الثانية ع ر سلسلة 7	الحسابيات في $\mathbb{Z}$ (1)	ح.بوعيون

تمرين1

1) ما هو باقي قسمة العدد 1996^{1996} على 11 .
2) حدد باقي قسمة العدد $N = 2222^{3333} + 3333^{2222}$ على 5 .
3) a) $(\forall n \in IN) : 9 / n4^{n+1} - (n+1)4^n + 1$
b) $(\forall n \in IN) : 6 / n(2n+1)(7n+1)$
4) a) حدد بواقي القسمة الأقليدية للأعداد 4^n على 7 .
b) حدد حسب قيم العدد n باقي قسمة العدد :
$A = 851^{3n} + 851^{2n} + 2$ على 7 .
5) بين أنه إذا كان n عدد طبيعي غير مضاعف لـــ 3 فإن
$5^{2n} + 5^n + 1 \equiv 0[31]$.

تمرين2

حل في Z المعادلتين :
1) $n+8 \equiv 0[n-2]$ 2) $3n-2 \equiv 0[n+3]$.

تمرين3

ليكن A عدد فردي ومجموع مربعين كاملين .
ما هو باقي قسمة A على 4 ؟

تمرين4

ليكن a و b و c و d من $\mathbb{Z}^*$ بحيث
$a \wedge b = c \wedge d = 1$
بين أن $ac \wedge bd = (a \wedge d).(b \wedge c)$

تمرين5

1) ليكن a و b من $\mathbb{Z}^*$ بحيث $a \wedge b = 1$. أحسب
a) $(11a+5b) \wedge (13a+6b)$ b) $(a^3 - b^3) \wedge (a^2 - b^2)$
2) أحسب $(n!+1) \wedge ((n+1)!+1)$

تمرين6

بين أنه لكل $n \in IN^*$ لدينا
1) $(21n+4) \wedge (14n+3) = 1$
2) $(n^3+2n) \wedge (n^4+3n^2+1) = 1$
3) $(2^n+3^n) \wedge (2^{n+1}+3^{n+1}) = 1$

تمرين7

حل في IN^{*2} النظمات التالية :

1) $\begin{cases} x+y=48 \\ x\wedge y=6 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} xy=1512 \\ x\vee y=252 \end{cases}$

4) $\begin{cases} x\wedge y=5 \\ x\vee y=30 \end{cases}$ 5) $\begin{cases} x+y=276 \\ x\vee y=1440 \end{cases}$ 6) $\begin{cases} x\vee y=210(x\wedge y) \\ y-x=x\wedge y \end{cases}$

7) $\begin{cases} x\vee y-3(x\wedge y)=108 \\ 10\le x\wedge y\le 15 \end{cases}$ 8) $x\vee y-(x\wedge y)=187$

تمرين8

ليكن a و b من $\mathbb{Z}^*$ و $n \in IN^*$.
1) بين أن $a^n \wedge b^n = (a \wedge b)^n$
2) استنتج أن $a^n / b^n = a / b$
3) بين أن $(\forall x \in \mathbb{Q}^*) : x^n \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x \in \mathbb{Z}$

تمرين9

نعتبر في Z^2 المعادلة $3x - 5y = 13$ (1)
1) حل في Z^2 المعادلة (1) .
2) حدد الحلول (x,y) للمعادلة (1) بحيث $\frac{x}{y} \in Z$.
3) بين أنه لكل k من Z لدينا :
$(5k+1) \wedge (3k-2) = (k-5) \wedge 13$
4) حل في Z^2 النظمة : $\begin{cases} 3x-5y=13 \\ x\wedge y=13 \end{cases}$

تمرين10

1) بين أن : $a \wedge b = 1 \Leftrightarrow (a^2+b^2) \wedge ab = 1$
لكل a و b من $\mathbb{Z}^*$.
2) نعتبرفي $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ النظمة : $(S): \begin{cases} x^2+y^2=1300 \\ (x\wedge y).(x\vee y)=600 \end{cases}$
ليكن (x,y) حل للنظمة (S) و $d = x \wedge y$
a) بين أن $d = 10$. b) حل النظمة (S) .

تمرين11

1) بين أن $(5n^3 - n) \wedge (n+2) = (n+2) \wedge 38$
2) حدد قيم n التي يكون من أجلها $n+2 / 5n^3 - n$.
3) حدد القيم الممكنة للعدد $d = (5n^3 - n) \wedge (n+2)$
4) حدد قيم n التي يكون من أجلها $(5n^3 - n) \wedge (n+2) = 19$

تمرين12

ليكن m و n و p أعداد من $\mathbb{Z}$ بحيث :
$m^3 + n^3 + p^3 \equiv 0[7]$. بين أن $mnp \equiv 0[7]$

تمرين13

لكل $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$ نضع
$b = n - 1$ و $a = n^2 - 3n + 6$
1) بين أن : $a \wedge b = b \wedge 4$
2) استنتج $a \wedge b$ حسب قيم العدد n .

تمرين14

في كل ما سيأتي a و b عددين من Z^* أوليان فيما بينهما .

نضع $n = a^4 + b^4$.

1) a) بين أن $(\forall k \in Z) : (2k+1)^4 \equiv 1[16]$ (لاحظ أن $2/k(k+1)$)

b)استنتج من ذلك أن $n \equiv 1[16]$ أو $n \equiv 2[16]$.

2) ليكن p قاسم أولي وفردي للعدد n .

a) بين أن $p \wedge a = 1$ و $p \wedge b = 1$ (بالخلف) .

b) بين أنه يوجد c من Z بحيث $ca \equiv -1[p]$.

c) استنتج أنه يوجد x من Z بحيث $x^4 \equiv -1[p]$.

d) باستعمال القسمة الأقليدية ل p عل 8 ثم Fermat بين أن $p \equiv 1[8]$.

تمرين15

1) a) بين أن لكل a من Z : $a^2 \equiv 1[3]$ أو $a^2 \equiv 0[3]$

b) استنتج أن :

$$(\forall (a,b) \in Z^2) : a^2 + b^2 \equiv 0[3] \Rightarrow a \equiv b \equiv 0[3]$$

2) ليكن $(x,y,z) \in Z^3$ بحيث $x^2 + y^2 = 3z^2$

a) بين أن : $x \equiv y \equiv 0[3]$ و $3z^2 \equiv 0[9]$

b) استنتج أن : $x \equiv y \equiv z \equiv 0[3]$

تمرين16

1)حدد العدد x من IN بحيث $\overline{234x}_{(6)} \equiv 0[4]$

2) حدد a و b و c من IN بحيث $\begin{cases} \overline{bacb}_{(10)} \equiv 0[7] \\ \overline{bacb}_{(10)} \equiv 0[99] \end{cases}$

3) حدد x و y و z من IN بحيث $\overline{xyz}_{(7)} = \overline{zyx}_{(11)}$

تمرين17

نعتبر في Z^2 المعادلة $(E)\ x^2 + y^3 = 7$

I) بين أن المعادلة $x^2 + 1 \equiv 0[8]$ لا تقبل أي حل في Z .

II) نفترض فيما يلي ان المعادلة (E) تقبل حلا (x,y) .

1) بين أن y عدد فردي . نضع إذن y=2z+1 .

2) تحقق أن $x^2 + 1 = (2-y)m$ حيث $m = 4z^2 + 8z + 7$

3) بين أن $m \equiv 3[4]$.

4) ليكن $m = P_1^{\alpha_1} P_2^{\alpha_2} \cdots P_r^{\alpha_r}$ تفكيك m إلى جداء من عوامل أولية .

a) بين أن

$$(\forall i \in \{1,2,......,r\}) : P_i \equiv 1[4] \text{ أو } P_i \equiv 3[4]$$

b) بين بالخلف أنه يوجد $1 \leq i \leq r$ بحيث $P_i \equiv 3[4]$

5)استنتج مما سبق أنه يوجد عدد أولي p يحقق ما يلي :

$$\begin{cases} p \geq 3 \\ p \equiv 3[4] \\ x^2 + 1 \equiv 0[p] \end{cases}$$

6) a) بين أن $(-1)^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1[p]$

(لاحظ أن $-1 \equiv x^2[p]$ واستعمل Fermat) .

b) استنتج أن $p \equiv 1[4]$.

7) ما هي مجموعة حلول المعادلة (E) ؟

تمرين18

ليكن x عددا من IN^* بحيث: $\overline{36}^{(x)} + \overline{45}^{(x)} = \overline{103}^{(x)}$

أحسب $\overline{36}^{(x)} \times \overline{45}^{(x)}$

تمرين19

ليكن a و b و c اعدادا من IN بحيث $N \equiv \overline{abc}^{(10)}$

بين أن $N \equiv 0\ [17] \Rightarrow (2a-c)^2 + 2b^2 \equiv 0\ [17]$

تمرين20

ليكن n عدد صحيح طبيعي بحيث $n \geq 6$.

نضع $b = \overline{252}^{(n)}$ و $a = \overline{2310}^{(n)}$ و $d_n = a \wedge b$.

1) بين أن $(2n+1)/b$ و $(2n+1)/a$.

2) حدد بدلالة n العدد $\Delta_n = (n^2+n) \wedge (n+2)$

(ناقش حسب زوجية العدد n)

3) بين أن $d_n \in \{2(2n+1)\ ,\ 2n+1\}$.

4) نأخذ $n = 6$, حل في Z^2 في المعادلة:

$ax + by = -26$

تمرين21

نعتبر الأعداد x و y و z من IN بحيث :

$y = \overline{131}^{(x)}$ و $z = \overline{101}^{(x)}$

1) أكتب الجداء x.y.z في نظمة العد ذات الأساس x .

2) هل يمكن كتابة $x+y+z$ في نظمة العد ذات الأساس x؟

3) إذا علمت أن : $x+y+z = 50$

(في نظمة العد العشري) فأحسب :

$\overline{x+y+z}^{(x)}$ و $\overline{x.y.z}^{(10)}$

4) ليكن $N = \overline{342y}^{(x)}$, حدد قيم لكي يكون هذا العدد قابلا للقسمة

أ - على 5 من أجل $x = 6$.

ب - على 12 من أجل $x = 17$

تمرين22

1) ليكن m و n عددين طبيعيين وأوليين فيما بينهما

a) بين أن m+n و mn أوليان فيما بينهما .

b) بين أن أحد العددين a+b و ab فردي والآخر زوجي .

2) ليكن x و y من IN^* ، نضع

$$a = \frac{x}{\Delta} \text{ و } b = \frac{y}{\Delta} \text{ و } \Delta = x \wedge y \text{ و } M = x \vee y$$

a) بين أن $\begin{cases} x+y = 120 \\ M = \Delta^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a+b)ab = 120 \\ ab = \Delta \end{cases}$

b) استنتج في IN^{*2} حلول النظمة $\begin{cases} x+y = 120 \\ M = \Delta^2 \end{cases}$.

تمرين23

ليكن $k \in IN^*$ $A = 9(k+3)$; $B = 4k$; $d = A \wedge B$

1) بين أن $d/108$.

2) حدد قيم k التي يكون من أجلها i) 2 لايقسم d .

ii) 3 لايقسم d .

3) ليكن $k = 2+6m$ a) بين أن d=1 .

b) حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة $Ax - By = 108$

تمرين24

في IN^3 نعتبر المعادلة (1) $x^2 + 2y^2 = z^2$

1) a) بين أن $(\forall (m,n) \in IN^{*2}) : m^2/n^2 \Rightarrow m/n$.

b) بين أنه يكفي أن تدرس الحالة التي يكون فيها $x \wedge y = 1$
.

فيما يلي نفترض أن $x \wedge y = 1$ في المعادلة (1) .

2) a) بين أنه إذا كان (x, y, z) حلا للمعادلة (1) فإن x و z فرديان
و y زوجي .

b) نضع $d = (z-x) \wedge (z+x)$ بين أن d زوجي واستنتج أن d=2

c) بين أنه إذا كان $a^2 = bc$ و $c \wedge b = 1$ فإنه يوجد c’ و b’ بحيث $b = b'^2$ و $c = c'^2$.

d) ليكن α و β من IN بحيث $3 - x = 2\alpha$ و $3 + x = 2\beta$
بين أن α أو β زوجي واستنتج حلول المعادلة (1) .

تمرين25

ليكن $(n \in IN^*)$ ، نضع :

$A_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ ، $B_n = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ ، $C_n = (\dfrac{n(n+1)}{2})^2$.

1) بين أن A_n , B_n , C_n تنتمي ل IN^* .

2) احسب $A_n \wedge B_n$ (يمكن استعمال الموافقة بترديد3)

3) نضع $D_n = C_n \wedge C_{n+1}$

a) احسب D_n (يمكن استعمال الموافقة بترديدn)

b) ليكن $n \in IN^* - \{1\}$ بين أن الأعداد C_n , C_{n+1} , C_{n+2} أولية
فيما بينها .

تمرين5 a و b من $\mathbb{Z}^*$ نضع $A = pa + qb$ و
مع $B = ra + sb$

$(p,q,r,s) \in \mathbb{Z}^4$ وتحقق $ps - qr = 1$ و $A \neq 0, B \neq 0$

بين أن $A \wedge B = a \wedge b$.

تمرين26

1) ليكن m و n عددين طبيعيين وأوليين فيما بينهما .

a) بين أن m+n و mn أوليان فيما بينهما .

b) بين أن أحد العددين a+b و ab فردي والآخر زوجي .

2) ليكن x و y من IN^* ، نضع

$M = x \vee y$ و $\Delta = x \wedge y$ و $b = \dfrac{y}{\Delta}$ و $a = \dfrac{x}{\Delta}$

a) بين أن $\begin{cases} x + y = 120 \\ M = \Delta^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a+b)ab = 120 \\ ab = \Delta \end{cases}$

b) استنتج في IN^{*2} حلول النظمة $\begin{cases} x + y = 120 \\ M = \Delta^2 \end{cases}$.

تمرين27

بين أن $(\forall (a,b) \in \mathbb{Z}^2) : a \wedge b = 1 \Rightarrow a \wedge b(a+b) = 1$

2) ليكن x و y من IN^* بحيث $x(43-x) = y(x+y)$

نضع $x \wedge y = d$ و $x = dx'$ و $y = dy'$

a) بين أن x'/d .

b) نضع $\alpha = \dfrac{d}{x'}$.

بين أن $\alpha(x'^2 + x'y' + y'^2) = 43$ واستنتج أن $\alpha = 1$.

3) حل في IN^{*2} المعادلة $x(43-x) = y(x+y)$.

تمرين28

لكل $n \in IN^*$ نضع $x_n = 2^n - 1$

I) 1) a) بين أن $x_{n+1} = 2x_n + 1$: $(\forall n \in IN^*)$

b) استنتج أن $x_{n+1} \wedge x_n = 1$: $(\forall n \in IN^*)$

2) a) بين أن : $n \equiv 0[6] \Leftrightarrow x_n \equiv 0[9]$ (لاحظ أن $2^6 \equiv 1[9]$)

b) استنتج أنه يوجد مالانهاية له من الأعداد $n \in IN^*$ بحيث $n \wedge x_n \neq 1$

3) a) بين أن $(\forall (n,m) \in IN^{*2})$: $n/m \Rightarrow x_n / x_m$

b) ليكن m و n من IN^* . بين أنه إذا كان r باقي قسمة m على n فإن x_r هو باقي قسمة x_m على x_n
(لاحظ أن $2^n \equiv 1[x_n]$)

c) استنتج أن $x_m \wedge x_n = x_n \wedge x_r$

d) بين باستعمال خوارزمية أقليدس أن :
$(\forall (m,n) \in IN^{*2})$: $x_m \wedge x_n = x_{m \wedge n}$

II) فيما يلي نريد أن نبين أن :

$(\forall k \in IN^*)(\exists i \in \{1,2,3,.....,2k\}) : 2k+1 / x_i$

نفترض العكس يعني :

$(\exists k \in IN^*)(\forall i \in \{1,2,3,.....,2k\}) : x_i \neq 0[2k+1]$

ليكن R_i باقي قسمة x_i على $2k+1$

1) تحقق أن : $(\forall i \in \{1,2,3,.....,2k\}) : 1 \leq R_i \leq 2k$

2) a) بين أن : $x_i \equiv 2k[2k+1] \Leftrightarrow 2^i \equiv 0[2k+1]$

b) استنتج أن $(\forall i \in \{1,2,3,.....,2k\}) : R_i \neq 2k$

3) بين أن البواقي R_i مختلفة مثنى مثنى .

4) ماذا تستنتج ؟

تمرين29

1) ليكن x و y عددان طبيعيان بحيث $x \wedge y = 1$

بين أن $x^{\alpha} \wedge y^{\beta} = 1$ لكل α , β من IN .

2) ليكن $\frac{a}{b_1 b_2 ....b_n}$ عددا جذريا غير منعدم بحيث $b_i \wedge b_j = 1$
$\forall i \neq j$. أثبت وجود أعداد صحيحة نسبية $a_1 , a_2 , ..., a_n$
بحيث

$$\frac{a}{b_1 b_2 ......b_n} = \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + ... + \frac{a_n}{b_n} \cdot$$

3) ليكن a من Z^* و b من IN^* غير أولي . أثبت وجود أعداد نسبية غير
منعدمة $a_1 , a_2 , ..., a_n , b_1 , b_2 , ..., b_n$ بحيث $b_i \wedge b_j = 1$
و

$$\frac{a}{b} = \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + ... + \frac{a_n}{b_n}$$

تمرين30

1) a) بين أن لكل a من Z : $a^2 \equiv 1[3]$ أو $a^2 \equiv 0[3]$

b) استنتج أن :

$$(\forall (a,b) \in Z^2) : a^2 + b^2 \equiv 0[3] \Rightarrow a \equiv b \equiv 0[3]$$

2) ليكن $(x, y, z) \in Z^3$ بحيث $x^2 + y^2 = 3z^2$

a) بين أن : $x \equiv y \equiv 0[3]$ و $3z^2 \equiv 0[9]$

b) استنتج أن : $x \equiv y \equiv z \equiv 0[3]$

تمرين31

1) بين أن :

$$(\forall a, b) \in Z^2) \quad : \quad a \wedge b = 1 \Leftrightarrow (a+b) \wedge (a^2 + ab + b^2) = 1$$

2) حل في Z^2 النظمة :

$$\begin{cases} 19(a+b) = 5(a^2 + ab + b^2) \\ a \wedge b = 1 \end{cases}$$

3) حل في Z^2 المعادلة :

$$.19(a+b)(a \wedge b) = 5(a^2 + ab + b^2)$$