ثانوية الجولان التأهيلية
بيوكرى

السنة الثانية علوم رياضية
2011 - 2010

الأستاذ : أحمد مومني

البنيات الجبرية و الفضاءات المتجهية

التمرين رقم 01:

لتكن $M=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ مصفوفة من $M_2(IR)$ بحيث $a+d=-1$ و $\det(M)=-2$

وليكن A جزء من $M_2(IR)$ معرف كما يلي: $A=\{xM+yI/(x,y)\in IR^2\}$ حيث $I=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

1 – a – بين أن $\forall(x,y)\in IR_*^2$ المعادلة $xM=yI$ لا تقبل حلا في $M_2(IR)$

b – بين أن : $M^2+M=2I$

c – استنتج أن: $M^{-1}\in A$

2 – بين أن: $(A,+,\times)$ حلقة واحدية غير كاملة

3 – a – حدد مصفوفتين غير منعدمتين P و Q من A تخالفان I بحيث $P^2=P$ و $Q^2=Q$

b – أحسب $P\times Q$ و استنتج أن P و Q غير قابلتان للقلب

4 – لتكن x و y و z و t أعداد حقيقية

a – أحسب $\det(xM+yI)$

b – أحسب بدلالة P و Q الجداء $(xP+yQ)(x'P+y'Q)$

c – استنتج أن مجموعة مصفوفات A القابلة للقلب في $M_2(IR)$ جزء من A

التمرين رقم02:

نربط كل زوج (a,b) من IR^2 بالدالتين العدديتين $f_{(a,b)}$ و $g_{(a,b)}$ المعرفتين على $]0,+\infty[$ بما يلي:

$$f_{(a,b)}(x)=x^a e^{bx} \quad \text{و} \quad g_{(a,b)}(x)=\ln\left(f_{(a,b)}(x)\right)$$

و لتكن $\left(F(IR_+^*,IR),+,\bullet\right)$ الفضاء المتجهي الحقيقي لمجموعة الدوال العددية المعرفة على $]0,+\infty[$

و G جزء من $F(IR_+^*,IR)$ معرف كما يلي: $G=\{g_{(a,b)}/(a,b)\in IR^2\}$

1 – بين أن : $(G,+)$ زمرة جزئية من $\left(F(IR_+^*,IR),+\right)$

2 – بين أن $(G,+,\bullet)$ فضاء متجهي حقيقي

3– بين أن : $\left(g_{(0,1)};g_{(1,0)}\right)$ أساس للفضاء المتجهي $(G,+,\bullet)$ وحدد بعد هذا الأخير

التمرين رقم 03:

الجزء الأول:

لتكن A المجموعة المعرفة كما يلي: $A=\left\{x+y\sqrt{2}\,/\left(x,y\right)\in\mathbb{Z}^2\right\}$

1 – بين أن : $x+y\sqrt{2}=0\Leftrightarrow x=y=0\qquad\left(\forall\left(x,y\right)\in\mathbb{Z}^2\right)$

2 – a – بين أن: $\left(A,+\right)$ زمرة تبادلية

b – بين أن $\left(A,+,\times\right)$ حلقة

c – بين أن $\left(A,+,\times\right)$ ليس جسما

3 – ليكن f التطبيق التالي:

$$\begin{array}{l} f:\quad A\rightarrow\mathbb{Z}\\ x+y\sqrt{2}\rightarrow x^2-2y^2\end{array}$$

a – بين أن : f تشاكل من $\left(A,\times\right)$ نحو $\left(\mathbb{Z},\times\right)$

b – بين أن: $1=\left(f\left(x\right)\right)^2\Leftrightarrow$ x يقبل مماثلا في $\left(A,\times\right)$

4 – نضع : $H=\left\{x+y\sqrt{2}\,/\left(x,y\right)\in\mathbb{Z}^2\text{ و }\left|x^2-2y^2\right|=1\right\}$

a – بين أن: $\left(H,\times\right)$ زمرة جزئية من $\left(IR^*,\times\right)$

b – استنتج مجموعة العناصر التي تقبل مماثلا في $\left(A,\times\right)$

الجزء الثاني :

نضع : $j=\left[1,\frac{2\pi}{3}\right]=\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}$ و نعتبر المجموعة Gالتالية: $G=\left\{x+jy\,/\left(x,y\right)\in\mathbb{Z}^2\right\}$

1 – a – تحقق أن : $1+j+j^2=0$

b – بين أن : $\left(G,+,\times\right)$ له بنية حلقة واحدية

2 – نضع : $U=\left\{z\in G\,/\left|z\right|=1\right\}$

بين أن : $U=\left\{-\left(1+j\right),-1,-j,1,j,1+j\right\}$

3 – لتكن E مجموعة العناصر القابلة للمماثلة في$\left(G,+,\times\right)$

ليكن $z=x+jy\in E$ و $z'=x'+jy'$ مماثله في $\left(G,+,\times\right)$ حيث x و y و x' و y' من $\mathbb{Z}^*$

a – بين أن : $x'=\frac{x-y}{x^2+y^2-xy}$ و $y'=\frac{-y}{x^2+y^2-xy}$

b – بين أن : $E\subset U$

c – استنتج أن $E=U$

الجزء الثالث:

نفترض في هذا الجزء أن $G=\left\{x+jy\,/\left(x,y\right)\in IR^2\right\}$

1 – بين أن $\left(G,+,\bullet\right)$ فضاء متجهي حقيقي

2 – حدد أساسا B للفضاء المتجهي $\left(G,+,\bullet\right)$ ثم حدد $\dim G$

3 – بين أن الأسرة $\left(1,i\right)$ هي كذلك أساس للفضاء المتجهي $\left(G,+,\bullet\right)$

4 – a – حدد إحداثيات i بالنسبة للأساس B

b – استنتج أن: $G=\mathbb{C}$

التمرين رقم04 :

I) - نضع : $G=IR-\left\{\frac{1}{2}\right\}$ وليكن * قانون معرف على G بما يلي: $x*y=x+y-2xy \quad \left(\forall(x,y)\in G^2\right)$

1 – بين أن * قانون تركيب داخلي في G

2 – بين أن القانون * تجميعي

3 – بين أن $(G,*)$ زمرة تبادلية

4 – بين أن : $\underbrace{x*x*\cdots*x}_{n \text{ مرة}}=\frac{1}{2}\left(1-(1-2x)^n\right) \quad (\forall x\in G)\left(\forall n\in IN^*-\{1\}\right)$

II) - لكل x من G نضع :

$$M(x)=\begin{pmatrix}1-x & 0 & x\\ 0 & 1 & 0\\ x & 0 & 1-x\end{pmatrix} \quad \text{و} \quad E=\{M(x)/x\in G\}$$

1 – بين أن $(E,\times)$ جزء مستقر من $(M_3(IR),\times)$

2 – بين أنه توجد مصفوفتين I و J من $M_3(IR)$ بحيث $M(x)=(1-x)I+xJ \quad (\forall x\in G)$

3 – نعتبر التطبيق التالي:

$$f:G\to E$$
$$x\to M(x)$$

a – بين أن f تشاكل تقابلي من $(G,*)$ نحو $(E,\times)$

b – استنتج بنية $(E,\times)$

4 – نضع : $A=M\left(\frac{-1}{2}\right)$

a – بين أن: $A^n=M\left(\frac{1-2^n}{2}\right) \quad (\forall n\in IN^*)$

b – استنتج أن: $\left(A^n\right)^{-1}=M\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2^{n+1}}\right) \quad (\forall n\in IN^*)$ حيث $\left(A^n\right)^{-1}$ هي مقلوب المصفوفة A^n

....

التمرين رقم 05:

ليكن $F(IR,IR)$ مجموعة الدوال العددية المعرفة من IR نحو IR

نضع : $E=\left\{f\in F(IR,IR)/(\forall x\in IR) \quad f(x)=P(x)\cos x+Q(x)\sin x\right\}$

حيث P و Q حدوديتين درجتهما أصغر من أو تساوي 1

1 – بين أن $(E,+,\bullet)$ فضاء متجهي حقيقي

2 – نعتبر الأسرة $B=(f_1,f_2,f_3,f_4)$ حيث: لكل x من IR $f_1(x)=\cos x$ و $f_2(x)=\sin x$

و $f_3(x)=x\cos x$ و $f_4(x)=x\sin x$

بين أن B أساس للفضاء المتجهي $(E,+,\bullet)$

3 – ليكن $\alpha\in IR$ و g و h دالتين معرفتين على IR بما يلي : $g(x)=\cos(x+\alpha)$ و $h(x)=\sin(x+\alpha)$

a – حقق أن $(g,h)\in E^2$ ثم حدد إحداثيات كل من g و h بالنسبة للأساس B

b – تحقق ما إذا كانت الأسرة $B'=(g,h,f_3,f_4)$ أساس للفضاء المتجهي $(E,+,\bullet)$

التمرين رقم 06:

ليكن $(G,\times)$ زمرة ضربية

I) – 1 – لتكن E زمرة جزئية للزمرة $(G,\times)$

بين أن : $(\forall (x,y)\in E^2)(\forall z\in G)\qquad xz=y\Rightarrow z\in E$

2 – ليكن F جزء غير فارغ من G بحيث: $(\forall (x,y)\in F^2)(\forall z\in G)\qquad xz=y\Rightarrow z\in F$:

بين أن F زمرة جزئية من $(G,\times)$

II.) – نربط كل عنصر x من G بالمجموعة المعرفة كما يلي :

$$H_x=\{z\in G/\exists y\in G\qquad z=xyx^{-1}\}$$

1 – a – بين أن : $(\forall x\in G)\qquad H_x\neq\phi$

b – بين أن لكل x من G $(H_x,\times)$ زمرة جزئية

2 – ليكن $(x,y,z)\in G^3$

a – بين أن : $(x\in H_y \text{ و } y\in H_z)\Rightarrow x\in H_z$

b – بين أن : $x\in H_y\Leftrightarrow y\in H_x$

c – استنتج أن : $H_y=H_x\Leftrightarrow x\in H_y$

3 – نزود $A=\{H_x/x\in G\}$ بقانون تركيب داخلي $*$ معرف كما يلي:

$$\forall (x,y)\in G^2\qquad H_x*H_y=H_{xy}$$

a – بين أنه يوجد تشاكل شمولي من $(G,\times)$ نحو $(A,*)$

b – استنتج بنية $(A,*)$

....

التمرين رقم07:

I) – نزود IR_+^* بقانون تركيب داخلي $*$ معرف كما يلي:

$$\forall (x,y)\in (IR_+^*)^2\qquad x*y=\sqrt{x^2+y^2}$$

ليكن f التطبيق المعرف من IR_+^* نحو IR_+^* بما يلي: $f(x)=x^2$

1 – بين أن f تشاكل تقابلي من $(IR_+^*,*)$ نحو $(IR_+^*,+)$

2 – a – بين أن القانون $*$ تجميعي

b – بين أن القانون $*$ لا يقبل عنصرا محايدا

3 – نضع : $u_n=\underbrace{\alpha*\alpha*\cdots*\alpha}_{\text{n مــــرة}}$ حيث $\alpha\in IR_+^*$ و $n\in IN^*$

بين أن : $U_n=\alpha\sqrt{n}$

II) – ليكن n عددا صحيحا طبيعيا فرديا يخالف 1 و ليكن $*$ قانون تركيب داخلي معرف IR بما يلي :

$$\begin{cases} x*y=\sqrt[n]{x^n+y^n} & ;\quad x^n+y^n\geq 0\\ x*y=-\sqrt[n]{-(x^n+y^n)} & ;\quad x^n+y^n\leq 0\end{cases}$$

1 – ليكن f التطبيق المعرف من IR نحو IR بما يلي :

$$\begin{cases} f(x)=\sqrt[n]{x} & ;\quad x\geq 0\\ f(x)=-\sqrt[n]{-x} & ;\quad x\leq 0\end{cases}$$

بين أن f تشاكل تقابلي من $(IR,+)$ نحو $(IR,*)$

2 – استنتج بنية $(IR,*)$