ثانوية الجولان التأهيلية - بيوكرى -
نيابة أشتوكة أيت باها

ملخص درس الأعداد العقدية

الثانية علوم رياضية

الأستاذ أحمد مومني

I - جدر مربع عددي عقدي

u جدر مربع العدد العقدي Z $\Leftrightarrow u^2 = Z$

الجدول التالي يحدد كيفية تحديد جدر مربع عدد عقدي مكتوب على شكله الجبري في كل الحالات الممكنة :

العدد العقدي على شكله الجبري		الجدرين المربعين للعدد العقدي
i		$\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)$ و $-\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)$
-i		$\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)$ و $-\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)$
ib $b\in\mathbb{R}^*$	b>0	$\sqrt{\frac{b}{2}}(1+i)$ و $-\sqrt{\frac{b}{2}}(1+i)$
	b<0	$\sqrt{\frac{-b}{2}}(1-i)$ و $-\sqrt{\frac{-b}{2}}(1-i)$
$a\in\mathbb{R}$	a>0	$\sqrt{a}$ و $-\sqrt{a}$
	a<0	$\left(i\sqrt{-a}\right)$ و $-\left(i\sqrt{-a}\right)$
$a+ib$ $(a,b)\in(\mathbb{R}^*)^2$		نقوم بحل النظمة التالية: $\begin{cases}(x+iy)^2=a+ib\\ \lvert x+iy\rvert^2=\lvert a+ib\rvert\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x^2-y^2=a\\ 2xy=b\\ x^2+y^2=\sqrt{a^2+b^2}\end{cases}$ حيث: $x+iy$ جدر مربع العدد العقدي $a+ib$

II) لحق نقطة و صورة عدد عقدي

نرمز ب $aff\left(M\right)$ أو Z_M للحق النقطة M في المستوى العقدي
لدينا التعريف التالي :

$$M\,(a,b) \Leftrightarrow aff\ (M\,) = a + ib$$

بعض الحالات الخاصة:

العدد العقدي	صورته في المستوى العقدي
i	$M\,(0,1)$
-*i*	$M\,(0,-1)$
1	$M\,(1,0)$
1-	$M\,(-1,0)$

خاصيات أساسية:

$$\boxed{\begin{gathered} aff\ (\vec{u} + \vec{v}\,) = aff\ (\vec{u}\,) + aff\ (\vec{v}\,) \\ aff\ (\alpha \vec{u}\,) = \alpha aff\ (\vec{u}\,) \\ \|\vec{u}\,\| = |aff\ (\vec{u}\,)| \end{gathered}}$$

$$aff\ (\overrightarrow{AB}\,) = aff\ (B\,) - aff\ (A\,)$$

$$\boxed{\|\overrightarrow{AB}\| = AB\ = |aff\ (B\,) - aff\ (A\,)|}$$

$\dfrac{aff\ (\vec{v}\,)}{aff\ (\vec{u}\,)} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$ **مستقيميتين** $\vec{v}$ **و** $\vec{u}$

$\dfrac{aff\ (B\,) - aff\ (A\,)}{aff\ (C\,) - aff\ (A\,)} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$ **النقط A وB و C مستقيمية**

$$\frac{aff\,(B) - aff\,(A)}{aff\,(D) - aff\,(C)} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \left(AB\right)//\left(CD\right)$$

III) - خاصيات وقواعد أساسية

العدد العقدي	معيار العدد العقدي	عمدة العدد العقدي بترديد 2π	الكتابة $[r,\theta]$
$-Z$	$\lvert -Z\rvert = \lvert Z\rvert$	$\arg(-Z) = \pi + \arg(Z)$	$-[r,\theta] = [r,\theta+\pi]$
$\bar{Z}$	$\lvert \bar{Z}\rvert = \lvert Z\rvert$	$\arg(\bar{Z}) = -\arg(Z)$	$\overline{[r,\theta]} = [r,-\theta]$
ZZ'	$\lvert ZZ'\rvert = \lvert Z\rvert\lvert Z'\rvert$	$\arg(ZZ') = \arg(Z) + \arg(Z')$	$[r,\theta][r',\theta'] = [rr',\theta+\theta']$
$\prod_{k=1}^{n} Z_k$	$\left\lvert \prod_{k=1}^{n} Z_k \right\rvert = \prod_{k=1}^{n} \lvert Z_k\rvert$	$\arg\left(\prod_{k=1}^{n} Z_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \arg(Z_k)$	$\prod_{k=1}^{n}[r_k,\theta_k] = \left[\prod_{k=1}^{n} r_k, \sum_{k=1}^{n}\theta_k\right]$
$(n \in \mathbb{Z})\quad Z^n$	$\lvert Z^n\rvert = \lvert Z\rvert^n$	$\arg(Z^n) = n\arg(Z)$	$[r,\theta]^n = [r^n, n\theta]$
$\frac{1}{Z}$	$\left\lvert \frac{1}{Z}\right\rvert = \frac{1}{\lvert Z\rvert}$	$\arg\left(\frac{1}{Z}\right) = -\arg(Z)$	$\frac{1}{[r,\theta]} = \left[\frac{1}{r}, -\theta\right]$
$\frac{Z}{Z'}$	$\left\lvert \frac{Z}{Z'}\right\rvert = \frac{\lvert Z\rvert}{\lvert Z'\rvert}$	$\arg\left(\frac{Z}{Z'}\right) = \arg(Z) - \arg(Z')$	$\frac{[r,\theta]}{[r',\theta']} = \left[\frac{r}{r'}, \theta-\theta'\right]$

العدد العقدي		عمدة العدد العقدي بترديد 2π
$Z = a$	$a > 0$	0
	$a < 0$	π
$Z = ib$	$b > 0$	$\frac{\pi}{2}$
	$b < 0$	$-\frac{\pi}{2}$

الشكل المثلثي لبعض الحالات الخاصة

$$1 = [1,0]$$
$$-1 = [1,\pi]$$
$$i = \left[1, \frac{\pi}{2}\right]$$
$$-i = \left[1, -\frac{\pi}{2}\right]$$

$$\sin\theta + i\cos\theta = \cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$$
$$\cos\theta - i\sin\theta = \cos(-\theta) + i\sin(-\theta)$$
$$-\cos\theta + i\sin\theta = \cos(\pi-\theta) + i\sin(\pi-\theta)$$
$$-\cos\theta - i\sin\theta = \cos(\pi+\theta) + i\sin(\pi+\theta)$$

قياس الزاوية الموجهة

$$\overline{(\vec{u},\vec{v})} = \arg\left(\frac{aff\ (\vec{v})}{aff\ (\vec{u})}\right) \quad [2\pi]$$
$$\overline{(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD})} = \arg\left(\frac{aff\ (D) - aff\ (C)}{aff\ (B) - aff\ (A)}\right) \quad [2\pi]$$

الإخطاط

الإخطاط: حذف الأس باستعمال صيغتي أولير أو الأعداد المترافقة+حدانية نيوتن

$\begin{matrix} \cos^n x \\ \sin^n x \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} \cos nx \\ \sin nx \end{matrix}$

نستعمل صيغة موافر + حدابية نيوتن

صيغ أولير

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \qquad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

$$\cos nx = \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2} \qquad \sin nx = \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i}$$

طريقة الأعداد المترافقة

$$Z = \cos x + i \sin x \qquad \bar{Z} = \cos x - i \sin x \qquad Z + \bar{Z} = 2\cos x \qquad Z - \bar{Z} = 2i \sin x$$

$$Z^n = \cos nx + i \sin nx \qquad \bar{Z}^n = \cos nx - i \sin nx \qquad Z^n + \bar{Z}^n = 2\cos nx \qquad Z^n - \bar{Z}^n = 2i \sin nx$$

IV) الكتابة العقدية للتحويلات الاعتيادية:

نعتبر التحويلات الاعتيادية التالية

- $R(\Omega,\alpha)$ الدوران الذي المركز Ω و زاويته α
- $t_{\vec{u}}$ الإزاحة ذات المتجهة $\vec{u}$
- $h(\Omega,k)$ التحاكي ذو المركز Ω و النسبة k

نربط كل نقطة M من المستوى العقدي ذات اللحق Z بصورتها بإحدى التحويلات الاعتيادية M' ذات اللحق Z' فنحصل على نتائج الجدول أسفله:

التحويل الاعتيادي	العلاقة المتجهية	الصيغة العقدية
الدوران $R(\Omega,\alpha)$ بحيث $aff(\Omega)=\omega$	$\begin{cases} \Omega M = \Omega M' \\ (\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) = \alpha[2\pi] \end{cases}$	$Z' - \omega = (Z - \omega)e^{i\alpha}$
الإزاحة $t_{\vec{u}}$ بحيث $aff(\vec{u}) = a$	$\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$	$Z' = Z + a$
التحاكي $h(\Omega,k)$ بحيث $aff(\Omega)=\omega$	$\overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M}$	$Z' - \omega = k(Z - \omega)$