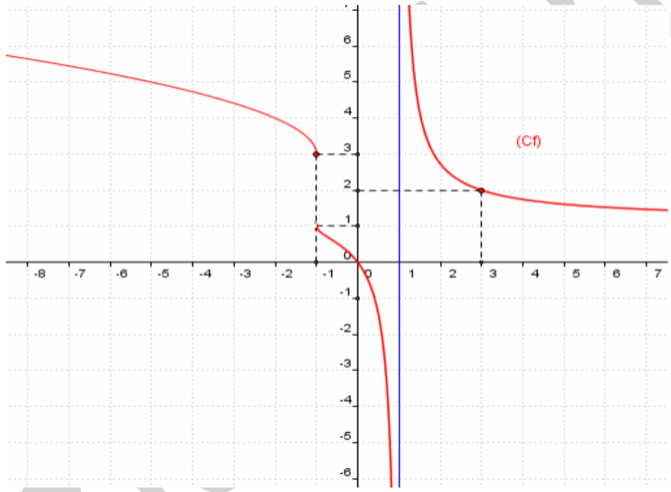
اتصال دالة عددية

I. الاتصال في نقطة – الاتصال على مجال

1) الإتصال في نقطة

a) نشاط

ليكن C_f منحنى دالة عددية f في الشكل التالي :



i. من خلال الشكل كيف ترى منحنى C_f عند النقطة ذات الأفصول 1 - ثم عند النقطة ذات الأفصول 3

ii. أ-أحسب $f(3)$ و $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$ ماذا تلاحظ ؟

ب- أحسب $f(-1)$ وأحسب نهاية f عند -1 ماذا تستنتج؟

تصحيح النشاط

i. من خلال الشكل نلاحظ أن المنحنى C_f متقطع عند النقطة ذات الأفصول 1 - ومتصل عند النقطة ذات الأفصول 3

ii. أ- من خلال الشكل لدينا $f(3)=2$ و $\lim\limits_{x\to 3} f(x)=2$ نلاحظ أن $\lim\limits_{x\to 3} f(x)=f(3)$

لذا نقول أن الدالة f متصلة في 3.

ب- من خلال الشكل لدينا $f(-1)=3$ و $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=1$ و $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=3$

نلاحظ أن:

$\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)\neq \lim\limits_{x\to -1^+} f(x)$ نقول أن f غير متصلة في 1- .

$\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)\neq f(-1)$ نقول أن f غير متصلة على اليمين في 1-.

$\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=f(-1)$ نقول أن متصلة على اليسار في 1-.

b) تعريف

لتكن f دالة عددية معرفة على مجال مفتوح I و x_0 عنصر من I، تكون f متصلة في النقطة x_0 إذا وفقط إذا كان :

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

مثال

نعتبر الدالة العددية f المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{2x^2-2}{x-1} & ; x \neq 1 \\ f(1) = 4 \end{cases}$$

لنبين أن f متصلة في 1.

لدينا

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 1} f(x) &= \lim_{x \to 1} \frac{2x^2-2}{x-1} \\ &= \lim_{x \to 1} \frac{2(x^2-1)}{x-1} \\ &= \lim_{x \to 1} \frac{2(x-1)(x+1)}{x-1} \\ &= \lim_{x \to 1} 2(x+1) \\ &= 4 \end{aligned}$$

إذن $\lim_{x \to 1} f(x) = f(1)$ منه f متصلة في 1

c) الاتصال على اليمين -الاتصال على اليسار

تعريف

لتكن f دالة عددية معرفة على مجال من نوع $[x_0, x_0+\alpha[$ حيث $\alpha > 0$ تكون f متصلة على اليمين في x_0 إذا وفقط إذا كان: $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$

لتكن f دالة عددية معرفة على مجال من نوع $]x_0-\alpha, x_0]$ حيث $\alpha > 0$ تكون f متصلة على اليسار في x_0 إذا وفقط إذا كان: $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$

خاصية

لتكن f دالة عددية معرفة على مجال مفتوح I و x_0 عنصر من I، تكون f متصلة في النقطة x_0 إذا وفقط إذا كانت f متصلة على اليمين وعلى اليسار في x_0.

d) تطبيق

1) لتكن f دالة عددية بحيث $f(x) = \dfrac{-x^2-x+6}{x^2+2x-8}$

أ- حدد D_f وأحسب نهايات f عند محدات D_f.

ب – أدرس اتصال الدالة في 4- و2-.

2) لتكن g دالة عددية بحيث:

$$\begin{cases} g(x)=2x+1; x>2 \\ g(x)=x^2-1; x\le 2 \end{cases}$$

أدرس اتصال g في 2.

<u>*تصحيح التطبيق*</u>

1)أ-

لنحدد D_f

لدينا: $D_f=\{x\in\mathbb{R} / x^2+2x-8\neq 0\}$

لنحل المعادلة $x^2+2x-8=0$

لدينا $\Delta=36$

نجد $x_1=2$ و $x_2=-4$

إذن $D_f=\mathbb{R}\setminus\{-4;2\}$

أي أن $D_f=]-\infty,-4[\cup]-4,2[\cup]2,+\infty[$

لنحسب نهايات f عند محدات D_f.

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-x^2}{x^2}$

$\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-1}$

- $\lim\limits_{x\to-4^-} f(x)=\lim\limits_{x\to-4^-}\frac{-(x-2)(x+3)}{(x-2)(x+4)}$

$\lim\limits_{x\to-4^-} f(x)=\lim\limits_{x\to-4^-}\frac{-(x+3)}{(x+4)}$

$\lim\limits_{x\to-4^-} f(x)=\frac{1}{0^-}$

$\boxed{\lim\limits_{x\to-4^-} f(x)=-\infty}$

- $\lim\limits_{x\to-4^+} f(x)=\lim\limits_{x\to-4^+}\frac{-(x-2)(x+3)}{(x-2)(x+4)}$

$\lim\limits_{x\to-4^+} f(x)=\lim\limits_{x\to-4^+}\frac{-(x+3)}{(x+4)}$

$\lim\limits_{x\to-4^+} f(x)=\frac{1}{0^+}$

$\boxed{\lim\limits_{x\to-4^+} f(x)=+\infty}$

- $\lim\limits_{x\to2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to2^-}\frac{-(x-2)(x+3)}{(x-2)(x+4)}$

$\lim\limits_{x\to2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to2^-}\frac{-(x+3)}{(x+4)}$

$\boxed{\lim\limits_{x\to2^-} f(x)=\frac{-5}{6}}$

- $\lim\limits_{x\to2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to2^+}\frac{-(x-2)(x+3)}{(x-2)(x+4)}$

$\lim\limits_{x\to2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to2^+}\frac{-(x+3)}{(x+4)}$

$\boxed{\lim\limits_{x\to2^+} f(x)=\frac{-5}{6}}$

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-x^2}{x^2}$

$\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-1}$

ب- لدينا $\lim\limits_{x\to2^+} f(x)\neq\lim\limits_{x\to2^-} f(x)$ إذن f متصلة في 2

لدينا $\lim\limits_{x\to-4^+} f(x)\neq\lim\limits_{x\to-4^-} f(x)$ إذن f غير متصلة في 4-

2) لدينا $g(2)=3$ و $\lim\limits_{x\to2^-} g(x)=\lim\limits_{x\to2^-} x^2-1=3$

و $\lim\limits_{x\to2^+} g(x)=\lim\limits_{x\to2^+} 2x+1=5$

إذن g متصلة على اليسار في2 و غير متصلة على اليمين 2

وبالتالي g غير متصلة في 2.

2) الاتصال على مجال

تعريف

لتكن f دالة عددية معرفة على مجال $[a,b]$ ،

تكون f متصلة على $]a,b[$ ،إذا وفقط إذا كانت f متصلة في كل نقطة من $]a,b[$.

تكون f متصلة على $[a,b]$ ،إذا وفقط إذا كانت f متصلة في كل نقطة من $]a,b[$ ومتصلة على اليمين في a و على اليسار في b .

ملاحظات

*بالمثل نعرف الاتصال على $]a,b]$ و على $[a.b[$ وعلى $[a,+\infty[$ و على $]-\infty,b]$.

*التمثيل المبياني لدالة متصلة على f على $[a,b]$ هو منحنى متصل طرفاه النقطتين $(a, f(a))$ و $(b, f(b))$.

خاصيات

*كل دالة حدودية متصلة على $\mathbb{R}$.

*كل دالة جدرية متصلة على كل مجال ضمن مجموعة تعريفها .

* الدالة $x \to \sqrt{x}$ متصلة على $\mathbb{R}^+$.

*دالة الجيب $x \to \sin x$ ودالة جيب تمام $x \to \cos x$ متصلة على $\mathbb{R}$.

*دالة الظل $x \to \tan x$ متصلة على كل مجال ضمن مجموعة تعريفها.

3) دالة الجزء الصحيح

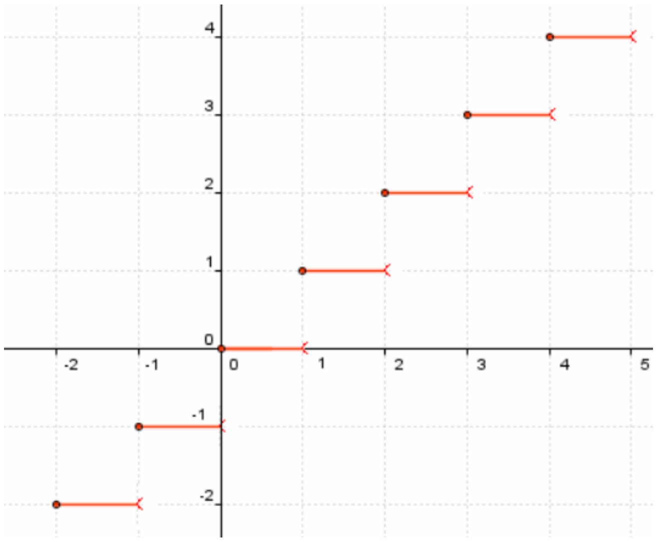
لكل عدد حقيقي x يوجد عدد نسبي وحيد n حيث $n \le x < n+1$ ، العدد الصحيح النسبي n يسمى الجزء الصحيح للعدد x .

تعريف

دالة الجزء الصحيح هي الدالة التي تربط كل عنصر x من $\mathbb{R}$ بجزئه الصحيح نرمز لصورة x بهذه الدالة بالرمز $E(x)$ ولدينا:

$$E(x) = n \Leftrightarrow \exists! n \in \mathbb{Z} \quad n \le x < n+1$$

التمثيل المبياني لدالة الجزء الصحيح



نتائج

لكل $n \in \mathbb{Z}$

*دالة الجزء الصحيح متصلة على اليمين في n وغير متصلة على اليسار في n .

* دالة الجزء الصحيح متصلة على $[n, n+1[$.

* دالة الجزء الصحيح غير متصلة في n .

4) قصور دالة عددية

تعريف

إذا كانت f دالة عددية معرفة على المجال I و g دالة عددية معرفة على المجال J ضمن I بحيث $g(x) = f(x)$ $\forall x \in J$، فإننا نقول أن الدالة g قصور الدالة f على المجال J .

نتيجة

إذا كانت f دالة متصلة على المجال I و g قصور الدالة f على المجال J فإن g متصلة على المجال J .

مثال

لتكن f دالة عددية معرفة على $[-1, +\infty[$ بمايلي :

$$\begin{cases} f(x) = \sqrt{x} & x > 1 \\ f(x) = \dfrac{3x^2}{x+2}; & -1 \le x \le 1 \end{cases}$$

لنبين أن الدالة f متصلة على المجال $[-1, +\infty[$.

نعلم أن الدالة $x \mapsto \sqrt{x}$ متصلة على $\mathbb{R}^+$ و بالتالي متصلة على المجال $]1, +\infty[$.

الدالة $x \mapsto \dfrac{3x^2}{x+2}$ عبارة عن دالة جذرية إذن فهي متصلة على مجموعة تعريفها.ومنه فإنها متصلة على المجال $[-1,1]$ وبالتالي f متصلة على $[-1, +\infty[$

II. العمليات على الدوال المتصلة

1) خاصية (تقبل)

لتكن f و g دالتين عدديتين متصلتين على المجال I و α عدد حقيقي.

* الدوال $f+g$ و αf و $f\times g$ متصلة على I.

* إذا كانت g لاتنعدم على المجال I فإن الدالتين $\frac{1}{g}$ و $\frac{f}{g}$ متصلتان على المجال I.

2) إتصال مركبة دالتين

خاصية

لتكن f دالة عددية معرفة على المجال I و g دالة عددية معرفة على المجال J حيث $f(I)\subset J$، إذا كانت f متصلة على I و g دالة متصلة على J فإن $g\circ f$ متصلة على I.

تطبيق 2

نعتبر f الدالة العددية المعرفة ب $f(x)=\sin\left(\frac{3}{x}\right)$

1. حدد D_f.
2. أكتب f على شكل مركبة دالتين ،ثم أدرس إتصال الدالة f على D_f.

تصحيح التطبيق2

1. لدينا $D_f=\mathbb{R}^*$
2. نضع $f(x)=h(g(x))$ بحيث: $g(x)=\frac{3}{x}$ و $h(x)=\sin x$

لدينا g دالة جذرية إذن فهي متصلة على مجموعة تعريفها($\mathbb{R}^*$).و h دالة متصلة على $\mathbb{R}$ إذن فهي متصلة على $\mathbb{R}^*$ و بالتالي f متصلة على $\mathbb{R}^*$.

نتيجة

لتكن f دالة موجبة ومتصلة على مجال I ، $f(I)\subset[0,+\infty[$ والدالة g المعرفة ب $g(x)=\sqrt{x}$ متصلة على $[0,+\infty[$ إذن الدالة $\sqrt{f}$ متصلة على مجال I.

III. صورة مجال بدالة عددية

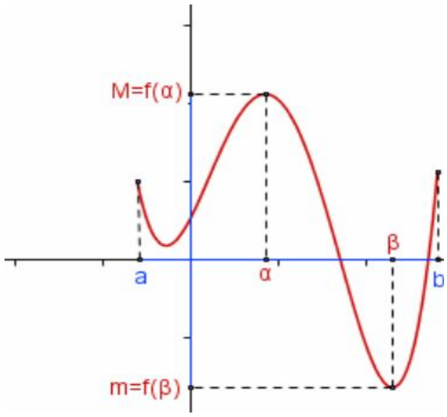
1) صورة قطعة – صورة مجال

خاصية

صورة قطعة بدالة متصلة هي عبارة عن قطعة.

صورة مجال بدالة متصلة هي عبارة عن مجال.

ملاحظات



*إذا كانت f متصلة على $[a.b]$ فإنه يوجد α و β من $[a.b]$. حيث

$$M = f(\beta) = \sup_{x\in[a.b]}\left(f(x)\right) \text{ و } m = f(\beta) = \inf_{x\in[a.b]}\left(f(x)\right)$$

ولدينا $f\left([a,b]\right) = [m;M]$

*إذا كان I من $\mathbb{R}$ و $f(I)$ ليس مجالا من $\mathbb{R}$ فإن f غير متصلة على I.

2) مبرهنة القيم الوسطية

f دالة متصلة على $[a,b]$ و k عدد حقيقي بحيث $k \in f\left([a,b]\right)$. يوجد على الأقل عدد c محصور بين a و b حيث $f(c) = k$

خاصية

إذا كانت f دالة متصلة على I و a و b عنصرين منه فإن لكل عدد k محصور بين $f(a)$ و $f(b)$ يوجد على الأقل عدد c محصور بين a و b حيث $f(c) = k$

نتيجة

إذا كانت f دالة متصلة على $[a,b]$ وكان $f(a).f(b) < 0$ فإن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل على الأقل حلا في $]a,b[$.

تطبيق3

بين أن المعادلة $2\sin x = x$ تقبل على الأقل حلا في المجال $I = \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$.

لدينا $2\sin x = x$ تكافئ $2\sin x - x = 0$ نضع: $f(x) = 2\sin x - x$

لدينا f متصلة على I ولدينا $f(\pi/2)f(\pi) < 0$ إذن المعادلة $2\sin x = x$ تقبل على الأقل حلا في I.

3) صورة مجال بدالة متصلة ورتيبة قطعا

الدالة f متصلة وتزايدية قطعا		الدالة f متصلة وتناقصية قطعا	
المجال	صورته	المجال	صورته
$[a,b]$	$[f(a), f(b)]$	$[a,b]$	$[f(b), f(a)]$
$[a,b[$	$\left[f(a), \lim_{x\to b^-} f(x)\right[$	$[a,b[$	$\left]\lim_{x\to b^+} f(x), f(a)\right]$
$]a,b]$	$\left]\lim_{x\to a^+} f(x), f(b)\right]$	$]a,b]$	$\left[f(b), \lim_{x\to a^+} f(x)\right[$
$[a,+\infty[$	$\left[f(a), \lim_{x\to +\infty} f(x)\right[$	$[a,+\infty[$	$\left]\lim_{x\to +\infty} f(x), f(a)\right]$
$]a,b[$	$\left]\lim_{x\to a^+} f(x), \lim_{x\to b^-} f(x)\right[$	$]a,b[$	$\left]\lim_{x\to b^-} f(x), \lim_{x\to a^+} f(x)\right[$
$]-\infty,a[$	$\left]\lim_{x\to -\infty} f(x), \lim_{x\to a^-} f(x)\right[$	$]-\infty,a[$	$\left]\lim_{x\to a^-} f(x), \lim_{x\to -\infty} f(x)\right[$

نتيجة1

إذا كانت f دالة متصلة ورتيبة قطعا على $[a,b]$ فإن لكل عدد k محصور بين $f(a)$ و $f(b)$ يوجد عدد وحيد c محصور بين a و b حيث $f(c)=k$

نتيجة2

إذا كانت f دالة متصلة ورتيبة قطعا على $[a,b]$ وكان $f(a).f(b)<0$ فإن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا في $]a,b[$

IV. الدالة العكسية لدالة متصلة ورتيبة قطعا على مجال

1) الدالة العكسية

خاصية

إذا كانت f دالة متصلة ورتيبة قطعا على مجال I فإن لكل y من I المعادلة $f(x)=y$ تقبل حلا وحيدا في I (نعبر عن هذا بقولنا f تقابل من I نحو $f(I)$)

تعريف

لتكن f دالة متصلة ورتيبة قطعا على مجال I و J مجال حيث $f(I)=J$ ، الدالة التي تربط كل عنصر y بالعنصر الوحيد x من I بحيث $f(x)=y$ تسمى الدالة العكسية للدالة f نرمز لها بالرمز f^{-1} .

نتائج

لتكن f دالة متصلة ورتيبة قطعا على مجال I و f^{-1} دالتها العكسية لدينا

- $f^{-1}(y)=x \Leftrightarrow y=f(x) \qquad \forall y\in f(I),\exists! x\in I$
- $\left(f^{-1}\circ f\right)(x)=x \qquad \forall x\in I$
- $\left(f\circ f^{-1}\right)(y)=y \qquad \forall y\in f(I)$

2) خاصيات الدالة العكسية

إذا كانت f دالة متصلة ورتيبة قطعا على مجال I و f^{-1} دالتها العكسية فإن :

- f^{-1} متصلة على $f(I)$.
- f^{-1} رتيبة قطعا على $f(I)$ ولها نفس رتابة f على المجال I .
- $C_{f^{-1}}$ منحنى الدالة f^{-1} هو مماثل المنحنى C_f بالنسبة للمستقيم الذي معادلته $y=x$ في معلم متعامد ممنظم .

تطبيق4

نعتبر الدالة f بحيث : $f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$

1. حدد D_f .
2. بين أن f متصلة ورتيبة قطعا على المجال $I=]1,+\infty[$.

3. بين أن f تقبل دالة عكسية معرفة على مجال J يتم تحديده.

4. حدد f^{-1} لكل x من J .

<table>
<tr><th colspan="2">تصحيح التطبيق 4</th></tr>
<tr>
<td>
1- لدينا $D_f=\mathbb{R}\setminus\{1\}$
2- الدالة f عبارة عن دالة جذرية معرفة على المجال $]1,+\infty[$ إذن f متصلة على $]1,+\infty[$
ليكن x و y من $]1,+\infty[$ لدينا :
$T=\dfrac{f(x)-f(y)}{x-y}$
$T=\dfrac{\dfrac{x+1}{x-1}-\dfrac{y+1}{y-1}}{x-y}$
$T=\dfrac{(x+1)(y-1)-(y+1)(x-1)}{(x-y)(x-1)(y-1)}$
$T=\dfrac{xy-x+y-1-xy+y-x+1}{(x-y)(x-1)(y-1)}$
$T=\dfrac{-2x+2y}{(x-y)(x-1)(y-1)}$
$T=\dfrac{-2(x-y)}{(x-y)(x-1)(y-1)}$
$T=\dfrac{-2}{(x-1)(y-1)}$
</td>
<td>
إذن $T<0$ على المجال $]1,+\infty[$
وبالتالي f تناقصية قطعا على $]1,+\infty[$
3- لدينا f متصلة ورتيبة قطعا على $]1,+\infty[$ إذن f تقبل دالة عكسية معرفة على المجال J بحيث:
$J=f(]1,+\infty[)$
$J=]1,+\infty[$
4-لدينا: $\forall x\in J\exists! y\in I \quad f^{-1}(x)=y \Leftrightarrow f(y)=x$
$\Leftrightarrow \dfrac{y+1}{y-1}=x$
$\Leftrightarrow 1+\dfrac{2}{y-1}=x$
$\Leftrightarrow \dfrac{2}{y-1}=x-1$
$\Leftrightarrow y-1=\dfrac{2}{x-1}$
$\Leftrightarrow y=\dfrac{x+1}{x-1}$
إذن $f^{-1}(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$
</td>
</tr>
</table>

3) دالة الجذر من الرتبة n

أ - تعريف دالة الجذر من الرتبة n

نعلم أن الدالة $x\mapsto x^n$ بحيث n عدد صحيح طبيعي غير منعدم دالة متصلة وتزايدية قطعا على $\mathbb{R}^+$ إذن تقبل دالة عكسية.

تعريف

الدالة العكسية للدالة $x\mapsto x^n$ بحيث n عدد صحيح طبيعي غير منعدم تسمى دالة الجذر من الرتبة n نرمز لها ب $\sqrt[n]{\ }$، العدد الحقيقي $\sqrt[n]{x}$ يقرأ جذر من الرتبة n ل x وهو صورة x بالدالة $\sqrt[n]{\ }$.

أمثلة

ليكن x عدد حقيقي موجب.

- $\sqrt[1]{x}=x$
- $\sqrt[2]{x}=\sqrt{x}$ جذر مربع للعدد x .
- $\sqrt[3]{x}$ جذر مكعب للعدد x .

خاصية

- الدالة $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ بحيث n عدد صحيح طبيعي غير منعدم متصلة على $\mathbb{R}^+$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt[n]{x}$.
- منحنى الدالة $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ مماثل لمنحنى الدالة $x \mapsto x^n$ بالنسبة للمنصف الاول للمعلم.

نتائج

ليكن عدد صحيح طبيعي لدينا مايلي:

- $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^{+2} \quad \sqrt[n]{x^n} = \left(\sqrt[n]{x}\right)^n = x$
- $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^{+2} \quad \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{y} \Leftrightarrow x = y$
- $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^{+2} \quad \sqrt[n]{x} < \sqrt[n]{y} \Leftrightarrow x < y$

أمثلة

لدينا :

$\sqrt[n]{1} = 1$ و $\sqrt[n]{0} = 0$ بحيث عدد صحيح طبيعي غير منعدم

$\sqrt[3]{27} = \sqrt[3]{3^3} = 3$

$\sqrt[5]{32} = \sqrt[5]{2^5} = 2$

ب -<u>العمليات على الجذور</u>

ليكن n و p عددين صحيحين طبيعيين غير منعدمين و a و b عددين حقيقيين موجبين.

- $\sqrt[n]{a} = \sqrt[np]{a^p}$
- $b \neq 0 \quad \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$
- $\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$
- $\sqrt[n]{\sqrt[p]{a}} = \sqrt[np]{a}$

ج -<u>اتصال ونهاية مركبة دالة ودالة الجذر من الرتبة</u>

خاصيات

لتكن f دالة موجبة على مجال I و x_0 عنصرا من I .

- إذا كانت f متصلة على I فإن متصلة على I .
- إذا كانت $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l$ فإن $\lim\limits_{x\to x_0} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{l}$.
- إذا كانت $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ فإن $\lim\limits_{x\to x_0} \sqrt[n]{f(x)} = +\infty$.

ملاحظة : الخاصيتان الأخيرتان صحيحتان إذا كان يؤول إلى أو على اليمين أو على اليسار .

د - **تطبيق5**

1-حل في المعادلات التالية :

$x^6-3=0$ ؛ $x^3+7=0$

$\sqrt[3]{(3+x)^2}+\sqrt[3]{(3-x)^2}=2\sqrt[3]{9-x^2}$

2-أحسب النهايات التالية:

$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x+8}-2}{x}$ ؛ $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[3]{x+63}-4}$ ؛ $\lim_{x\to 1^+}\frac{\sqrt{x^2-1}}{\sqrt[3]{x-1}}$ ؛ $\lim_{x\to+\infty} x-\sqrt[3]{x^3+x^2}$

تطبيق5

1- *لدينا:

$\Leftrightarrow x^6-3=0$

$\Leftrightarrow x^6=3$

$\Leftrightarrow x=\sqrt[6]{3}$

إذن $S_1=\left\{\sqrt[6]{3}\right\}$

* لدينا

$\Leftrightarrow x^3+7=0$

$\Leftrightarrow x^3=-7$

$\Leftrightarrow (-x)^3=7$

$\Leftrightarrow -x=\sqrt[3]{7}$

$\Leftrightarrow x=-\sqrt[3]{7}$

إذن $S_2=\left\{-\sqrt[3]{7}\right\}$

*لدينا:

$\Leftrightarrow \sqrt[3]{(3+x)^2}+\sqrt[3]{(3-x)^2}=2\sqrt[3]{9-x^2}$

$\Leftrightarrow \sqrt[3]{(3+x)^2}+\sqrt[3]{(3-x)^2}-2\sqrt[3]{9-x^2}=0$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt[3]{(3+x)}\right)^2+\left(\sqrt[3]{(3-x)}\right)^2-2\sqrt[3]{3-x}\sqrt[3]{3+x}=0$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt[3]{3+x}-\sqrt[3]{3-x}\right)^2=0$

$\Leftrightarrow \sqrt[3]{3+x}=\sqrt[3]{3-x}$

$\Leftrightarrow 3+x=3-x$

$\Leftrightarrow x=0$

إذن $S_2=\{0\}$

*-2

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x+8}-2}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt[3]{x+8}\right)^3-2^3}{x\left[\left(\sqrt[3]{x+8}\right)^2+2\sqrt[3]{x+8}+4\right]}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x+8}-2}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x\left[\left(\sqrt[3]{x+8}\right)^2+2\sqrt[3]{x+8}+4\right]}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x+8}-2}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\left(\sqrt[3]{x+8}\right)^2+2\sqrt[3]{x+8}+4}$$

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x+8}-2}{x}=\frac{1}{12}}$$

*

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[3]{x+63}-4}=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x+63-64}\times\frac{\left(\sqrt[3]{x+63}\right)^2+4\sqrt[3]{x+63}+16}{\left(\sqrt[3]{x}\right)^2+\sqrt[3]{x}+1}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[3]{x+63}-4}=\lim_{x\to 1}\frac{\left(\sqrt[3]{x+63}\right)^2+4\sqrt[3]{x+63}+16}{\left(\sqrt[3]{x}\right)^2+\sqrt[3]{x}+1}$$

$$\boxed{\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[3]{x+63}-4}=16}$$

4) القوة الجذرية لعدد حقيقي موجب

تعريف

ليكن x عدد حقيقي موجب قطعا و r عددا جذريا غير منعدم حيث $r=\frac{p}{q}$ مع $(p,q)\in\mathbb{N}^{*2}$.

القوة الجذرية للعدد الحقيقي x ذات الأس r هي العدد الحقيقي x^r و المعرفة بما يلي $x^{\frac{p}{q}}=\sqrt[q]{x^p}$

أمثلة

لدينا : $\sqrt[n]{x}=x^{\frac{1}{n}}$ ؛؛ $\sqrt{3^5}=3^{\frac{5}{2}}$ ؛؛ $\sqrt[3]{5^2}=5^{\frac{2}{3}}$

خاصيات

ليكن r و r' عددين جذريين و a و b عددين حقيقين موجبين قطعا لدينا مايلي:

- $\left(a^r\right)^{r'}=a^{rr'}$ ؛؛ $a^rb^r=(ab)^r$ ؛؛ $a^ra^{r'}=a^{r+r'}$
- $\frac{a^r}{a^{r'}}=a^{r-r'}$ ؛؛ $\frac{a^r}{b^r}=\left(\frac{a}{b}\right)^r$ ؛؛ $\frac{1}{a^r}=a^{-r}$

V. طريقة التفرع الثنائي

هناك بعض المعادلات من نوع $f(x)=0$ لايمكن حلها جبريا .لكن يمكن تحديد قيمة مقربة لحل هذه المعادلة وذلك بإستعمال طريقة التفرع الثنائي .

لتكن f دالة متصلة و رتيبة قطعا على $[a,b]$ و $f(a)f(b)<0$ إذن يوجد عدد وحيد α حل للمعادلة $f(x)=0$ في المجال $[a,b]$.

- ❖ إذا كان $f(a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)>0$ فإن $\frac{a+b}{2}<\lambda<b$ و هذا تأطيرا للعدد λ سعته $\frac{b-a}{2}$
  نعيد هذه العملية بتعويض a ب $\frac{a+b}{2}$ ونحصل على تأطير سعته $\frac{b-a}{4}$ .....
- ❖ إذا كان $f(a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)<0$ فإن $a<\lambda<\frac{a+b}{2}$ و هذا تأطيرا للعدد سعته $\frac{b-a}{2}$
  نعيد هذه العملية بتعويض b ب $\frac{a+b}{2}$ ونحصل على تأطير سعته $\frac{b-a}{4}$ .....

<u>نعيد هذه العملية ككل إلى أن نحصل على التأطير المرغوب فيه</u>

تطبيق6

بين أن المعادلة $x^3+1=-x$ تقبل حلا وحيدا λ في المجال $\left]-1,\frac{-1}{2}\right[$ ثم حدد تأطيرا للعدد λ سعته $\frac{1}{8}$.