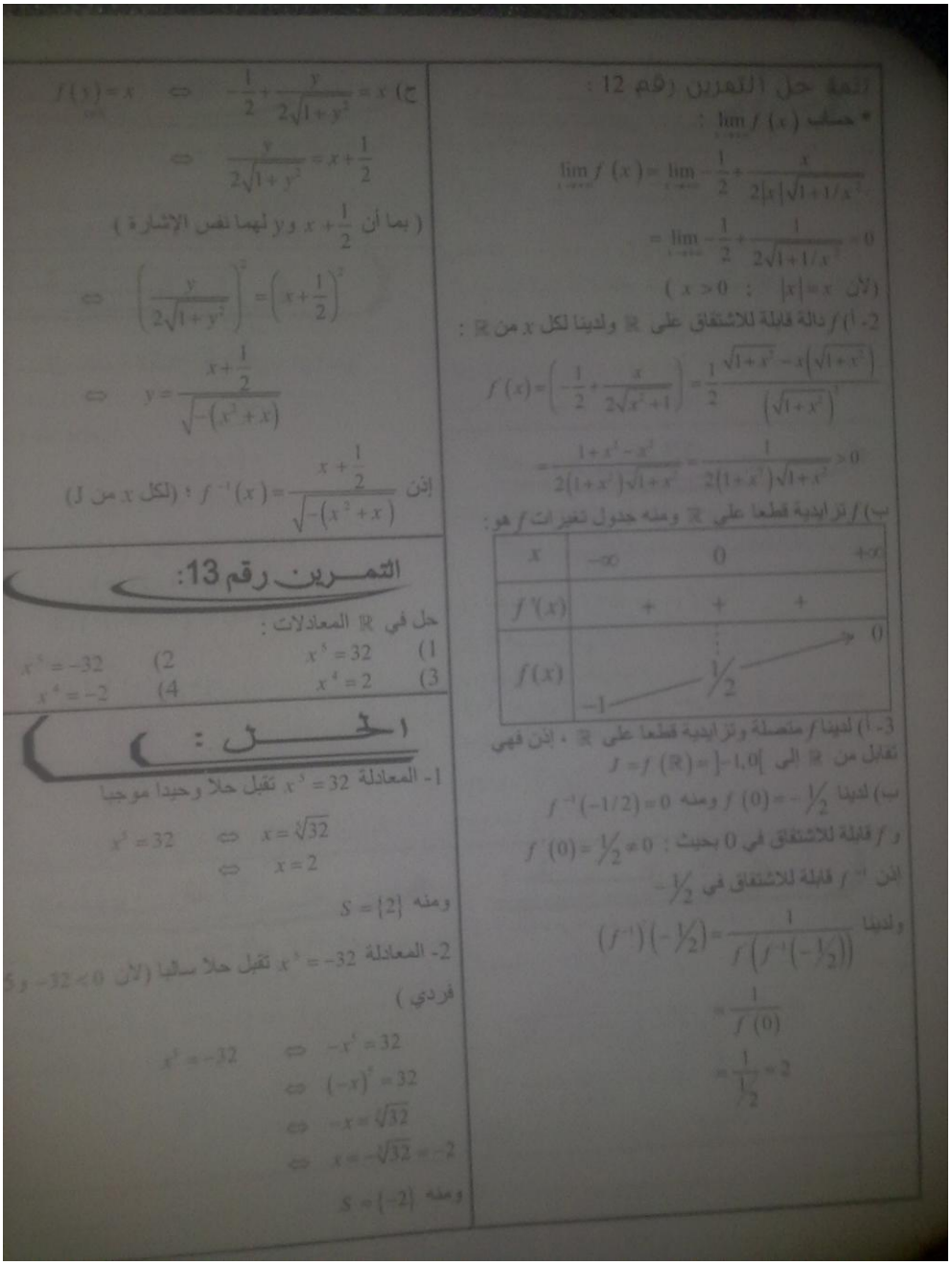
1- f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ لأن: $(\forall x\in\mathbb{R})$ ؛ $x^2+1>0$

* حساب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} -\frac{1}{2}+\frac{x}{2|x|\sqrt{1+1/x^2}}$$

$$=\lim_{x\to-\infty} -\frac{1}{2}-\frac{1}{2\sqrt{1+1/x^2}}=-1$$

(لأن $|x|=-x$ ؛ $x<0$)



بقية حل التمرين رقم 12 :

• حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} -\frac{1}{2}+\frac{x}{2|x|\sqrt{1+1/x^2}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} -\frac{1}{2}+\frac{1}{2\sqrt{1+1/x^2}} = 0$$

(لأن $x>0$: $|x|=x$)

2-أ) f دالة قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا لكل x من $\mathbb{R}$:

$$f'(x)=\left(-\frac{1}{2}+\frac{x}{2\sqrt{x^2+1}}\right)'=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{1+x^2}-x\left(\sqrt{1+x^2}\right)'}{\left(\sqrt{1+x^2}\right)^2}$$

$$=\frac{1+x^2-x^2}{2(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}=\frac{1}{2(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}>0$$

ب) f تزايدية قطعا على $\mathbb{R}$ ومنه جدول تغيرات f هو:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		+		+	
$f(x)$	-1	↗	$\frac{1}{2}$	↗	0

3-أ) لدينا f متصلة وتزايدية قطعا على $\mathbb{R}$ ، إذن فهي تقابل من $\mathbb{R}$ الى $J=f(\mathbb{R})=]-1,0[$

ب) لدينا $f(0)=-\frac{1}{2}$ ومنه $f^{-1}(-1/2)=0$

و f قابلة للاشتقاق في 0 بحيث : $f'(0)=\frac{1}{2}\neq 0$

إذن f^{-1} قابلة للاشتقاق في $-\frac{1}{2}$

ولدينا $(f^{-1})'(-\frac{1}{2})=\frac{1}{f'\left(f^{-1}(-\frac{1}{2})\right)}$

$$=\frac{1}{f'(0)}$$

$$=\frac{1}{\frac{1}{2}}=2$$

c) $f(x)=x \Leftrightarrow -\frac{1}{2}+\frac{x}{2\sqrt{1+x^2}}=x$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{2\sqrt{1+x^2}}=x+\frac{1}{2}$$

(بما أن $x+\frac{1}{2}$ و y لهما نفس الإشارة)

$$\Leftrightarrow \left(\frac{x}{2\sqrt{1+x^2}}\right)^2=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow y=\frac{x+\frac{1}{2}}{\sqrt{-(x^2+x)}}$$

إذن $f^{-1}(x)=\frac{x+\frac{1}{2}}{\sqrt{-(x^2+x)}}$ ؛ (لكل x من J)

التمرين رقم 13:

حل في $\mathbb{R}$ المعادلات :

1) $x^5=32$ 2) $x^5=-32$

3) $x^4=2$ 4) $x^4=-2$

الحل :

1- المعادلة $x^5=32$ تقبل حلا وحيدا موجبا

$$x^5=32 \Leftrightarrow x=\sqrt[5]{32}$$

$$\Leftrightarrow x=2$$

ومنه $S=\{2\}$

2- المعادلة $x^5=-32$ تقبل حلا سالبا (لأن $-32<0$ و 5 فردي)

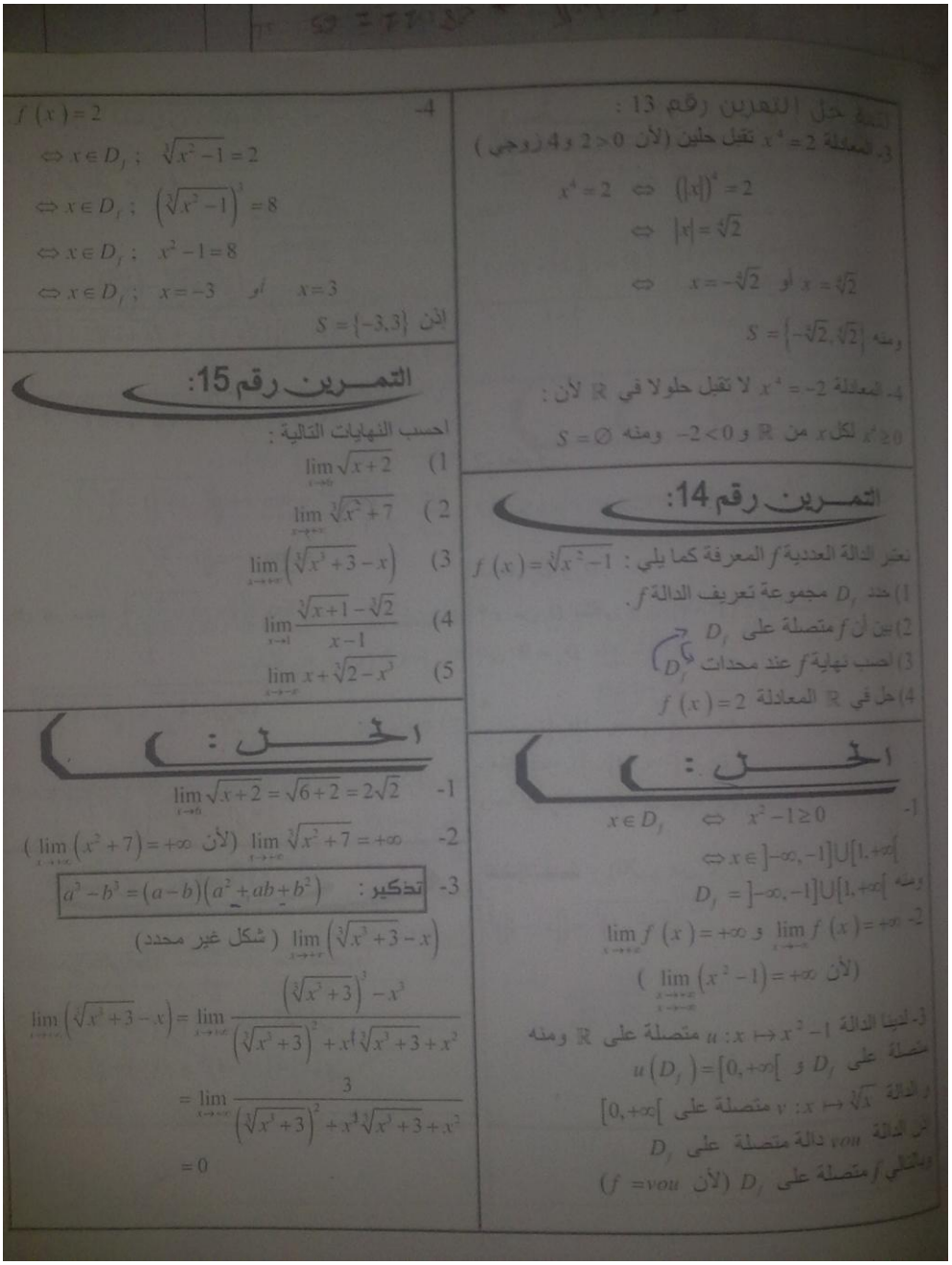
$$x^5=-32 \Leftrightarrow -x^5=32$$

$$\Leftrightarrow (-x)^5=32$$

$$\Leftrightarrow -x=\sqrt[5]{32}$$

$$\Leftrightarrow x=-\sqrt[5]{32}=-2$$

ومنه $S=\{-2\}$



بقية حل التمرين رقم 13 :

3- المعادلة $x^4=2$ تقبل حلين (لأن $0>2$ و 4 زوجي)

$x^4=2 \Leftrightarrow (|x|)^4=2$

$\Leftrightarrow |x|=\sqrt[4]{2}$

$\Leftrightarrow x=-\sqrt[4]{2}$ أو $x=\sqrt[4]{2}$

ومنه $S=\{-\sqrt[4]{2},\sqrt[4]{2}\}$

4- المعادلة $x^4=-2$ لا تقبل حلولا في $\mathbb{R}$ لأن :

$x^4\geq 0$ لكل x من $\mathbb{R}$ و $0>-2$ ومنه $S=\varnothing$

التمرين رقم 14:

نعتبر الدالة العددية f المعرفة كما يلي : $f(x)=\sqrt[3]{x^2-1}$

1) حدد D_f مجموعة تعريف الدالة f.

2) بين أن f متصلة على D_f

3) احسب نهايات f عند محدات D_f

4) حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $f(x)=2$

الحل :

1- $x\in D_f \Leftrightarrow x^2-1\geq 0$

$\Leftrightarrow x\in]-\infty,-1]\cup[1,+\infty[$

ومنه $D_f=]-\infty,-1]\cup[1,+\infty[$

2- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$

(لأن $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ x\to-\infty}}(x^2-1)=+\infty$)

3- لتكن الدالة $u: x\mapsto x^2-1$ متصلة على $\mathbb{R}$ ومنه

متصلة على D_f و $u(D_f)=[0,+\infty[$

و الدالة $v: x\mapsto \sqrt[3]{x}$ متصلة على $[0,+\infty[$

ثم الدالة vou دالة متصلة على D_f

وبالتالي f متصلة على D_f (لأن $f=vou$)

4- $f(x)=2$

$\Leftrightarrow x\in D_f$; $\sqrt[3]{x^2-1}=2$

$\Leftrightarrow x\in D_f$; $\left(\sqrt[3]{x^2-1}\right)^3=8$

$\Leftrightarrow x\in D_f$; $x^2-1=8$

$\Leftrightarrow x\in D_f$; $x=-3$ أو $x=3$

إذن $S=\{-3,3\}$

التمرين رقم 15:

احسب النهايات التالية :

1) $\lim\limits_{x\to 6}\sqrt{x+2}$

2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x^2+7}$

3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+3}-x\right)$

4) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{2}}{x-1}$

5) $\lim\limits_{x\to-\infty} x+\sqrt[3]{2-x^3}$

الحل :

1- $\lim\limits_{x\to 6}\sqrt{x+2}=\sqrt{6+2}=2\sqrt{2}$

2- $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x^2+7}=+\infty$ (لأن $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2+7)=+\infty$)

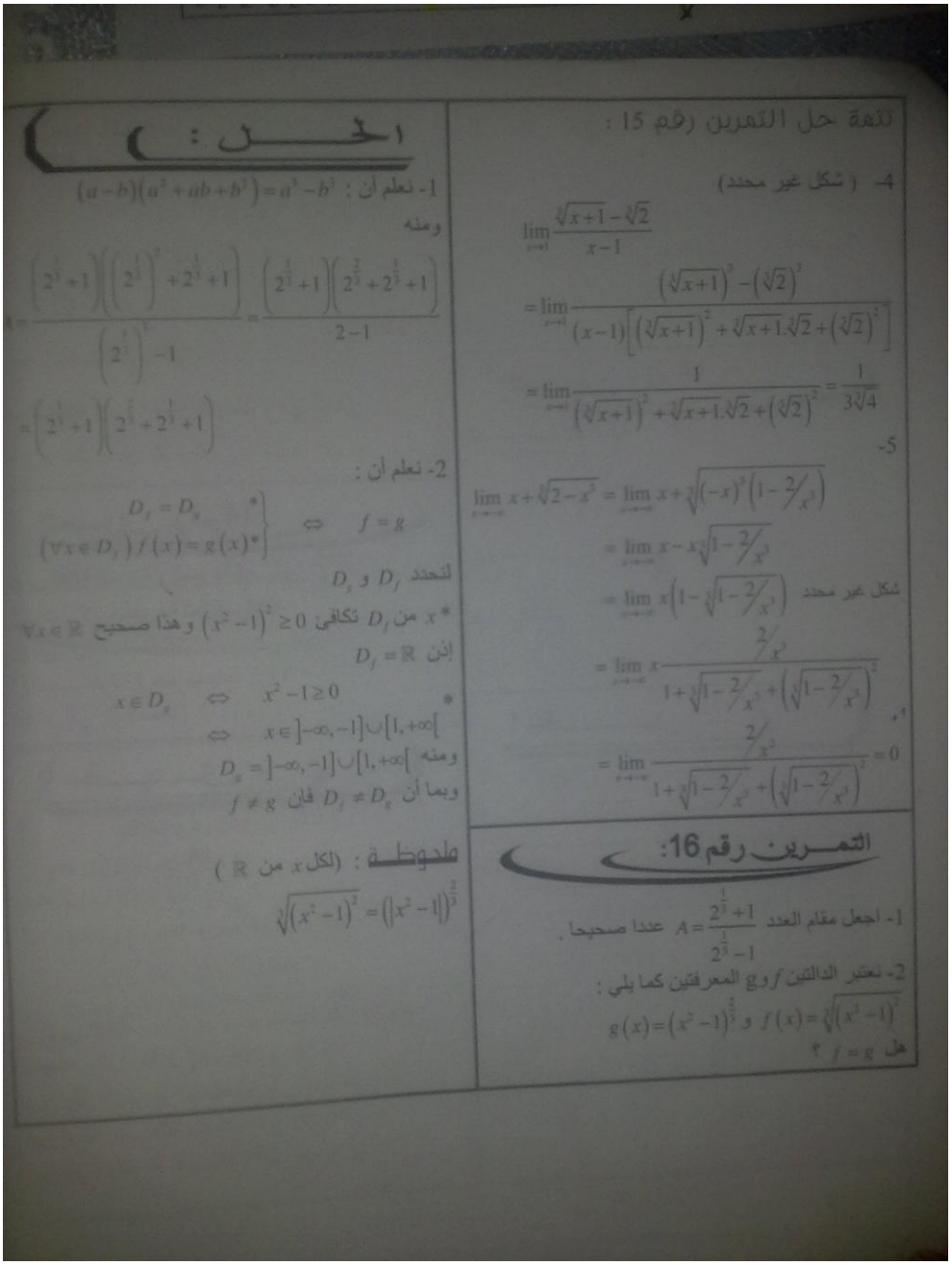
3- تذكير : $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+3}-x\right)$ (شكل غير محدد)

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+3}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt[3]{x^3+3}\right)^3-x^3}{\left(\sqrt[3]{x^3+3}\right)^2+x\sqrt[3]{x^3+3}+x^2}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{3}{\left(\sqrt[3]{x^3+3}\right)^2+x\sqrt[3]{x^3+3}+x^2}$$

$=0$



تتمة حل التمرين رقم 15 :

4- (شكل غير محدد)

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{2}}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\left(\sqrt[3]{x+1}\right)^3-\left(\sqrt[3]{2}\right)^3}{(x-1)\left[\left(\sqrt[3]{x+1}\right)^2+\sqrt[3]{x+1}.\sqrt[3]{2}+\left(\sqrt[3]{2}\right)^2\right]}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{1}{\left(\sqrt[3]{x+1}\right)^2+\sqrt[3]{x+1}.\sqrt[3]{2}+\left(\sqrt[3]{2}\right)^2}=\frac{1}{3\sqrt[3]{4}}$$

-5

$$\lim_{x\to-\infty}x+\sqrt[3]{2-x^3}=\lim_{x\to-\infty}x+\sqrt[3]{(-x)^3\left(1-\frac{2}{x^3}\right)}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}x-x\sqrt[3]{1-\frac{2}{x^3}}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}x\left(1-\sqrt[3]{1-\frac{2}{x^3}}\right)$$ شكل غير محدد

$$=\lim_{x\to-\infty}x\frac{\frac{2}{x^3}}{1+\sqrt[3]{1-\frac{2}{x^3}}+\left(\sqrt[3]{1-\frac{2}{x^3}}\right)^2}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{2}{x^2}}{1+\sqrt[3]{1-\frac{2}{x^3}}+\left(\sqrt[3]{1-\frac{2}{x^3}}\right)^2}=0$$

التمرين رقم 16:

1- اجعل مقام العدد $A=\frac{2^{\frac{1}{3}}+1}{2^{\frac{1}{3}}-1}$ عندا صحيحا .

2- نعتبر الدالتين f و g المعرفتين كما يلي :

$f(x)=\sqrt[3]{(x^2-1)^2}$ و $g(x)=(x^2-1)^{\frac{2}{3}}$

هل $f=g$ ؟

الحل :

1- نعلم أن : $(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$

ومنه

$$A=\frac{\left(2^{\frac{1}{3}}+1\right)\left(\left(2^{\frac{1}{3}}\right)^2+2^{\frac{1}{3}}+1\right)}{\left(2^{\frac{1}{3}}\right)^3-1}=\frac{\left(2^{\frac{1}{3}}+1\right)\left(2^{\frac{2}{3}}+2^{\frac{1}{3}}+1\right)}{2-1}$$

$$=\left(2^{\frac{1}{3}}+1\right)\left(2^{\frac{2}{3}}+2^{\frac{1}{3}}+1\right)$$

2- نعلم أن :

$$\left.\begin{array}{l}D_f=D_g\\(\forall x\in D_f)\ f(x)=g(x)^*\end{array}\right\}\Leftrightarrow\ f=g$$

لتحدد D_f و D_g

x^* من D_f تكافئ $(x^2-1)^2\geq 0$ وهذا صحيح $\forall x\in\mathbb{R}$

إذن $D_f=\mathbb{R}$

$$x\in D_g\ \Leftrightarrow\ x^2-1\geq 0\quad *$$

$$\Leftrightarrow\ x\in]-\infty,-1]\cup[1,+\infty[$$

ومنه $D_g=]-\infty,-1]\cup[1,+\infty[$

وبما أن $D_f\neq D_g$ فان $f\neq g$

ملحوظة : (لكل x من $\mathbb{R}$)

$$\sqrt[3]{(x^2-1)^2}=\left(|x^2-1|\right)^{\frac{2}{3}}$$

تمرين رقم 17:

نعتبر الدالة العددية f المعرفة كما يلي : $f(x)=\sqrt[3]{x^2}$

1- حدد D_f مجموعة تعريف f.

2- احسب نهايات f عند محدات D_f .

3- أدرس قابلية اشتقاق f في 0 .

أ- احسب $f'(x)$ $\left(\forall x\in D_f^*\right)$.

ب- أعط جدول تغيرات f.

الحل :

1- تحديد D_f :

$x^2\geq 0$ يكافئ D_f من x (وهذا صحيح مهما يكن x من $\mathbb{R}$)

إذن $D_f=\mathbb{R}$

2- حساب نهايات f عند محدات D_f :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x^2}=+\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\sqrt[3]{x^2}=+\infty$$

(لأن $\lim x^2=\lim x^2=+\infty$)

3- دراسة قابلية اشتقاق f في 0 :

لدينا $f(0)=0$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$$

إذا كان $x>0$ فإن :

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{f(x)}{x}=\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{\sqrt[3]{x^2}}{x}$$

$$=\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\sqrt[3]{\frac{x^2}{x^3}}=\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\sqrt[3]{\frac{1}{x}}=+\infty$$

ومنه f غير قابلة للاشتقاق على اليمين في 0 .

إذا كان $x<0$ فإن :

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\frac{f(x)}{x}=\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\frac{\sqrt[3]{x^2}}{x}$$

$$=\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}}-\sqrt[3]{\frac{x^2}{-x^3}}=\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}}-\sqrt[3]{-\frac{1}{x}}=-\infty$$

ومنه f غير قابلة للاشتقاق على اليسار في 0 .

ب) حساب $f'(x)$ لكل x من $\mathbb{R}^*$:

f قابلة للاشتقاق على كل من المجالين $]0,+\infty[$ و $]-\infty,0[$

ولدينا $f'(x)=\left(\sqrt[3]{x^2}\right)'=\frac{\left(x^2\right)'}{3\sqrt[3]{\left(x^2\right)^2}}$

ومنه $f'(x)=\frac{2x}{3\sqrt[3]{x^4}}$

ملحوظة : بما أن : $\sqrt[3]{x^4}>0$ $\left(\forall x\in\mathbb{R}^*\right)$ ،

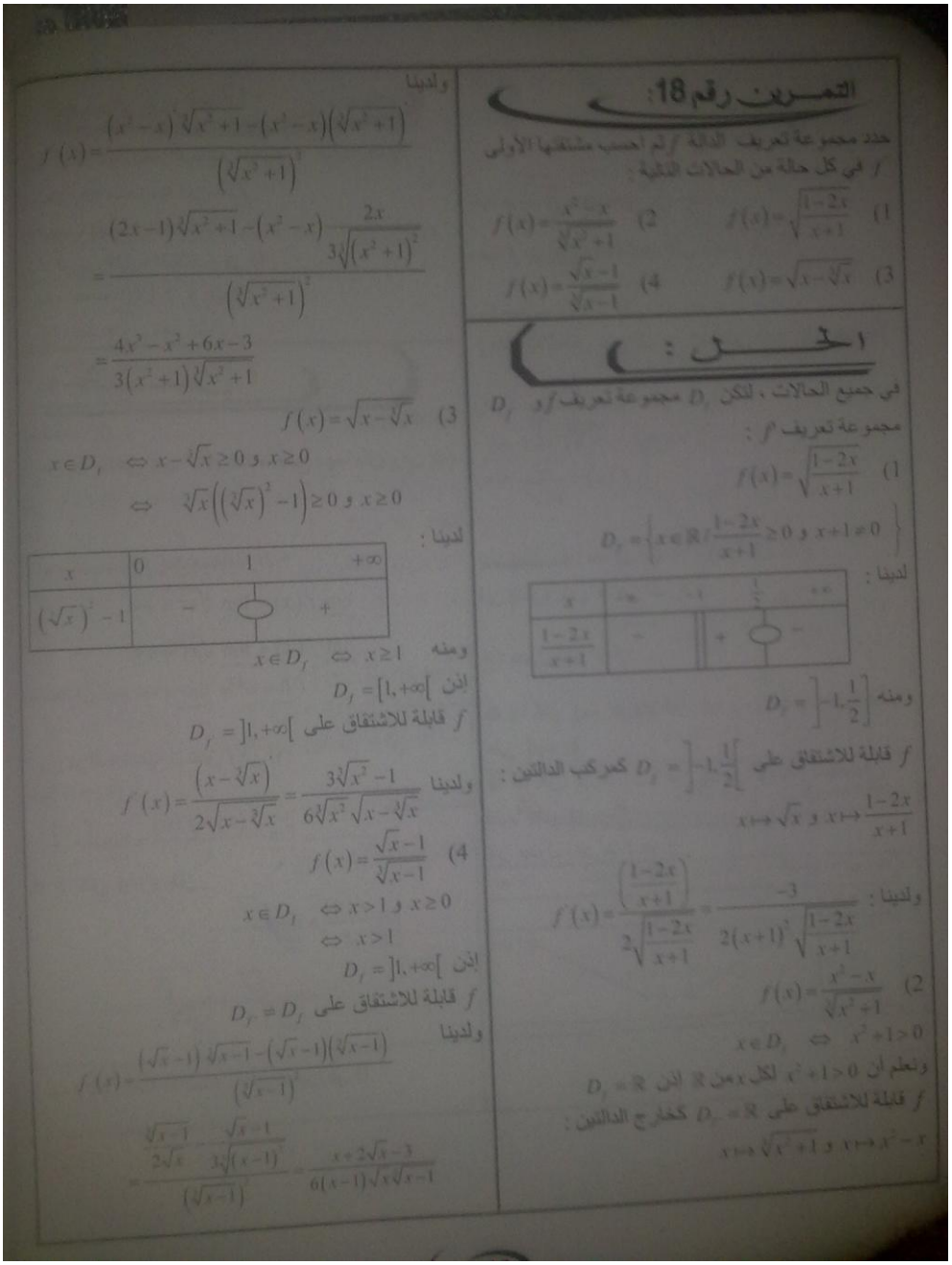
فإن إشارة $f'(x)$ هي إشارة x .

ج) جدول تغيرات f :

- إذا كان $x\in]0,+\infty[$ فإن $x>0$ ، ومنه f تزايدية قطعا على $]0,+\infty[$
- إذا كان $x\in]-\infty,0[$ فإن $x<0$ ، ومنه f تناقصية قطعا على $]-\infty,0[$

إذن جدول تغيرات f هو :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$-\infty$	$\|+\infty$	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$



التمرين رقم 18:

حدد مجموعة تعريف الدالة f ثم احسب مشتقتها الأولى f' في كل حالة من الحالات التالية :

1) $f(x)=\sqrt{\frac{1-2x}{x+1}}$

2) $f(x)=\frac{x^2-x}{\sqrt[3]{x^2+1}}$

3) $f(x)=\sqrt{x-\sqrt[3]{x}}$

4) $f(x)=\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}$

الحل :

في جميع الحالات ، لتكن D_f مجموعة تعريف f و $D_{f'}$ مجموعة تعريف f' :

1) $f(x)=\sqrt{\frac{1-2x}{x+1}}$

$$D_f=\left\{x\in\mathbb{R}\,/\,\frac{1-2x}{x+1}\geq 0\ ,\ x+1\neq 0\right\}$$

لدينا :

x	$-\infty$		-1		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$\frac{1-2x}{x+1}$	$-$	$\|\|$	$+$	$\|\|$	$+$	0	$-$

ومنه $D_f=\left]-1,\frac{1}{2}\right]$

f قابلة للاشتقاق على $D_{f'}=\left]-1,\frac{1}{2}\right[$ كمركب الدالتين : $x\mapsto\sqrt{x}$ و $x\mapsto\frac{1-2x}{x+1}$

ولدينا : $f'(x)=\frac{\left(\frac{1-2x}{x+1}\right)'}{2\sqrt{\frac{1-2x}{x+1}}}=\frac{-3}{2(x+1)^2\sqrt{\frac{1-2x}{x+1}}}$

2) $f(x)=\frac{x^2-x}{\sqrt[3]{x^2+1}}$

$x\in D_f \Leftrightarrow x^2+1>0$

ونعلم أن $x^2+1>0$ لكل x من $\mathbb{R}$ إذن $D_f=\mathbb{R}$

f قابلة للاشتقاق على $D_{f'}=\mathbb{R}$ كخارج الدالتين :

$x\mapsto\sqrt[3]{x^2+1}$ و $x\mapsto x^2-x$

ولدينا

$$f'(x)=\frac{(x^2-x)'\sqrt[3]{x^2+1}-(x^2-x)\left(\sqrt[3]{x^2+1}\right)'}{\left(\sqrt[3]{x^2+1}\right)^2}$$

$$=\frac{(2x-1)\sqrt[3]{x^2+1}-(x^2-x)\frac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2+1)^2}}}{\left(\sqrt[3]{x^2+1}\right)^2}$$

$$=\frac{4x^3-x^2+6x-3}{3(x^2+1)\sqrt[3]{x^2+1}}$$

3) $f(x)=\sqrt{x-\sqrt[3]{x}}$

$x\in D_f \Leftrightarrow x-\sqrt[3]{x}\geq 0\ ,\ x\geq 0$

$\Leftrightarrow \sqrt[3]{x}\left(\left(\sqrt[3]{x}\right)^2-1\right)\geq 0\ ,\ x\geq 0$

لدينا :

x	0		1		$+\infty$
$\left(\sqrt[3]{x}\right)^2-1$	$-$	0	$+$		

ومنه $x\in D_f \Leftrightarrow x\geq 1$

إذن $D_f=[1,+\infty[$

f قابلة للاشتقاق على $D_{f'}=]1,+\infty[$

ولدينا $f'(x)=\frac{\left(x-\sqrt[3]{x}\right)'}{2\sqrt{x-\sqrt[3]{x}}}=\frac{3\sqrt[3]{x^2}-1}{6\sqrt[3]{x^2}\sqrt{x-\sqrt[3]{x}}}$

4) $f(x)=\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}$

$x\in D_f \Leftrightarrow x>1\ ,\ x\geq 0$

$\Leftrightarrow x>1$

إذن $D_f=]1,+\infty[$

f قابلة للاشتقاق على $D_{f'}=D_f$

ولدينا

$$f'(x)=\frac{\left(\sqrt{x}-1\right)'\sqrt[3]{x}-1-\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt[3]{x}-1\right)'}{\left(\sqrt[3]{x}-1\right)^2}$$

$$=\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}\sqrt[3]{x}-1-\left(\sqrt{x}-1\right)\frac{1}{3\sqrt[3]{(x)^2}}}{\left(\sqrt[3]{x}-1\right)^2}=\frac{x+2\sqrt{x}-3}{6(x-1)\sqrt{x}\sqrt[3]{x}-1}$$

التمرين رقم 19:

لتكن f الدالة العددية المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} f(x)=3x-4 & ; \quad x\geq 2 \\ f(x)=-x+4 & ; \quad x<2 \end{cases}$$

1- انشئ منحنى الدالة f.

2- ادرس اتصال f في $x_0=2$

الحل :

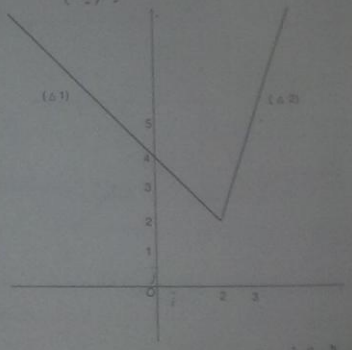
$$\begin{cases} f(x)=3x-4 & ; \quad x\geq 2 \\ f(x)=-x+4 & ; \quad x<2 \end{cases}$$

1- انشاء $(\mathcal{C})$ منحنى الدالة f:

$(\mathcal{C})$ عبارة عن اتحاد نصفي مستقيمين (Δ_1) و (Δ_2)

$(\Delta_1): y=3x-4 \quad ; \quad x\geq 2$

$(\Delta_2): y=-x+4 \quad ; \quad x<2$



2- اتصال f في $x_0=2$:

مبيانيا : نلاحظ أن منحنى f تم رسمه على $\mathbb{R}$ بدون رفع اليد وهذا يعني أن f متصلة على $\mathbb{R}$ ومنه f متصلة في $x_0=2$.

حسابيا : $f(2)=3.2-4=2$

ومنه f متصلة على اليمين في 2 .

ثم لدينا : $\lim\limits_{\substack{x\to 2 \\ x<2}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 2 \\ x<2}}(-x+4)=2=f(2)$

وهذا يعني أن f متصلة على اليسار في $x_0=2$.

اذن f متصلة في $x_0=2$.

التمرين رقم 20:

نعتبر الدالة العددية f المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{|x^2-x|}{x} & ; \quad x\neq 0 \\ f(0)=1 \end{cases}$$

هل الدالة f متصلة في $x_0=0$ ؟

الحل :

ندرس إشارة x^2-x :

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
x^2-x		$+$	$\|\|$	$-$	$\|\|$	$+$	

* اتصال f على اليمين في 0 .

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{-x^2+x}{x}$$
$$=\lim_{x\to 0^+}(1-x)$$
$$=1=f(0)$$

ومنه f متصلة على اليمين في 0 .

* اتصال f على اليسار في 0 .

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{x^2-x}{x}$$
$$=\lim_{x\to 0^-}(x-1)$$
$$=-1\neq f(0)$$

ومنه f غير متصلة على اليسار في 0 .

نتيجة : f غير متصلة في $x_0=0$.

التمرين رقم 21:

لتكن f الدالة العددية المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{\sqrt[3]{x+1}-1}{x} & ; \quad x>0 \\ f(x)=-\left(x+2\sqrt{1-x}\right) & ; \quad x<0 \\ f(0)=\dfrac{1}{3} \end{cases}$$

ادرس اتصال f في $x_0=0$

الحل :

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{\sqrt[3]{x+1}-1}{x} & ; \quad x>0 \\ f(x)=-\left(x+2\sqrt{1-x}\right) & ; \quad x<0 \\ f(0)=\dfrac{1}{3} \end{cases}$$

• اتصال f على اليمين في $x_0=0$:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt[3]{x+1}-1}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{\left(\sqrt[3]{x+1}\right)^3-1^3}{x\left(\left(\sqrt[3]{x+1}\right)^2+\sqrt[3]{x+1}+1\right)}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{\left(\sqrt[3]{x+1}\right)^2+\sqrt[3]{x+1}+1}=\frac{1}{3}=f(0)$$

ومنه f متصلة على اليمين في 0 .

• اتصال f على اليسار في 0 .

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}-\left(\left(x+2\sqrt{1-x}\right)\right)$$

$$=-2\neq f(0)$$

ومنه f غير متصلة على اليسار في 0 .

نتيجة : f ليست متصلة في $x_0=0$.

تذكير : لكل a و b عددين حقيقيين ، لدينا :

$$a-b=\frac{a^3-b^3}{a^2+ab+b^2}$$

$$a+b=\frac{a^3+b^3}{a^2-ab+b^2}$$

التمرين رقم 22:

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $[-1,3[$ بـ $f(x)=x-xE(x)$ (حيث E هي دالة الجزء الصـ

1- أنشئ منحنى الدالة f.

2- هل الدالة f متصلة في النقطتين $x_0=0$ و $x_0=1$

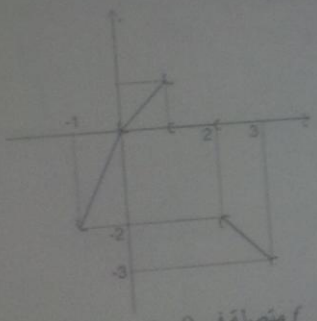
الحل :

$f(x)=x-xE(x)$-1 (حيث E هي دالة الجزء الصحيح

لدينا :

$$\begin{cases} f(x)=2x & ; \quad x\in[-1,0[\\ f(x)=x & ; \quad x\in[0,1[\\ f(x)=0 & ; \quad x\in[1,2[\\ f(x)=-x & ; \quad x\in[2,3[\end{cases}$$

ومنه منحنى f هو:



2- مبيانيا : f متصلة في 0 وغير متصلة في 1 .

حسابيا :

لدينا :

$$f(0)=0$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-} x=0$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+} 2x=0$$

ومنه f متصلة في 0 .

ثم لدينا :

$$f(1)=0$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+} 0=0=f(1)$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-} x=1\neq f(1)$$

ومنه f غير متصلة في 1 .

التمرين رقم 21:

لتكن f الدالة العددية المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{\sqrt[3]{x+1}-1}{x} & ; \quad x>0 \\ f(x)=-\left(x+2\sqrt{1-x}\right) & ; \quad x<0 \\ f(0)=\dfrac{1}{3} \end{cases}$$

ادرس اتصال f في $x_0=0$

الحل :

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{\sqrt[3]{x+1}-1}{x} & ; \quad x>0 \\ f(x)=-\left(x+2\sqrt{1-x}\right) & ; \quad x<0 \\ f(0)=\dfrac{1}{3} \end{cases}$$

* اتصال f على اليمين في $x_0=0$:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt[3]{x+1}-1}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{\left(\sqrt[3]{x+1}\right)^3-1^3}{x\left(\left(\sqrt[3]{x+1}\right)^2+\sqrt[3]{x+1}+1\right)}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{\left(\sqrt[3]{x+1}\right)^2+\sqrt[3]{x+1}+1}=\frac{1}{3}=f(0)$$

ومنه f متصلة على اليمين في 0 .

* اتصال f على اليسار في 0 .

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}-\left(\left(x+2\sqrt{1-x}\right)\right)$$

$$=-2\neq f(0)$$

ومنه f غير متصلة على اليسار في 0 .

نتيجة : f ليست متصلة في $x_0=0$.

تذكير : لكل a و b عددين حقيقيين ، لدينا :

$$a-b=\frac{a^3-b^3}{a^2+ab+b^2}$$

$$a+b=\frac{a^3+b^3}{a^2-ab+b^2}$$

التمرين رقم 22:

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $[-1,3[$ بما يلي:

$f(x)=x-xE(x)$ (حيث E هي دالة الجزء الصحيح)

1- أنشئ منحنى الدالة f.

2- هل الدالة f متصلة في النقطتين $x_0=0$ و $x_1=1$ ؟

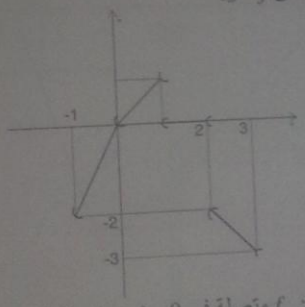
الحل :

1- $f(x)=x-xE(x)$ (حيث E هي دالة الجزء الصحيح)

لدينا :

$$\begin{cases} f(x)=2x & ; \quad x\in[-1,0[\\ f(x)=x & ; \quad x\in[0,1[\\ f(x)=0 & ; \quad x\in[1,2[\\ f(x)=-x & ; \quad x\in[2,3[\end{cases}$$

ومنه منحنى f هو:



2- مبيانيا : f متصلة في 0 وغير متصلة في 1 .

حسابيا :

لدينا :

$$f(0)=0$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+} x=0$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-} 2x=0$$

ومنه f متصلة في 0 .

ثم لدينا :

$$f(1)=0$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+} 0=0=f(1)$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-} x=1\neq f(1)$$

ومنه f غير متصلة في 1 .

التمرين رقم 23:

نعتبر الدالة العددية f المعرفة كما يلي :

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{x^2-1}{x+1} & ; \quad x\neq -1 \\ f(-1)=0 \end{cases}$$

1- هل الدالة f متصلة في -1 ؟ علل جوابك .

2- كيف يمكن اختيار قيمة $f(-1)$ لكي تكون الدالة f متصلة على $\mathbb{R}$ ؟

الحل :

1- اتصال f في (-1) :

$$\lim_{x\to -1} f(x)=\lim_{x\to -1}\frac{x^2-1}{x+1}$$

$$=\lim_{x\to -1}(x-1)$$

$$=-2\neq f(-1)$$

ومنه f غير متصلة في (-1)

2- لكي تكون الدالة f متصلة على $\mathbb{R}$ يجب أن تكون متصلة في (-1) ، لأجل ذلك يجب أن نأخذ :

$$f(-1)=\lim_{x\to -1} f(x)$$

يعني $f(-1)=-2$

التمرين رقم 24:

نعتبر الدالة العددية g المعرفة بما يلي : $g(x)=\dfrac{x^2-4}{|x-2|}$

حيث $x\in J=[-4,4]$ و $x\neq 2$

مثل مبيانيا الدالة g ثم استنتج مبيانيا هل هي متصلة على المجال J .

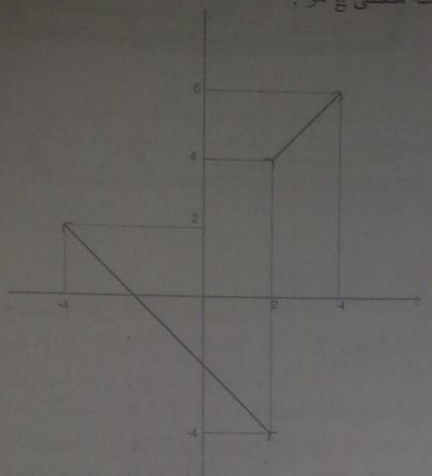
الحل :

$$g(x)=\frac{x^2-4}{|x-2|} \quad ; \quad x\in J-\{2\}$$

اعتمادا على جدول إشارة $(x-2)$ نجد :

$$\begin{cases} g(x)=-(x+2) & ; \quad x\in[-4,2[\\ g(x)=x+2 & ; \quad x\in]2,4] \end{cases}$$

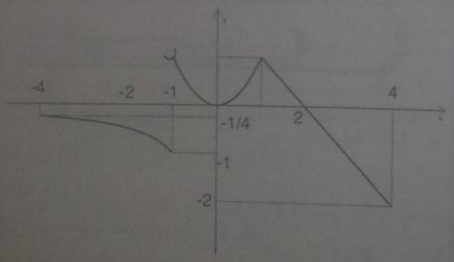
ومنه منحنى g هو :



g ليست متصلة على المجال J لأنه لا يمكن إنشاء منحناها بدون رفع اليد .

التمرين رقم 25:

نعتبر التمثيل المبياني الذي يمثل الدالة العددية f على المجال $[-4,4]$:

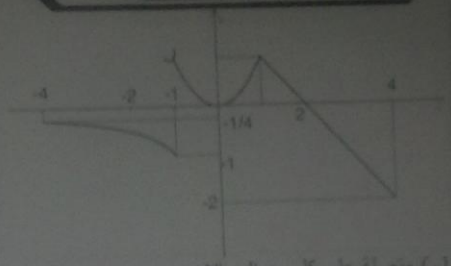


1- هل الدالة f متصلة على المجالات التالية :

$[-4,-1]$; $]-1,0]$; $[0,4]$; $[-2,0]$

2- حدد مجالا سعته 5 بحيث تكون f متصلة عليه .

الحل :



1- f متصلة على كل من المجالات :
$[-4,-1]$ ؛ $]-1,0[$ ؛ $[0,4]$. لأن منحناها يمكن رسمه بدون رفع اليد في كل منها .
لكن على المجال $[-2,0]$. f ليست متصلة لأنه لا يمكن رسم منحناها على هذا المجال بدون رفع اليد .
2- f متصلة على المجال $]-1,4[$ لأن منحناها يمكن رسمه بدون رفع اليد ولدينا سعة المجال هو : $4-(-1)=5$

التمرين رقم 26:

حدد صورة المجال $I=[0,5]$ بالدالة f المعرفة كما يلي :

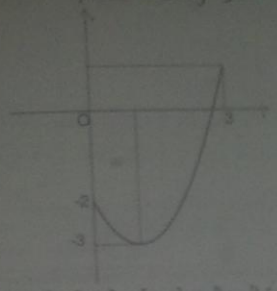
$$\begin{cases} f(x)=x^2 & ; \quad x\in[0,2] \\ f(x)=-x+6 & ; \quad x\in]2,5] \end{cases}$$

الحل :

لدينا $f(I)=f(I\cup I)=f(I)\cup f(I)$
كيفما كان I و J مجالين .
إذن $f([0,5])=f([0,2])\cup f(]2,5])$
تحديد $f([0,5])$:
f تزايدية قطعا على المجال $[0,2]$
إذن $f([0,2])=[0,4]$
و f تناقصية قطعا على المجال $]2,5]$
إذن $f(]2,5])=\left]\lim_{x\to 5} f(x), f(5)\right]$
$=]1,4]$
وبالتالي $f([0,5])=[0,4]\cup]1,4]$
$=[0,4]$

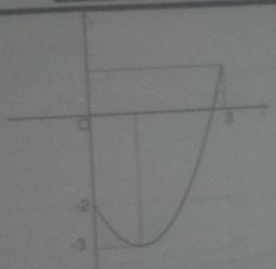
التمرين رقم 27:

نعتبر الدالة العددية f الممثلة أسفله :



1- حدد صورة المجالين $[0,1]$ و $[1,3]$ بالدالة f (مبيانيا)
2- استنتج صورة المجال $[0,3]$ بالدالة f .

الحل :



1) * f تناقصية قطعا على المجال $[0,1]$
ولدينا : $f(0)=-2$ و $f(1)=-3$
ومنه $f([0,1])=[-3,-2]$
* f تزايدية قطعا على المجال $[1,3]$
ولدينا $f(1)=-3$ و $f(3)=1$
إذن $f([1,3])=[-3,1]$
2- استنتاج :
f ليست رتيبة على المجال $[0,3]$
ولدينا $[0,3]=[0,1]\cup[1,3]$
إذن $f([0,3])=f([0,1])\cup f([1,3])$
$=[-3,-2]\cup[-3,1]$
$=[-3,1]$

التمرين رقم 28:

نعتبر الدالة العددية g المعرفة بجدول تغيراتها التالي :

x	$-\infty$		2		3		$+\infty$
$g(x)$	2	↗	4	↘	$-\infty$ / 0	↗	5

حدد بالدالة g المجال I في الحالات التالية :

1- $I=]-\infty,2]$

2- $I=]-\infty,3[$

3- $I=[2,3[\cup]3,+\infty[$

الحل :

x	$-\infty$		2		3		$+\infty$
$g(x)$	2	↗	4	↘	$-\infty$ / 0	↗	5

1) صورة المجال $I=]-\infty,2]$

g تزايدية على المجال I ، ومنه

$$g(I)=\left]\lim_{-\infty} g(x), g(2)\right]$$
$$=]2,4]$$

2) صورة المجال $I=]-\infty,3[$

g ليست رتيبة على المجال I و $I=]-\infty,2]\cup[2,3[$

حيث g تزايدية على $]-\infty,2]$ وتناقصية على $[2,3[$

إذن :

$$g(I)=g(]-\infty,2])\cup g([2,3[)$$
$$=]2,4]\cup]-\infty,4]$$
$$=]-\infty,4]$$

3) صورة المجال $I=[2,3[\cup]3,+\infty[$

g تزايدية على المجال $]3,+\infty[$ وتناقصية على المجال $[2,3[$ ، إذن :

$$g(I)=g([2,3[)\cup g(]3,+\infty[)$$
$$=]-\infty,4]\cup]0,5[$$
$$=]-\infty,5[$$

التمرين رقم 29:

بين أن المعادلة $x^3+x+1=0$ تقبل حلا وحيدا α ، ثم حدد تأطيرا للعدد α .

الحل :

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي :

$$f(x)=x^3+x+1$$

f متصلة على $\mathbb{R}$ ولدينا :

$$(\forall x\in\mathbb{R}):\quad f'(x)=3x^2+1>0$$

إذن f تزايدية قطعا على $\mathbb{R}$.

ولدينا $f(0)=1$ و $f(-1)=-1$

يعني $f(0).f(-1)<0$

إذن حسب مبرهنة القيم الوسيطية ، المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $-1<\alpha<0$

يعني المعادلة $x^3+x+1=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $-1<\alpha<0$

التمرين رقم 30:

لتكن f دالة متصلة على $[a,b]$ بحيث :

$$f(b)<b \text{ و } f(a)>a$$

بين أن المعادلة $f(x)=x$ تقبل حلا على الأقل على المجال $[a,b]$

الحل :

نعتبر الدالة العددية g على المجال $[a,b]$ كما يلي :

$$g(x)=f(x)-x$$

g متصلة على $[a,b]$ لأنها مجموع دالتين متصلتين على $[a,b]$: f و $x\mapsto -x$

ولدينا : $g(a)=f(a)-a>0$

$g(b)=f(b)-b<0$

يعني $g(a).g(b)<0$

المعادلة $g(x)=0$ تقبل على الأقل حلا α من المجال $]a,b[$

يعني المعادلة $f(x)=x$ تقبل على الأقل حلا α من المجال $]a,b[$.

التمرين رقم 31:

بين أن المعادلة $x^3+3x=5$ تقبل حلا وحيدا α على $\mathbb{R}$، ثم أعط قيمة مقربة للعدد α بسعة 25.10^{-2}

الحل :

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي :

$$f(x)=x^3+3x-5$$

f متصلة على $\mathbb{R}$ ولدينا :

$$(\forall x\in\mathbb{R}):\quad f'(x)=3x^2+3>0$$

ومنه f تزايدية قطعا على $\mathbb{R}$.

ولدينا $f(1)=-1$ و $f(2)=9$

يعني $f(1).f(2)<0$

إذن حسب مبرهنة القيم الوسيطية ، المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $1<\alpha<2$

يعني المعادلة $x^3+3x=5$ تقبل حلا وحيدا α حيث $1<\alpha<2$

وبإتباع تقنية التفرع الثنائي نجد : $\begin{cases} f(1)=-1 \\ f\left(\frac{5}{4}\right)=\frac{45}{64} \end{cases}$

يعني $f(1).f\left(\frac{5}{4}\right)<0$ ومنه $1<\alpha<\frac{5}{4}$

ولدينا $\frac{5}{4}-1=\frac{1}{4}=25.10^{-2}$

التمرين رقم 32:

لتكن f الدالة العددية المعرفة على المجال $[0,+\infty[$ بحيث

$$f(x)=x+\sqrt{x}-1$$

1- ادرس تغيرات الدالة f.

2- أ) استنتج أن المعادلة $(E):\ x+\sqrt{x}=1$ تقبل حلا وحيدا α على المجال $[0,+\infty[$.

ب) أعط تأطيرا للعدد α سعته 5.10^{-2}

3- أعط القيمة المضبوطة للعدد α.

الحل :

1- تغيرات الدالة f بحيث : $f(x)=x+\sqrt{x}-1$

f معرفة ومتصلة على المجال $[0,+\infty[$ وقابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$

ولدينا $f(0)=-1$

$$\lim_{+\infty} f(x)=\lim_{+\infty}\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+1-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)=+\infty$$

$$(\forall x\in]0,+\infty[):\quad f'(x)=1+\frac{1}{2\sqrt{x}}>0$$ و

f تزايدية قطعا على المجال $[0,+\infty[$.

جدول تغيرات f :

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$
$f(x)$	‖ -1	$\nearrow +\infty$

2- أ) لدينا f متصلة وتزايدية قطعا على المجال $[0,+\infty[$

و $f(0)=-1$ و $f(1)=1$

يعني $f(1).f(0)<0$

إذن حسب مبرهنة القيم الوسيطية ، المعادلة $f(x)=0$ ($x+\sqrt{x}-1=0$) تقبل حلا وحيدا α في المجال $]0,1[$

وبما أن $]0,1[\subset[0,+\infty[$

و f تزايدية قطعا على المجال $[0,+\infty[$

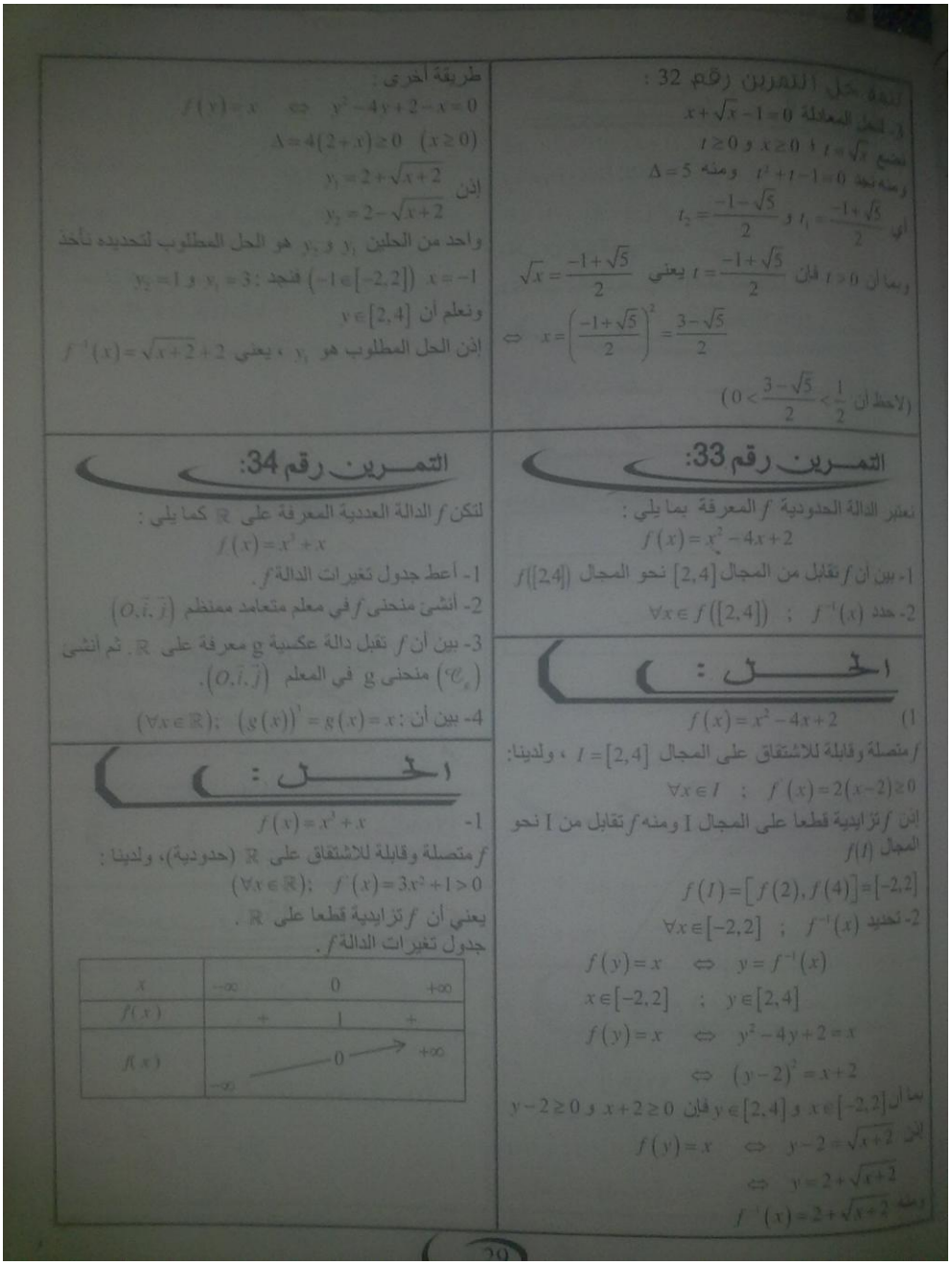
فإن المعادلة $x+\sqrt{x}-1=0$ تقبل حلا وحيدا α على $[0,+\infty[$.

ب)- حسب السؤال السابق لدينا : $0<\alpha<1$

وبإتباع تقنية التفرع الثنائي نستنتج أن $0<\alpha<\frac{1}{2}$ لأن

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{2}-1}{2}>0$$

ولدينا $\frac{1}{2}-0=\frac{1}{2}=5.10^{-2}$



طريقة حل التمرين رقم 32 :

1) لنحل المعادلة $x+\sqrt{x}-1=0$

نضع $t=\sqrt{x}$ ؛ $t\geq 0$ و $x\geq 0$

ومنه نجد $t^2+t-1=0$ ومنه $\Delta=5$

أي $t_1=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ و $t_2=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$

وبما أن $t\geq 0$ فإن $t=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ يعني $\sqrt{x}=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$

$\Leftrightarrow x=\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)^2=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$

(لاحظ أن $0<\frac{3-\sqrt{5}}{2}<\frac{1}{2}$)

التمرين رقم 33:

نعتبر الدالة الحدودية f المعرفة بما يلي :

$f(x)=x^2-4x+2$

1- بين أن f تقابل من المجال $[2,4]$ نحو المجال $f([2,4])$

2- حدد $f^{-1}(x)$ ؛ $\forall x\in f([2,4])$

الحل :

1) $f(x)=x^2-4x+2$

f متصلة وقابلة للاشتقاق على المجال $I=[2,4]$ ، ولدينا:

$\forall x\in I$ ؛ $f'(x)=2(x-2)\geq 0$

إذن f تزايدية قطعا على المجال I ومنه f تقابل من I نحو المجال $f(I)$

$f(I)=[f(2),f(4)]=[-2,2]$

2- تحديد $f^{-1}(x)$ ؛ $\forall x\in[-2,2]$

$f(y)=x \Leftrightarrow y=f^{-1}(x)$

$x\in[-2,2]$ ؛ $y\in[2,4]$

$f(y)=x \Leftrightarrow y^2-4y+2=x$

$\Leftrightarrow (y-2)^2=x+2$

بما أن $x\in[-2,2]$ و $y\in[2,4]$ فإن $x+2\geq 0$ و $y-2\geq 0$

إذن $f(y)=x \Leftrightarrow y-2=\sqrt{x+2}$

$\Leftrightarrow y=2+\sqrt{x+2}$

ومنه $f^{-1}(x)=2+\sqrt{x+2}$

طريقة أخرى :

$f(x)=x \Leftrightarrow y^2-4y+2-x=0$

$\Delta=4(2+x)\geq 0 \quad (x\geq 0)$

إذن $y_1=2+\sqrt{x+2}$

$y_2=2-\sqrt{x+2}$

واحد من الحلين y_1 و y_2 هو الحل المطلوب لتحديده نأخذ $x=-1$ $\left(-1\in[-2,2]\right)$ فنجد : $y_1=3$ و $y_2=1$

ونعلم أن $y\in[2,4]$

إذن الحل المطلوب هو y_1 ، يعني $f^{-1}(x)=\sqrt{x+2}+2$

التمرين رقم 34:

لتكن f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي :

$f(x)=x^3+x$

1- أعط جدول تغيرات الدالة f .

2- أنشئ منحنى f في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$

3- بين أن f تقبل دالة عكسية g معرفة على $\mathbb{R}$ ، ثم أنشئ $(\mathcal{C}_g)$ منحنى g في المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

4- بين أن : $(\forall x\in\mathbb{R})$ ؛ $(g(x))^3=g(x)=x$

الحل :

1- $f(x)=x^3+x$

f متصلة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ (حدودية)، ولدينا :

$(\forall x\in\mathbb{R})$ ؛ $f'(x)=3x^2+1>0$

يعني أن f تزايدية قطعا على $\mathbb{R}$.

جدول تغيرات الدالة f .

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$		$+$ 1 $+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$ 0 $\nearrow$	$+\infty$

خصوص وحلول التمارين

التمرين رقم 1 :

أحسب النهايات التالية

1) $\lim\limits_{n\to+\infty} 2n^3-n+1$

2) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{3n+1}{n^2-n+1}$

3) $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{2n^3-n^2-n-2}$

الحل :

1- نعتبر الدالة العددية f بحيث $f(x)=2x^3-x+1$

بما أن $\lim\limits_{x\to+\infty} 2x^3-x+1=\lim\limits_{x\to+\infty} 2x^3=+\infty$

ولدينا $U_n=f(n)$

فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n=+\infty$

2- نلاحظ أن $U_n=f(n)$ حيث $f(x)=\dfrac{3x+2}{x^2-x+1}$

بما أن $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x+2}{x^2-x+1}=\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3}{x}=0$

فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n=0$

3- لدينا $U_n=f(n)$ حيث f دالة عددية معرفة بـ :

$f(x)=\sqrt{2x^3-x^2-x-2}$

لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty}(2x^3-x^2-x-2)=\lim\limits_{x\to+\infty} x^3=+\infty$

ومنه $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

إذن $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n=+\infty$

التمرين رقم 2 :

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي

$f(x)=\cos(2\pi x)$

1- أ- بين أن f زوجية ودورية دورها 1

ب- ادرس تغيرات f وأنشئ (Cf)

ج- هل f تقبل نهاية عند $+\infty$

2- نعتبر المتتالية (U_n) بحيث $U_n=f(n)$

أ- بين أن (U_n) متتالية ثابتة

ب- استنتج $\lim U_n$

الحل :

1- أ- لدينا لكل x من $\mathbb{R}$; $-x\in\mathbb{R}$

و $f(-x)=\cos(2\pi(-x))=\cos(-2\pi x)$

$=\cos 2\pi x=f(x)$

إذن f دالة زوجية

ب- لدينا لكل $x\in\mathbb{R}$ $x+1\in\mathbb{R}$

و $f(x+1)=\cos(2\pi(x+1))$

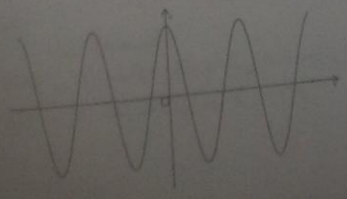
$=\cos(2\pi x+2\pi)=\cos 2\pi x=f(x)$

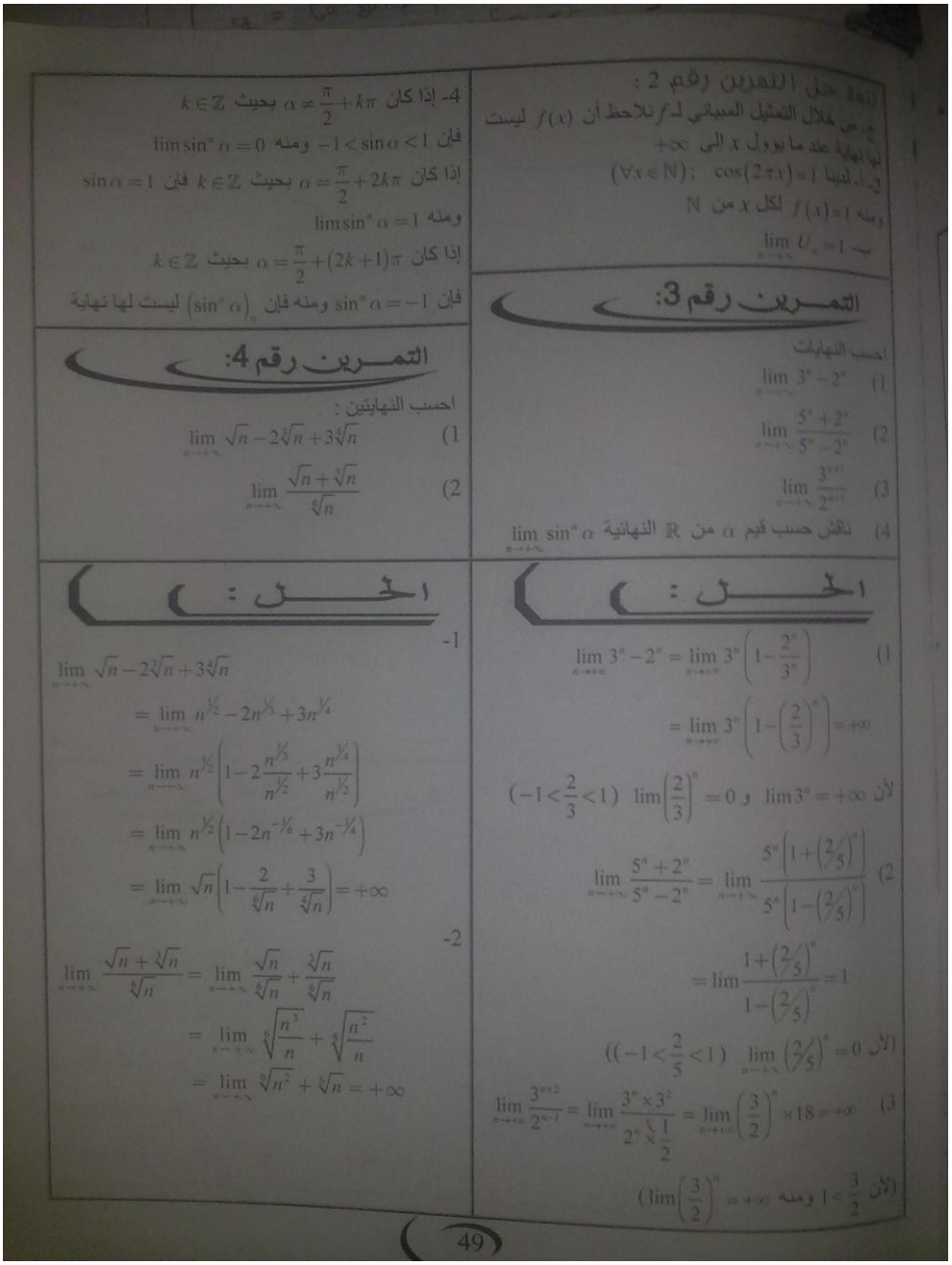
إذن f دالة دورية دورها 1

يكفي دراسة f على المجال $I=\left]0,\dfrac{1}{2}\right[$

ليكن x من I ; $f'(x)=-2\sin 2\pi x$

$f'(x)\le 0$, لكل x من I





بقية حل التمرين رقم 2 :

ج- من خلال التمثيل المبياني لـ f نلاحظ أن $f(x)$ ليست لها نهاية عند ما يؤول x إلى $+\infty$

د- لدينا $(\forall x\in\mathbb{N});\ \cos(2\pi x)=1$

ومنه $f(x)=1$ لكل x من $\mathbb{N}$

ب- $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n=1$

التمرين رقم 3:

احسب النهايات

1) $\lim\limits_{n\to+\infty} 3^n-2^n$

2) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{5^n+2^n}{5^n-2^n}$

3) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{3^{n+1}}{2^{n+1}}$

4) ناقش حسب قيم α من $\mathbb{R}$ النهائية $\lim\limits_{n\to+\infty} \sin^n\alpha$

الحل :

1) $\lim\limits_{n\to+\infty} 3^n-2^n=\lim\limits_{n\to+\infty} 3^n\left(1-\dfrac{2^n}{3^n}\right)$

$=\lim\limits_{n\to+\infty} 3^n\left(1-\left(\dfrac{2}{3}\right)^n\right)=+\infty$

لأن $\lim 3^n=+\infty$ و $\lim\left(\dfrac{2}{3}\right)^n=0$ $\left(-1<\dfrac{2}{3}<1\right)$

2) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{5^n+2^n}{5^n-2^n}=\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{5^n\left(1+\left(\frac{2}{5}\right)^n\right)}{5^n\left(1-\left(\frac{2}{5}\right)^n\right)}$

$=\lim \dfrac{1+\left(\frac{2}{5}\right)^n}{1-\left(\frac{2}{5}\right)^n}=1$

(لأن $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{2}{5}\right)^n=0$ $\left((-1<\dfrac{2}{5}<1\right)$

3) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{3^{n+2}}{2^{n-1}}=\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{3^n\times 3^2}{2^n\times\frac{1}{2}}=\lim\left(\dfrac{3}{2}\right)^n\times 18=+\infty$

(لأن $\lim\left(\dfrac{3}{2}\right)^n=+\infty$ ومنه $\dfrac{3}{2}>1$)

4- إذا كان $\alpha\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi$ بحيث $k\in\mathbb{Z}$

فإن $-1<\sin\alpha<1$ ومنه $\lim\sin^n\alpha=0$

إذا كان $\alpha=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi$ بحيث $k\in\mathbb{Z}$ فإن $\sin\alpha=1$

ومنه $\lim\sin^n\alpha=1$

إذا كان $\alpha=\dfrac{\pi}{2}+(2k+1)\pi$ بحيث $k\in\mathbb{Z}$

فإن $\sin^n\alpha=-1$ ومنه فإن $\left(\sin^n\alpha\right)_n$ ليست لها نهاية

التمرين رقم 4:

احسب النهايتين :

1) $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n}-2\sqrt[3]{n}+3\sqrt[4]{n}$

2) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sqrt{n}+\sqrt[3]{n}}{\sqrt[6]{n}}$

الحل :

-1

$\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n}-2\sqrt[3]{n}+3\sqrt[4]{n}$

$=\lim\limits_{n\to+\infty} n^{1/2}-2n^{1/3}+3n^{1/4}$

$=\lim\limits_{n\to+\infty} n^{1/2}\left(1-2\dfrac{n^{1/3}}{n^{1/2}}+3\dfrac{n^{1/4}}{n^{1/2}}\right)$

$=\lim\limits_{n\to+\infty} n^{1/2}\left(1-2n^{-1/6}+3n^{-1/4}\right)$

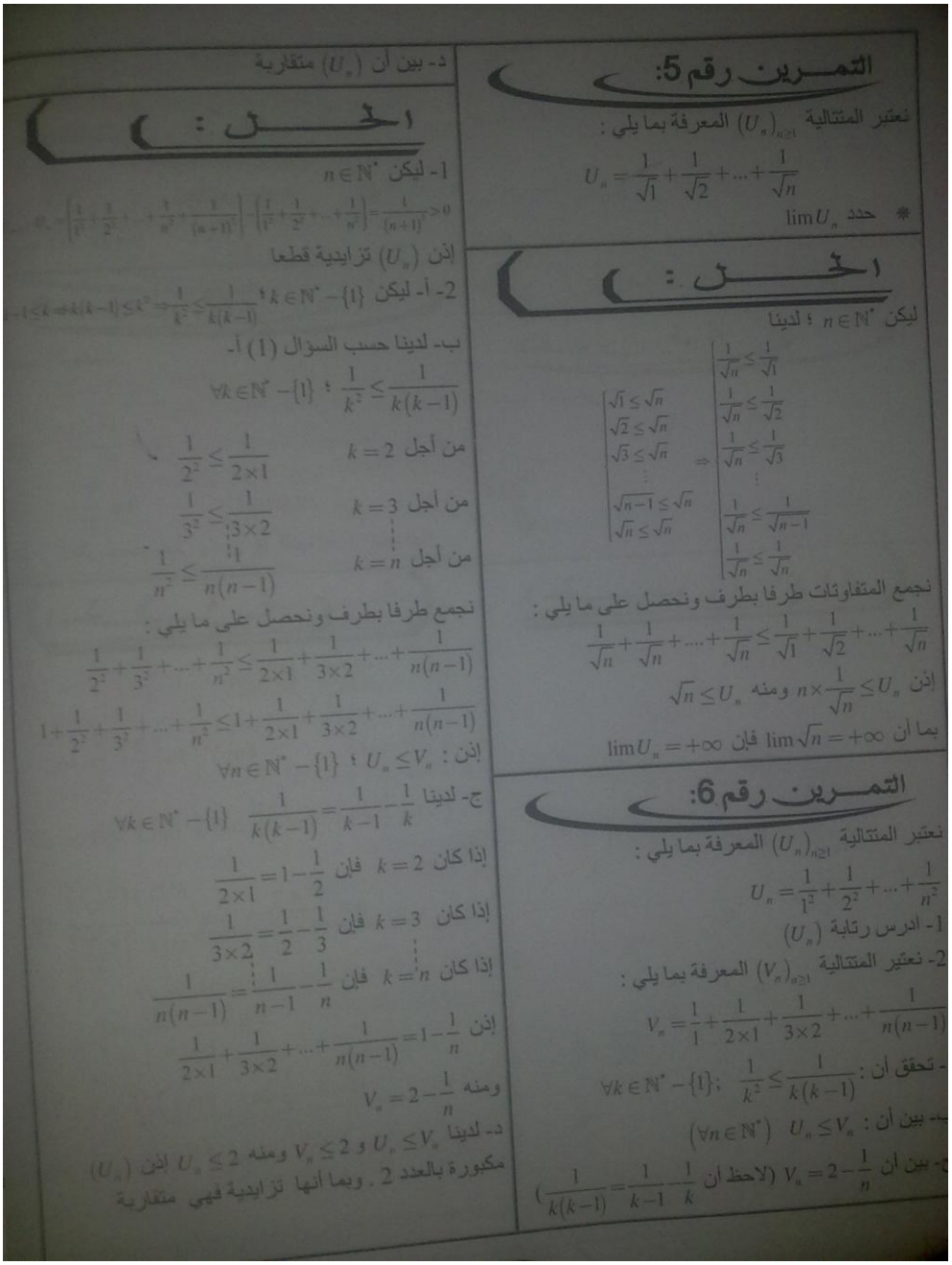
$=\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n}\left(1-\dfrac{2}{\sqrt[6]{n}}+\dfrac{3}{\sqrt[4]{n}}\right)=+\infty$

-2

$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sqrt{n}+\sqrt[3]{n}}{\sqrt[6]{n}}=\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt[6]{n}}+\dfrac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt[6]{n}}$

$=\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[6]{\dfrac{n^3}{n}}+\sqrt[6]{\dfrac{n^2}{n}}$

$=\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[6]{n^2}+\sqrt[6]{n}=+\infty$



التمرين رقم 5:

نعتبر المتتالية $(U_n)_{n\geq 1}$ المعرفة بما يلي :

$$U_n=\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+...+\frac{1}{\sqrt{n}}$$

* حدد $\lim U_n$

الحل :

ليكن $n\in\mathbb{N}^*$ ؛ لدينا

$$\begin{cases}\sqrt{1}\leq\sqrt{n}\\ \sqrt{2}\leq\sqrt{n}\\ \sqrt{3}\leq\sqrt{n}\\ \vdots\\ \sqrt{n-1}\leq\sqrt{n}\\ \sqrt{n}\leq\sqrt{n}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{n}}\leq\frac{1}{\sqrt{1}}\\ \frac{1}{\sqrt{n}}\leq\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{n}}\leq\frac{1}{\sqrt{3}}\\ \vdots\\ \frac{1}{\sqrt{n}}\leq\frac{1}{\sqrt{n-1}}\\ \frac{1}{\sqrt{n}}\leq\frac{1}{\sqrt{n}}\end{cases}$$

نجمع المتفاوتات طرفا بطرف ونحصل على ما يلي :

$$\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n}}+....+\frac{1}{\sqrt{n}}\leq\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+...+\frac{1}{\sqrt{n}}$$

إذن $n\times\frac{1}{\sqrt{n}}\leq U_n$ ومنه $\sqrt{n}\leq U_n$

بما أن $\lim\sqrt{n}=+\infty$ فإن $\lim U_n=+\infty$

التمرين رقم 6:

نعتبر المتتالية $(U_n)_{n\geq 1}$ المعرفة بما يلي :

$$U_n=\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+...+\frac{1}{n^2}$$

1- ادرس رتابة (U_n)

2- نعتبر المتتالية $(V_n)_{n\geq 1}$ المعرفة بما يلي :

$$V_n=\frac{1}{1}+\frac{1}{2\times 1}+\frac{1}{3\times 2}+...+\frac{1}{n(n-1)}$$

- تحقق أن : $\forall k\in\mathbb{N}^*-\{1\};\ \frac{1}{k^2}\leq\frac{1}{k(k-1)}$

ب- بين أن : $(\forall n\in\mathbb{N}^*)\ U_n\leq V_n$

ج- بين أن $V_n=2-\frac{1}{n}$ (لاحظ أن $\frac{1}{k(k-1)}=\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}$)

د- بين أن (U_n) متقاربة

الحل :

1- ليكن $n\in\mathbb{N}^*$

$\left[\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+...+\frac{1}{n^2}\right]-\left[\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+...+\frac{1}{n^2}\right]=\frac{1}{(n+1)^2}>0$

إذن (U_n) تزايدية قطعا

2- أ- ليكن $k\in\mathbb{N}^*-\{1\}$ ؛ $k-1<k\Rightarrow k(k-1)\leq k^2\Rightarrow\frac{1}{k^2}\leq\frac{1}{k(k-1)}$

ب- لدينا حسب السؤال (1) أ-

$$\forall k\in\mathbb{N}^*-\{1\}\ ;\ \frac{1}{k^2}\leq\frac{1}{k(k-1)}$$

من أجل $k=2$ $\quad\frac{1}{2^2}\leq\frac{1}{2\times 1}$

من أجل $k=3$ $\quad\frac{1}{3^2}\leq\frac{1}{3\times 2}$

$\vdots$

من أجل $k=n$ $\quad\frac{1}{n^2}\leq\frac{1}{n(n-1)}$

نجمع طرفا بطرف ونحصل على ما يلي :

$$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{n^2}\leq\frac{1}{2\times 1}+\frac{1}{3\times 2}+...+\frac{1}{n(n-1)}$$

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{n^2}\leq 1+\frac{1}{2\times 1}+\frac{1}{3\times 2}+...+\frac{1}{n(n-1)}$$

إذن : $\forall n\in\mathbb{N}^*-\{1\}\ ;\ U_n\leq V_n$

ج- لدينا $\forall k\in\mathbb{N}^*-\{1\}\quad\frac{1}{k(k-1)}=\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}$

إذا كان $k=2$ فإن $\frac{1}{2\times 1}=1-\frac{1}{2}$

إذا كان $k=3$ فإن $\frac{1}{3\times 2}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$

$\vdots$

إذا كان $k=n$ فإن $\frac{1}{n(n-1)}=\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}$

إذن $\frac{1}{2\times 1}+\frac{1}{3\times 2}+...+\frac{1}{n(n-1)}=1-\frac{1}{n}$

ومنه $V_n=2-\frac{1}{n}$

د- لدينا $U_n\leq V_n$ و $V_n\leq 2$ ومنه $U_n\leq 2$ إذن (U_n) مكبورة بالعدد 2 . وبما أنها تزايدية فهي متقاربة

التمرين رقم 7:

A- نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}-\{-6\}$ بما يلي: $f(x)=\frac{8x+3}{x+6}$

1- اعط جدول تغيرات f وحدد $f([1,3[)$

2- نعتبر المتتالية (U_n) المعرفة بما يلي:

$U_0=\frac{1}{2}$ و $U_{n+1}=f(U_n)$ لكل n من N

أ- بين أن: $(\forall n\in\mathbb{N}^*):\ 1<U_n<3$

ب- بين أن (U_n) تزايدية قطعا ثم استنتج أن (U_n) متقاربة

ج- حدد نهاية (U_n)

B- نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $\mathbb{R}-\{-1\}$ بما يلي: $g(x)=\frac{x-3}{x+1}$

1- بين أن g متصلة في 3

2- نعتبر المتتالية $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة بما يلي $V_n=\frac{U_n-3}{U_n+1}$

بين أن (V_n) متقاربة وحدد نهايتها.

الحل:

A-1) $f'(x)=\frac{45}{(x+6)^2}>0$

x	$-\infty$		-6		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		+	‖	+		+		+	
$f(x)$		↗	‖	↗		↗		↗	

			1		3
			$\frac{1}{7}$		

f تزايدية قطعا ومتصلة على $[1,3[$

و $f([1,3[)=\left[\frac{11}{7},3\right[\subset[1,3[$

2- من أجل $n=1$ $U_1=\frac{14}{13}\in[1,3[$

ليكن $n\in\mathbb{N}^*$ نفترض أن $1<U_n<3$

بما أن $U_n\in[1,3[$ و $f([1,3[)=\left[\frac{11}{7},3\right[\subset[1,3[$

فإن $f(U_n)\in[1,3[$ ومنه $1<U_{n+1}<3$

إذن $\forall n\in\mathbb{N}^*\ 1<U_n<3$

ب- لدينا $U_1=\frac{14}{13}$ و $U_2=\frac{151}{92}$

إذن $U_1<U_2$

ليكن $n\in\mathbb{N}^*$ نفترض أن $U_n<U_{n+1}$

وبما أن f تزايدية قطعا على $[1,3[$ فإن:

$f(U_n)<f(U_{n+1})$

إذن $U_{n+1}<U_{n+2}$

ومنه $\forall n\in\mathbb{N}^*\ U_n<U_{n+1}$ وبالتالي (U_n) تزايدية

وبما أن (U_n) مكبورة بالعدد 3 فإن (U_n) متقاربة الى عدد ℓ.

ج- لدينا f متصلة على $[1,3[$ و $f([1,3[)\subset[1,3[$

و $U_n\in[1,3[$ لكل n من $\mathbb{N}^*$ و (U_n) متقاربة الى ℓ

فإن $f(\ell)=\ell\Leftrightarrow\frac{8\ell+3}{\ell+6}=\ell$

$\begin{cases}\ell\neq-6\\ \ell\in[1,3]\end{cases}\ell^2-2\ell-3=0\Leftrightarrow$

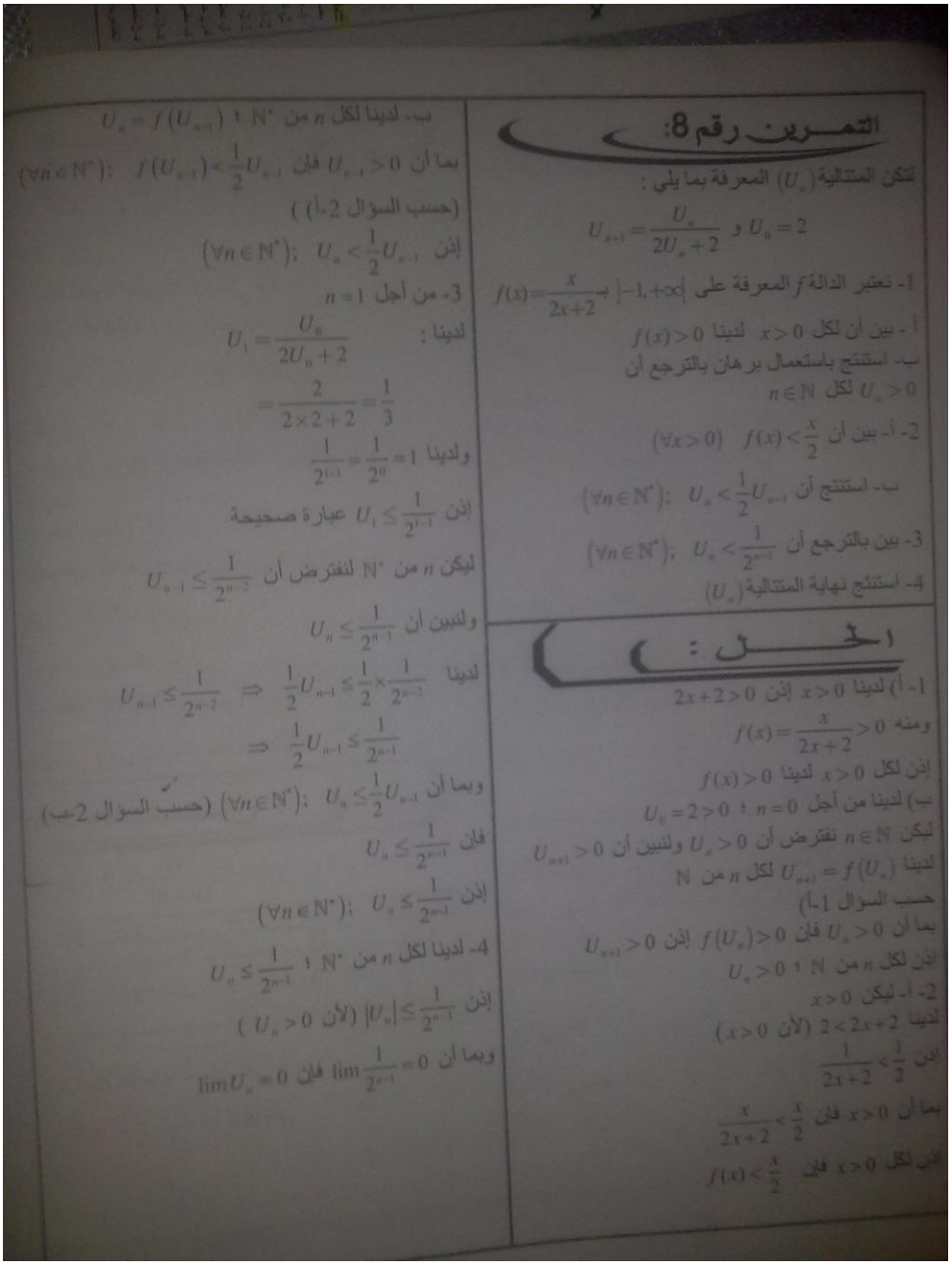
$\lim U_n=3$ ومنه $\ell=-1$ أو $\ell=3\Leftrightarrow(-1\notin[1,3[)$

B) 1- g متخاطة فهي متصلة في كل نقطة من $\mathbb{R}-\{-1\}$

إذن g متصلة في 3

2- لدينا $V_n=\frac{U_n-3}{U_n+1}$

بما أن g متصلة في 3 فإن (V_n) متقاربة ونهايتها هي $g(3)=0$



التمرين رقم 8:

لتكن المتتالية (U_n) المعرفة بما يلي :

$$U_{n+1}=\frac{U_n}{2U_n+2} \text{ و } U_0=2$$

1- نعتبر الدالة f المعرفة على $]-1,+\infty[$ بـ $f(x)=\frac{x}{2x+2}$

أ - بين أن لكل $x>0$ لدينا $f(x)>0$

ب- استنتج باستعمال برهان بالترجع أن

لكل $n\in\mathbb{N}$ $U_n>0$

2- أ- بين أن $(\forall x>0)\quad f(x)<\frac{x}{2}$

ب- استنتج أن $(\forall n\in\mathbb{N}^*);\ U_n<\frac{1}{2}U_{n-1}$

3- بين بالترجع أن $(\forall n\in\mathbb{N}^*);\ U_n<\frac{1}{2^{n-1}}$

4- استنتج نهاية المتتالية (U_n)

الحل :

1- أ) لدينا $x>0$ إذن $2x+2>0$

ومنه $f(x)=\frac{x}{2x+2}>0$

إذن لكل $x>0$ لدينا $f(x)>0$

ب) لدينا من أجل $n=0$: $U_0=2>0$

ليكن $n\in\mathbb{N}$ نفترض أن $U_n>0$ ولنبين أن $U_{n+1}>0$

لدينا $U_{n+1}=f(U_n)$ لكل n من $\mathbb{N}$

حسب السؤال 1-أ)

بما أن $U_n>0$ فإن $f(U_n)>0$ إذن $U_{n+1}>0$

إذن لكل n من $\mathbb{N}$: $U_n>0$

2- أ- ليكن $x>0$

لدينا $2<2x+2$ (لأن $x>0$)

إذن $\frac{1}{2x+2}<\frac{1}{2}$

بما أن $x>0$ فإن $\frac{x}{2x+2}<\frac{x}{2}$

إذن لكل $x>0$ فإن $f(x)<\frac{x}{2}$

ب- لدينا لكل n من $\mathbb{N}^*$: $U_n=f(U_{n-1})$

بما أن $U_{n-1}>0$ فإن $f(U_{n-1})<\frac{1}{2}U_{n-1}$ $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$:

(حسب السؤال 2-أ))

إذن $(\forall n\in\mathbb{N}^*);\ U_n<\frac{1}{2}U_{n-1}$

3- من أجل $n=1$

لدينا : $U_1=\frac{U_0}{2U_0+2}$

$=\frac{2}{2\times2+2}=\frac{1}{3}$

ولدينا $\frac{1}{2^{1-1}}=\frac{1}{2^0}=1$

إذن $U_1\le\frac{1}{2^{1-1}}$ عبارة صحيحة

ليكن n من $\mathbb{N}^*$ لنفترض أن $U_{n-1}\le\frac{1}{2^{n-2}}$

ولنبين أن $U_n\le\frac{1}{2^{n-1}}$

لدينا $U_{n-1}\le\frac{1}{2^{n-2}} \Rightarrow \frac{1}{2}U_{n-1}\le\frac{1}{2}\times\frac{1}{2^{n-2}}$

$\Rightarrow \frac{1}{2}U_{n-1}\le\frac{1}{2^{n-1}}$

وبما أن $(\forall n\in\mathbb{N}^*);\ U_n\le\frac{1}{2}U_{n-1}$ (حسب السؤال 2-ب)

فإن $U_n\le\frac{1}{2^{n-1}}$

إذن $(\forall n\in\mathbb{N}^*);\ U_n\le\frac{1}{2^{n-1}}$

4- لدينا لكل n من $\mathbb{N}^*$: $U_n\le\frac{1}{2^{n-1}}$

إذن $|U_n|\le\frac{1}{2^{n-1}}$ (لأن $U_n>0$)

وبما أن $\lim\frac{1}{2^{n-1}}=0$ فإن $\lim U_n=0$

التمرين رقم 9:

لتكن المتتالية (U_n) المعرفة بما يلي :

$$U_{n+1}=\frac{7U_n+6}{U_n+2} \text{ و } U_0=1$$

1- بين أن f معلم متعامد ممنظم منحنى الدالة f المعرفة بـ $f(x)=\frac{7x+6}{x+2}$ والحدود الأولى للمتتالية (U_n)

2- بين بالترجع أن $(\forall n\in\mathbb{N}):\ U_n>0$

3- بين أن $|U_{n+1}-6|\le\frac{1}{2}|U_n-6|$

4- استنتج بالترجع أن :

$$(\forall n\in\mathbb{N}):\ |U_n-6|\le\left(\frac{1}{2}\right)^n|U_0-6|$$

5- بين أن $\lim U_n=6$

الحل :

$$(\forall n\in\mathbb{N}):\ U_{n+1}=\frac{7U_n+6}{U_n+2} \text{ و } U_0=1$$

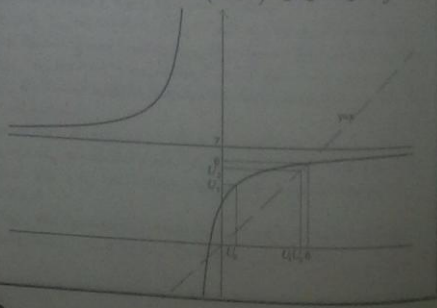
1- $f(x)=\frac{7x+6}{x+2}$

$D_f=\mathbb{R}-\{-2\}$

$$\Delta=\begin{vmatrix}7 & 6\\ 1 & 2\end{vmatrix}=8>0$$

x	$-\infty$		-2		0		6	$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$+$				
$f(x)$		↗	‖	↗	3		6	

ومنه f هذلول مركزه $\Omega(-2,7)$



2- لدينا من أجل $n=0$: $U_1>0$

ليكن $n\in\mathbb{N}$ نفترض أن $U_n>0$ ولنبين أن $U_{n+1}>0$

$$U_{n+1}=\frac{7U_n+6}{U_n+2}>0 \quad (U_n>0 \text{ لأن})$$

وبالتالي $(\forall n\in\mathbb{N}):\ U_n>0$

3- لنبين أن $(\forall n\in\mathbb{N}):\ |U_{n+1}-6|\le\frac{1}{2}|U_n-6|$

لدينا لكل n من N :

$$U_{n+1}-6=\frac{7U_n+6}{U_n+2}-6$$

$$=\frac{U_n-6}{U_n+2}$$

ومنه $(\forall n\in\mathbb{N}):\ |U_{n+1}-6|=\frac{|U_n-6|}{|U_n+2|}$

نعلم أن $(\forall n\in\mathbb{N}):\ U_n>0$

ومنه $(\forall n\in\mathbb{N}):\ U_n+2>2$

إذن $(\forall n\in\mathbb{N}):\ \frac{1}{|U_n+2|}<\frac{1}{2}$

وبالتالي $(\forall n\in\mathbb{N}):\ |U_{n+1}-6|\le\frac{1}{2}|U_n-6|$

4- لنستنتج أن : $(\forall n\in\mathbb{N}):\ |U_n-6|\le\left(\frac{1}{2}\right)^n|U_0-6|$

نعلم أن $(\forall n\in\mathbb{N}):\ |U_{n+1}-6|\le\frac{1}{2}|U_n-6|$

إذن $(k\in\mathbb{N}\ \text{و}\ \forall k\in[0,n-1]):\ |U_{k+1}-6|\le\frac{1}{2}|U_k-6|$

من أجل $k=0$; $|U_1-6|\le\frac{1}{2}|U_0-6|$

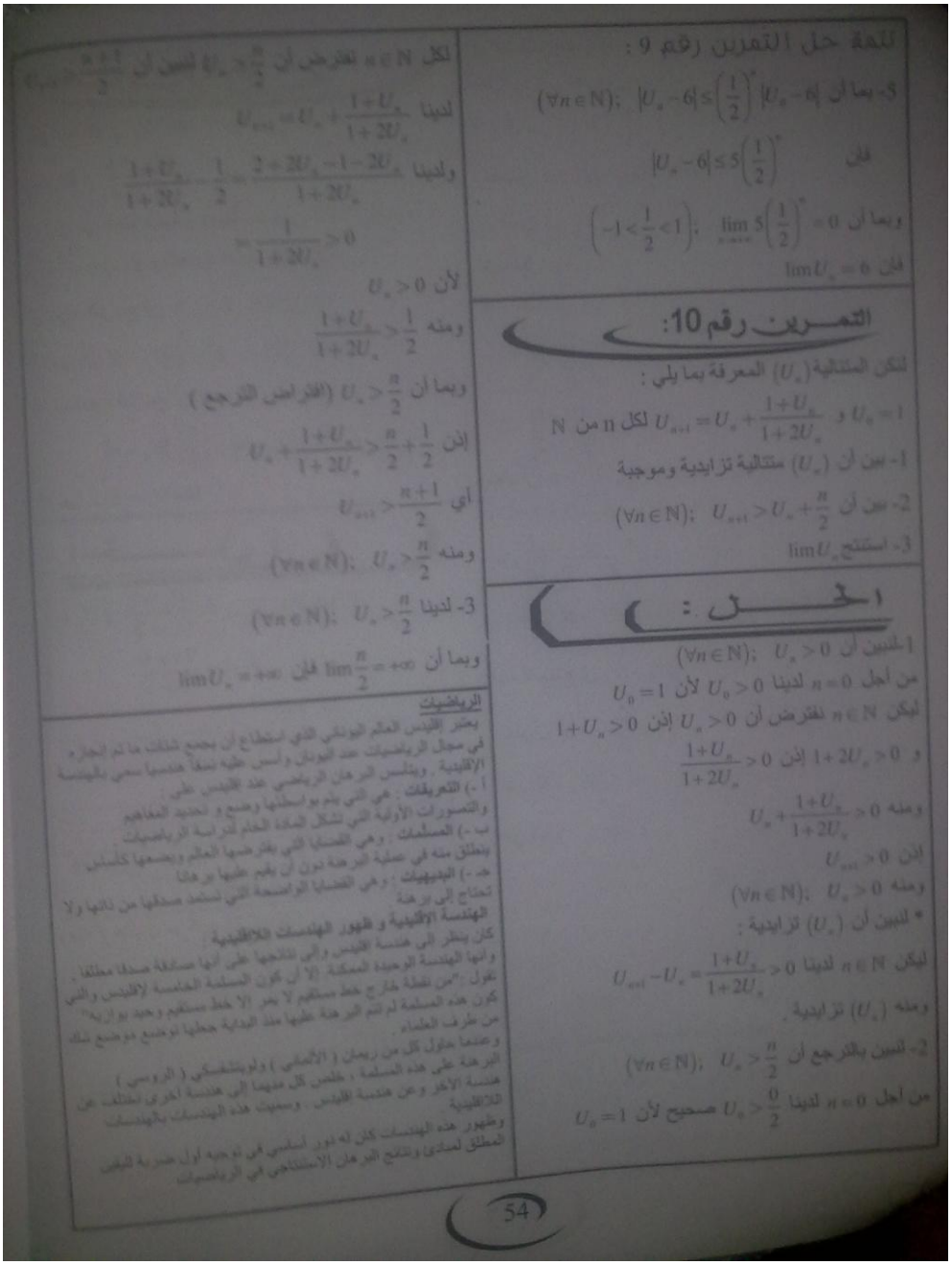
$k=1$; $|U_2-6|\le\frac{1}{2}|U_1-6|$

$\vdots\quad\vdots\quad\vdots$

$k=n-1$; $|U_n-6|\le\frac{1}{2}|U_{n-1}-6|$

بضرب المتفاوتات طرفا بطرف نجد :

$$(\forall n\in\mathbb{N}):\ |U_n-6|\le\left(\frac{1}{2}\right)^n|U_0-6|$$



تتمة حل التمرين رقم 9 :

5- بما أن $(\forall n\in\mathbb{N});\ |U_n-6|\le\left(\frac{1}{2}\right)^n|U_n-6|$

فإن $|U_n-6|\le 5\left(\frac{1}{2}\right)^n$

وبما أن $\left(-1<\frac{1}{2}<1\right);\ \lim\limits_{n\to+\infty}5\left(\frac{1}{2}\right)^n=0$

فإن $\lim U_n=6$

التمرين رقم 10:

لتكن المتتالية (U_n) المعرفة بما يلي :

$U_0=1$ و $U_{n+1}=U_n+\frac{1+U_n}{1+2U_n}$ لكل n من N

1- بين أن (U_n) متتالية تزايدية وموجبة

2- بين أن $(\forall n\in\mathbb{N});\ U_{n+1}>U_n+\frac{n}{2}$

3- استنتج $\lim U_n$

الحل :

1- لنبين أن $(\forall n\in\mathbb{N});\ U_n>0$

من أجل $n=0$ لدينا $U_0>0$ لأن $U_0=1$

ليكن $n\in\mathbb{N}$ نفترض أن $U_n>0$ إذن $1+U_n>0$

و $1+2U_n>0$ إذن $\frac{1+U_n}{1+2U_n}>0$

ومنه $U_n+\frac{1+U_n}{1+2U_n}>0$

إذن $U_{n+1}>0$

ومنه $(\forall n\in\mathbb{N});\ U_n>0$

• لنبين أن (U_n) تزايدية :

ليكن $n\in\mathbb{N}$ لدينا $U_{n+1}-U_n=\frac{1+U_n}{1+2U_n}>0$

ومنه (U_n) تزايدية .

2- لنبين بالترجع أن $(\forall n\in\mathbb{N});\ U_n>\frac{n}{2}$

من أجل $n=0$ لدينا $U_0>\frac{0}{2}$ صحيح لأن $U_0=1$

لكل $n\in\mathbb{N}$ نفترض أن $U_n>\frac{n}{2}$ لنبين أن $U_{n+1}>\frac{n+1}{2}$

لدينا $U_{n+1}=U_n+\frac{1+U_n}{1+2U_n}$

ولدينا $\frac{1+U_n}{1+2U_n}-\frac{1}{2}=\frac{2+2U_n-1-2U_n}{1+2U_n}$

$=\frac{1}{1+2U_n}>0$

لأن $U_n>0$

ومنه $\frac{1+U_n}{1+2U_n}>\frac{1}{2}$

وبما أن $U_n>\frac{n}{2}$ (الفرض الترجع)

إذن $U_n+\frac{1+U_n}{1+2U_n}>\frac{n}{2}+\frac{1}{2}$

أي $U_{n+1}>\frac{n+1}{2}$

ومنه $(\forall n\in\mathbb{N});\ U_n>\frac{n}{2}$

3- لدينا $(\forall n\in\mathbb{N});\ U_n>\frac{n}{2}$

وبما أن $\lim\frac{n}{2}=+\infty$ فإن $\lim U_n=+\infty$

الرياضيات

يعتبر إقليدس العالم اليوناني الذي استطاع أن يجمع شتات ما تم انجازه في مجال الرياضيات عند اليونان وأسس عليه نسقاً هندسيا سمي بالهندسة الإقليدية ، ويتلمس البرهان الرياضي عند إقليدس على :

أ -) **التعريفات** : هي التي يتم بواسطتها وضبح و تحديد المفاهيم والتصورات الأولية التي تشكل المادة الخام لدراسة الرياضيات

ب -) **المسلمات** : وهي القضايا التي يفترضها العالم ويحسمها كأساس ينطلق منه في عملية البرهنة دون أن يقيم عليها برهانا

جـ -) **البديهيات** : وهي القضايا الواضحة التي تستمد صدقها من ذاتها ولا تحتاج إلى برهنة

الهندسة الإقليدية و ظهور الهندسات اللاإقليدية

كان ينظر إلى هندسة إقليدس و إلى نتائجها على أنها صادقة صدقا مطلقا ، وأنها الهندسة الوحيدة الممكنة ، إلا أن كون المسلمة الخامسة لإقليدس والتي تقول :"من نقطة خارج خط مستقيم لا يمر إلا خط مستقيم وحيد يوازيه" يمكن هذه المسلمة لم تلق البرهنة عليها منذ البداية حجتها توضيح موضع شك من طرف العلماء .

وعندما حاول كل من ريمان (الألماني) ولوبتشفسكي (الروسي) البرهنة على هذه المسلمة ، خلصن كل منهما إلى هندسة أخرى تختلف عن هندسة الأخر وعن هندسة إقليدس ، وسميت هذه الهندسات بالهندسات اللاإقليدية .

وظهور هذه الهندسات كان له دور أساسي في نزع حبه اول حجر في البناء المطلق لمبادئ ونتائج البرهان الاستنتاجي في الرياضيات

التمرين رقم 11:

نكن المتتالية (U_n) المعرفة بـ:

$U_0=0$ و $U_{n+1}=\sqrt{2+U_n}$

1- مثل في معلم متعامد ممنظم $(o,\vec{i},\vec{j})$ منحنى الدالة f المعرفة بـ: $f=\sqrt{2+x}$

والحدود الأربع الأولى للمتتالية (U_n)

2- بين بالترجع أن $\forall n\in IN \quad 0\le U_n<2$

3- لتكن المتتالية (V_n) المعرفة بـ $V_n=2-U_n$ لكل $n\in\mathbb{N}$

أ- ما هي إشارة V_n؟

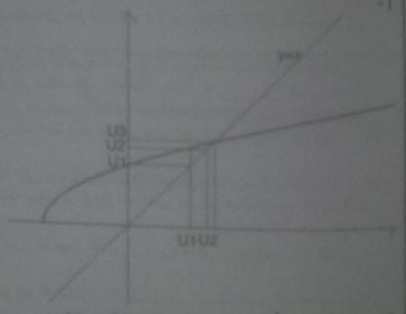
ب- بين أن: $\forall n\in\mathbb{N}: \quad \frac{V_{n+1}}{V_n}\le\frac{1}{2}$

ج- بين بالترجع أن: $\forall n\in\mathbb{N}: \quad V_n\le\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

د- استنتج نهاية المتتالية (V_n) ثم نهاية المتتالية (U_n)

الحل:

1-



2- نبين بالترجع أن $\forall n\in\mathbb{N}: \quad 0\le U_n<2$

من أجل $n=0$ لدينا $0\le U_0<2$ لأن $U_0=0$

لتكن $n\in\mathbb{N}$ نفترض أن $0\le U_n\le 2$ ولنبين أن $0\le U_{n+1}<2$

لدينا $0\le U_n<2 \Rightarrow 2\le U_n+2<4$

$\Rightarrow \sqrt{2}\le\sqrt{U_n+2}<2$

بما أن $\sqrt{2}\ge 0$ فإن $0\le U_{n+1}<2$

ومنه $\forall n\in\mathbb{N}: \quad 0\le U_n<2$

3- أ- لتكن المتتالية (V_n) بحيث $V_n=2-U_n$

بما أن $\forall n\in\mathbb{N}: \quad U_n<2$

فإن $\forall n\in\mathbb{N}: \quad 0<2-U_n$

إذن $\forall n\in\mathbb{N}: \quad 0<V_n$

وبالتالي V_n موجبة.

ب- لدينا $(\forall n\in\mathbb{N}): \quad 2\le 2+\sqrt{2+U_n}$

إذن $(\forall n\in\mathbb{N}): \quad \frac{1}{2+\sqrt{2+U_n}}\le\frac{1}{2}$

إذن $(\forall n\in\mathbb{N}): \quad \frac{2-\sqrt{2+U_n}}{\left(2+\sqrt{2+U_n}\right)\left(2-\sqrt{2+U_n}\right)}\le\frac{1}{2}$

إذن $(\forall n\in\mathbb{N}): \quad \frac{2-\sqrt{2+U_n}}{4-2-U_n}\le\frac{1}{2}$

$(\forall n\in\mathbb{N}): \quad \frac{2-U_{n+1}}{2-U_n}\le\frac{1}{2}$

$(\forall n\in\mathbb{N}): \quad \frac{V_{n+1}}{V_n}\le\frac{1}{2}$

وبالتالي $\forall n\in\mathbb{N}: \quad \frac{V_{n+1}}{V_n}\le\frac{1}{2}$

ج- لنبين بالترجع أن: $\forall n\in\mathbb{N}: \quad V_n\le\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

من أجل $n=0$ لدينا $V_0\le\left(\frac{1}{2}\right)^{0-1}$ لأن $V_0=2-U_0=2$

و $\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}=2$

ليكن $n\in\mathbb{N}$ نفترض أن $V_n\le\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ ولنبين أن

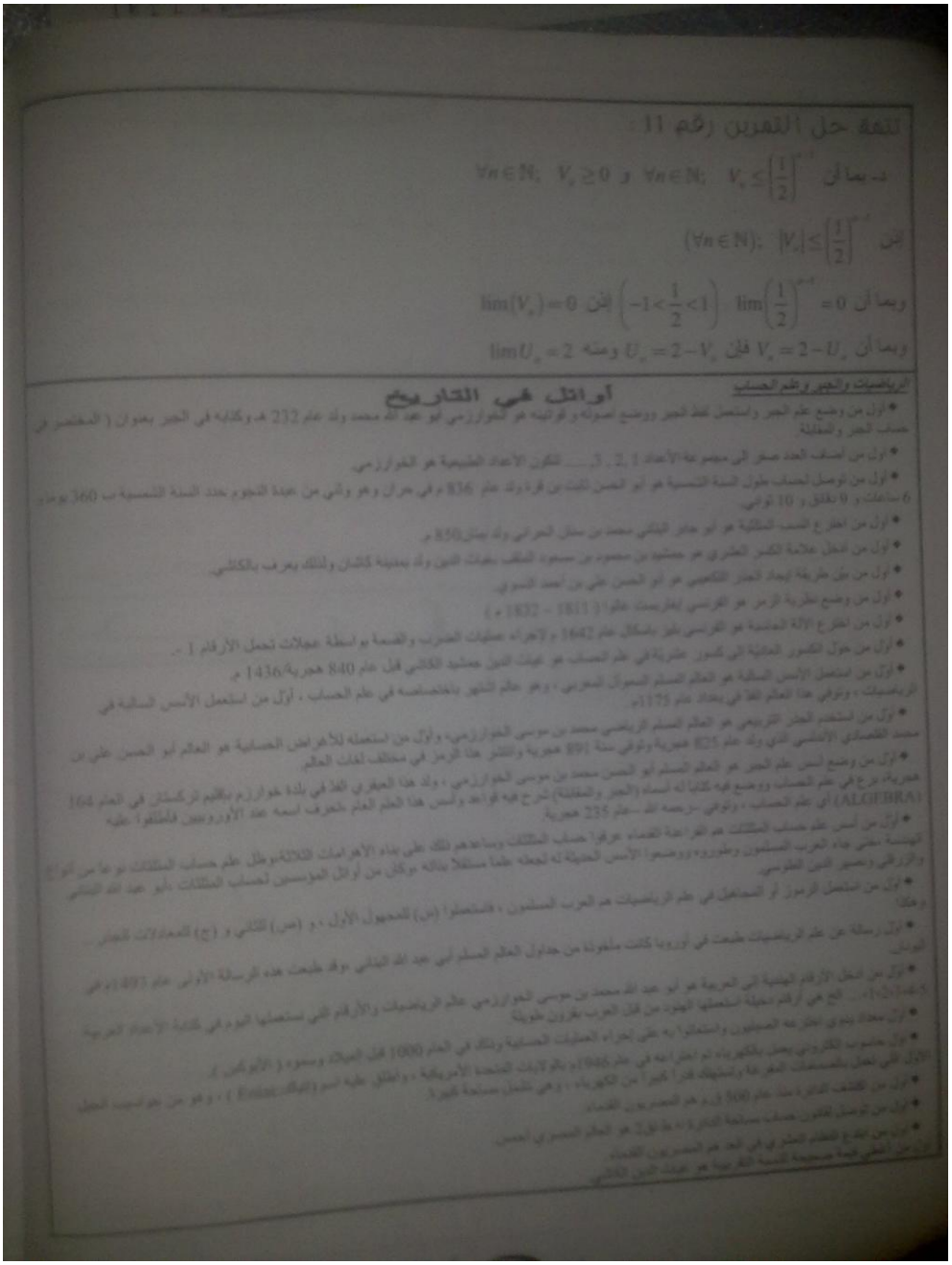
$V_{n+1}\le\left(\frac{1}{2}\right)^{n}$

لدينا (1) $\frac{V_{n+1}}{V_n}\le\frac{1}{2} \Rightarrow V_{n+1}\le\frac{1}{2}V_n$

وبما أن $\forall n\in\mathbb{N}: \quad V_n\le\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ فإن (2) $\frac{1}{2}V_n\le\left(\frac{1}{2}\right)^{n}$

ومن (1) و(2) نستنتج أن $V_{n+1}\le\left(\frac{1}{2}\right)^{n}$

إذن $\forall n\in\mathbb{N}: \quad V_n\le\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$



تتمة حل التمرين رقم 11 :

- بما أن $\forall n \in \mathbb{N};\ V_n \geq 0$ و $\forall n \in \mathbb{N};\ V_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$

فإن $(\forall n \in \mathbb{N}):\ |V_n| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$

وبما أن $\lim\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ $\left(-1 < \frac{1}{2} < 1\right)$ فإن $\lim(V_n) = 0$

وبما أن $V_n = 2 - U_n$ فإن $U_n = 2 - V_n$ ومنه $\lim U_n = 2$

الرياضيات والجبر وعلم الحساب

أوائل في التاريخ

- أول من وضع علم الجبر واستعمل كلمة الجبر ووضع أصوله وقوانينه هو الخوارزمي أبو عبد الله محمد ولد عام 232 هـ وكتابه في الجبر بعنوان (المختصر في حساب الجبر والمقابلة
- أول من أضاف العدد صفر إلى مجموعة الأعداد 1 ، 2 ، 3 ، ... لتكون الأعداد الطبيعية هو الخوارزمي.
- أول من توصل لحساب طول السنة الشمسية هو أبو الحسن ثابت بن قرة ولد عام 836 م في حران وهو رأي من عبدة النجوم حدد السنة الشمسية ب 360 يوم و 6 ساعات و 9 دقائق و 10 ثواني.
- أول من اخترع النسب المثلثية هو أبو عامر البتاني محمد بن سنان الحراني ولد بحران 850 م
- أول من أدخل علامة الكسر العشري هو جمشيد بن مسعود بن محمود غياث الدين جمشيد الكاشي ولد بمدينة كاشان ولذلك يعرف بالكاشي.
- أول من بين طريقة إيجاد الجذر التكعيبي هو أبو الحسن علي بن أحمد النسوي.
- أول من وضع نظرية الزمر هو الفرنسي إفاريست جالوا (1811 - 1832 م)
- أول من اخترع الآلة الحاسبة هو الفرنسي بلز باسكال عام 1642 م لإجراء عمليات الضرب والقسمة بواسطة عجلات تحمل الأرقام 1 ـ 9.
- أول من حول الكسور العادية إلى كسور عشرية في علم الحساب هو غياث الدين جمشيد الكاشي قبل عام 840 هجرية/1436 م
- أول من استعمل الأسس السالبة هو العالم المسلم السموأل المغربي ، وهو عالم اشتهر باختصاصه في علم الحساب ، أول من استعمل الأسس السالبة في الرياضيات ، وتوفي هذا العالم لغزا في بغداد عام 1175م
- أول من استخدم الجذر التربيعي هو العالم المسلم الرياضي محمد بن موسى الخوارزمي، وأول من استعمله للأعراض الحسابية هو العالم أبو الحسن علي بن محمد القلصادي الأندلسي الذي ولد عام 825 هجرية وتوفي سنة 891 هجرية وانتشر هذا الرمز في مختلف أنحاء العالم
- أول من وضع أسس علم الجبر هو العالم المسلم أبو الحسن محمد بن موسى الخوارزمي ، ولد هذا العبقري الفذ في بلدة خوارزم بإقليم تركستان في العام 164 هجرية درج في علم الحساب ووضع فيه كتابا له أسماه (الجبر والمقابلة) شرح فيه قواعد وأسس هذا العلم الهام وحرف اسمه عند الأوروبيين فأطلقوا عليه (ALGEBRA) أي علم الحساب ، وتوفي -رحمه الله- عام 235 هجرية
- أول من أسس علم حساب المثلثات هم أفراد القضاء عرفوا حساب المثلثات وبنوا عليه ذلك على بناء الأهرامات الثلاثة وظل علم حساب المثلثات نوعا من أنواع الهندسة حتى جاء العرب المسلمون وطوروه ووضعوا الأسس الحديثة له لجعله علما مستقلا بذاته وكان من أوائل المؤسسين لحساب المثلثات أبو عبد الله البتاني والفرغاني وحسين الذين الطوسي.
- أول من استعمل الرموز أو المتماثل في علم الرياضيات هو العرب المسلمون ، فاستعملوا (ش) للمجهول الأول ، و (ص) الثاني و (ع) المعادلات للتعبير عن المجهول.
- أول رسالة عن علم الرياضيات طبعت في أوروبا كانت مأخوذة من جداول العالم المسلم أبي عبد الله البتاني ، وقد طبعت هذه الرسالة الأولى عام 1493م في مدينة بولونيا.
- أول من أدخل الأرقام الهندية إلى العربية هو أبو عبد الله محمد بن موسى الخوارزمي عالم الرياضيات والأرقام التي نستعملها اليوم في كافة الأنحاء العربية هي أرقام الخلية استعملها العرب من قبل العرب بقرون طويلة
- أول معادلة ينوي الجبر عليه المسلمون واستدلوا به على إجراء العمليات الحسابية وذلك في العام 1000 قبل الميلاد وسموه (الأوركس).
- أول حاسوب الكتروني يعمل بالكهرباء تم اختراعه في عام 1946م بالولايات المتحدة الأمريكية ، وأطلق عليه اسم (الماك Eniac) ، وهو من جوانب الحل الأول التي تعمل بالمعدلات المعقدة وتستهلك قدرا كبيرا من الكهرباء ، وهي تشمل مساحة كبيرة.
- أول من اكتشف الذرة عام 500 ق.م هم المصريون القدماء
- أول من توصل لقانون حساب مساحة الدائرة هو العالم المصري أحمس.
- أول من اخترع النظام العشري في العد هم المصريون القدماء
- أول من أعطى قيمة حسابية للنسبة التقريبية هو عبد الله البتاني