دروس مادة الرياضيات

للسنة الثانية من سلك البكالوريا علوم تجريبية

للأستاذ : عبدالله الدفاع

D_Abdellah@live.fr

ثانوية الزرقطوني التأهيلية – تنانت — إقليم أزيلال

الدرس	ترتيبه
النهايات	01
الإتصال	02
الدوال العكسية	03
الإشتقاق	04
نماذج من دراسة دوال عددية	05
المتتاليات العددية	06
نهايات المتتاليات العددية	07
الدوال الأصلية	08
الدوال اللوغاريثمية	09

الدرس	ترتيبه
الأعداد العقدية : الجزء الأول	10
الدوال الأسية	11
حساب التكاملات	12
الأعداد العقدية : الجزء الثاني	13
معادلات تفاضلية	14
تحليلية الجداء السلمي في الفضاء	15
دراسة تحليلية للفلكة	16
الجداء المتجهي	17
التعداد و حساب الإحتمالات	18 و 19

نسخة يونيو 2013

توطئة

بسم الله و الصلاة و السلام على رسول الله محمد صلى الله عليه و آله و سلم

بعون الله و فضله تم جمع هذا الكتيب الذي يشتمل على عدة دروس في مادة الرياضيات للسنة الثانية من سلك البكالوريا علوم تجريبية بمسالكها بعد جهد جهيد، مستعينا بعد الله تعالى بمراجع مختلفة ومصادر عدة لأساتذة من مختلف الشعوب و اللغات من خلال الإنترنيت و غيرها و مرتكزا أيضا على التوجيهات الرسمية والمذكرات المنظمة لتدريس هذه المادة بالمملكة المغربية.

أما بخصوص الدروس التي بين دفتي الكتيب فهي تحتوي على تمارين تطبيقية و هادفة، دون إدراج حلول لها ضمن هذا الأخير، لكنني أرفقتُ في آخر كل منها سلسلة تدعم و ترسخ بعض مفاهيم الدرس و بتمارين توليفية من إمتحانات وطنية.

وفي الختام أقدم خالص الشكر وبالغ الإمتنان بعد الله تبارك و تعالى لكل الأساتذة و المتخصصين على نشرهم للعلم ومدهم يد المساعدة لنا من خلال مشاركاتهم وتجاربهم في الفصل وبخبرتهم في تقديم مفاهيم نعتمدها ونستفيد منها، فهم جسر تواصل بيننا وبين طلابنا جزاهم الله خير الجزاء.

وأنصح في الأخير لكل من أراد طباعة هذا الكتيب أن يستعمل الإختيار " طباعة كتاب – livret – Booklet " المتوفرة في البرنام ®Adobe Acrobat Pro مثلا و أن لا ينسى التشطيب على الخيار " طباعة الوجهين – Recto verso " والله ولي التوفيق.

بتنانت، في 22 يونيو 2013

الأستاذ : عبدالله الدفاع – ثانوية الزرقطوني التأهيلية بتنانت – إقليم أزيلال

النهايات
LIMITES

عبد الله السفاع

I - أنشطة تذكيرية :

أحسب النهايات التالية :

$$a=\lim_{x\to 2} x^3+2x^2-3x+1 \qquad b=\lim_{x\to -\infty} x+\sqrt{-x}+1$$

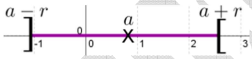
$$c=\lim_{x\to 3}\frac{x^3-27}{x-3} \qquad d=\lim_{x\to -\infty}\frac{x^2-4x+7}{x+5}$$

$$e=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{2-x}-\sqrt{2+x}}{x} \qquad f=\lim_{x\to +\infty}\frac{\sin(x)}{x^2}$$

$$g=\lim_{x\to 1^+}\frac{6}{1-x} \qquad h=\lim_{x\to +\infty} x\sin\left(\frac{1}{2-x}\right)$$

II - ملخصات :

في كل ما يلي، نعتبر a و l و r أعداد حقيقية بحيث $r>0$ و f دالة عددية للمتغير الحقيقي x، حيز تعريفها D_f يتضمن $\mathcal{O}:=]a-r;a+r[\setminus\{a\}$.



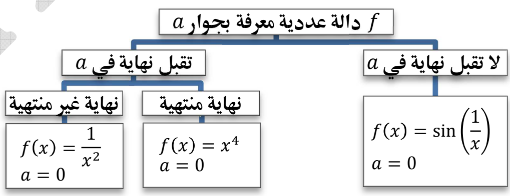
1 – تعريف :

$\lim_{x\to a} f(x)=l \iff$ يمكن إيجاد x من $\mathcal{O}$، قريب من a لكي يكون $f(x)$ قريب من l بالقدر الذي نريده.

2 – بعض الأشكال غير المحددة :

$$\frac{0}{0}\ ;\ 0\times\infty\ ;\ (-\infty)+(+\infty)\ ;\ \frac{\infty}{\infty}\ ;\ (\infty)^0\ ;\ 1^\infty\ ;\ 0^0\ ...$$

3 – أنواع النهايات :



4 – العمليات على النهايات :

ليكن l و l' عددين حقيقيين و (A عدد حقيقي أو $A=+\infty$ أو $A=-\infty$)

و f و g دالتين عدديتين لنفس المتغير الحقيقي.

نهاية f عند A	نهاية g عند A	نهاية $f+g$ عند A
l	l'	$l+l'$
l	$+\infty$	$+\infty$
l	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	شكل غير محدد
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$

نهاية f عند A	نهاية g عند A	نهاية $f\times g$ عند A
l	l'	$l\times l'$
$l\neq 0$	$+\infty$	$sg(l)\infty$
$l\neq 0$	$-\infty$	$sg(-l)\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
0	$\pm\infty$	شكل غير محدد

نهاية f عند A	نهاية $\frac{1}{f}$ عند A
$l\neq 0$	$\frac{1}{l}$
$\pm\infty$	0
0^+	$+\infty$
0^-	$-\infty$

$$\lim_{x\to A}\frac{f(x)}{g(x)}=\left(\lim_{x\to A} f(x)\right)\times\left(\lim_{x\to A}\frac{1}{g(x)}\right)$$

5 – النهايات و الترتيب :

لتكن u و v دالتين عدديتين للمتغير الحقيقي x معرفتين جيدا على $\mathcal{O}:=]a-r;a+r[\setminus\{a\}$.

$$01.\quad \left.\begin{array}{r}\forall\, x\in\mathcal{O}, |f(x)-l|\le v(x)\\ \lim_{x\to a} v(x)=0^+\end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to a} f(x)=l$$

$$02.\quad \left.\begin{array}{r}\forall\, x\in\mathcal{O}, u(x)\le f(x)\le v(x)\\ \lim_{x\to a} u(x)=\lim_{x\to a} v(x)=l\end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to a} f(x)=l$$

$$03.\quad \left.\begin{array}{r}\forall\, x\in\mathcal{O}, u(x)\le f(x)\\ \lim_{x\to a} u(x)=+\infty\end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to a} f(x)=+\infty$$

$$04.\quad \left.\begin{array}{r}\forall\, x\in\mathcal{O}, f(x)\le v(x)\\ \lim_{x\to a} v(x)=-\infty\end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to a} f(x)=-\infty$$

هذه الخاصيات تبقى صحيحة إذا عوضنا :

{ a ب $+\infty$ و $\mathcal{O}=]r;+\infty[$ } أو { a ب $-\infty$ و $\mathcal{O}=]-\infty;-r[$ }

6 – نهايات إعتيادية :

$$\lim_{x\to -\infty} x^n=\begin{cases}+\infty & si\ n \text{ زوجي}\\ -\infty & si\ n \text{ فردي}\end{cases} \quad \text{و} \quad \forall\, n\in\mathbb{N}^*, \lim_{x\to +\infty} x^n=+\infty$$

$$\forall\, n\in\mathbb{N}^*, \lim_{x\to +\infty}\frac{1}{x^n}=0 \ \text{ و } \ \lim_{x\to -\infty}\frac{1}{x^n}=0$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{1}{x}=+\infty \quad \text{و} \quad \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\frac{1}{x}=-\infty$$

لكل عددين حقيقيين a و b بحيث $b\neq 0$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(ax)}{bx}=\frac{a}{b} \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\tan(ax)}{bx}=\frac{a}{b}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(ax)}{(bx)^2}=\frac{1}{2}\times\left(\frac{a}{b}\right)^2$$

7 – بعض تقنيات حساب النهايات :

التقنية	مثال
التعويض	$\lim_{x\to 3}\sqrt{x-2}$
الإختزال	$\lim_{x\to 0}\frac{x}{x}$
التعميل	$\lim_{x\to +\infty} x-\sqrt{x}+1$
التعميل بمتطابقات هامة $+H\ddot{o}rner$	$\lim_{x\to -2}\frac{x^3+8}{x+2}$
المرافق	$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{4-x}-\sqrt{4+x}}{x}$
إصغارات، إكبارات ، خاصيات الترتيب ، الإشتقاق ، خاصيات بعض الدوال : الحدودية أو الجذرية...	$\lim_{x\to +\infty}\frac{\sin(x)}{x}$ $\lim_{x\to +\infty}\frac{x^2-3x^5-3}{2x+1}$
تغيير المتغير	$\lim_{x\to +\infty} x\,sin\left(\frac{1}{x}\right)$

الإتصال
CONTINUITÉ

I - دالة الجزء الصحيح :

1 – تسمية :

نسمي دالة الجزء الصحيح الدالة $E : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ المعرفة بما يلي :

أكبر عدد صحيح نسبي أصغر من أو يساوي x $\forall x \in \mathbb{R}, E(x) = x$
$= \max(\{n \in \mathbb{Z} : n \leq x\})$

2 – أمثلة :

1. أحسب : $E(\sqrt{8})$ $\quad E(-9)$ $\quad E(7)$ $\quad E(-6{,}2)$ $\quad E(3{,}2)$
2. أنشئ منحنى دالة الجزء الصحيح في م.م.م.م.

3 – خاصيات :

01. $\forall x \in \mathbb{R}, E(x) \in \mathbb{Z}$
02. $\forall x \in \mathbb{R}, E(x) \leq x < E(x) + 1$
03. $\forall n \in \mathbb{Z}, E(n) = n$

II - الإتصال :

1 – تعريف :

لتكن f دالة عددية للمتغير الحقيقي x و x_0 عنصر من D_f حيز تعريفها.

- نقول أن الدالة f متصلة في x_0 إذا و فقط إذا كان،
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$
- نقول أن الدالة f متصلة على يمين x_0 (ع.ت. على يسار x_0) إذا وفقط إذا كان، $\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x) = f(x_0)$ (ع.ت. $\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x) = f(x_0)$)
- نقول أن الدالة f متصلة على المجال $[a; b] \subset D_f$ إذا و فقط إذا كانت متصلة على $]a; b[$ و متصلة على يمين a و على يسار b.

2 – تطبيق :

أدرس اتصال الدالتين f و g في x_0.

$$g : x \to \begin{cases} 2x + 2 & si \quad x > 5 \\ 2x - 1 & si \quad x \leq 5 \end{cases} \qquad x_0 = 5$$

$$f : x \to \begin{cases} \frac{\sin^2(x)}{x} - 1 & si \quad x \neq 0 \\ -1 & si \quad x = 0 \end{cases} \qquad x_0 = 0$$

3 – التمديد بالإتصال في نقطة :

a – نشاط :

أدرس اتصال الدالتين العدديتين للمتغير الحقيقي x المعرفتين ب
$f : x \to \frac{x^2}{|x|} + 3$ و $g : x \to \begin{cases} f(x) & si \quad x \neq 0 \\ 3 & si \quad x = 0 \end{cases}$ في النقطة $x_0 = 0$.

b – تعريف :

ليكن x_0 عددا حقيقيا و f دالة عددية للمتغير الحقيقي x و D_f حيز تعريفها.

- نقول إن f تقبل تمديدا بالإتصال في x_0 إذا و فقط إذا كان،
$$x_0 \notin D_f \qquad et \qquad \exists\, l \in \mathbb{R} : \lim_{x \to x_0} f(x) = l$$
- الدالة : $g : x \to \begin{cases} f(x) & si \quad x \in D_f \\ \lim_{x \to x_0} f(x) & si \quad x = x_0 \end{cases}$ تسمى تمديد f بالإتصال في x_0.

4 – العمليات على الدوال المتصلة :

a – مبرهنة :

ليكن x_0 و λ عددين حقيقيين و f و g دالتين عدديتين متصلتين في x_0.

- الدوال $f + g$ و $f - g$ و $f \times g$ و λf دوال متصلة في x_0.
- إذا كان $g(x_0) \neq 0$ فإن الدالتين $\frac{1}{g}$ و $\frac{f}{g}$ متصلتين في x_0.

b – نتائج :

- الدوال الحدودية دوال متصلة على كل مجال ضمن $\mathbb{R}$.
- الدوال الجذرية دوال متصلة على كل مجال ضمن حيز تعريفها.
- الدالتين sin و cos دالتين متصلتين على كل مجال ضمن $\mathbb{R}$.
- الدالة tan دالة متصلة على كل مجال ضمن حيز تعريفها.
- الدالة $x \to \sqrt{x}$ دالة متصلة على كل مجال ضمن $\mathbb{R}^+$.

5 – مركب دالتين :

a – مبرهنة :

ليكن x_0 عددا حقيقيا و f و g دالتين عدديتين لمتغير حقيقي.

$$\begin{cases} f \text{ متصلة في } x_0 \\ g \text{ متصلة في } f(x_0) \end{cases} \Rightarrow g \circ f \text{ متصلة في } x_0$$

b – تطبيق :

نعتبر الدالتين f و g العدديتين للمتغير الحقيقي x المعرفتين ب :

$$g(x) = \begin{cases} \frac{3x^2 - x - 2}{1 - x^2} & si \quad x \neq 1 \\ -\frac{5}{2} & si \quad x = 1 \end{cases} \qquad et \quad f(x) = \sin(x)$$

أدرس اتصال الدالة $g \circ f$ في النقطة $x_0 = \frac{\pi}{2}$.

c – تعميم :

لتكن f و g دالتين عدديتين معرفتين على التوالي على المجالين I و J بحيث $f(I) \subset J$.

$$I \xrightarrow{f} J \xrightarrow{g} \mathbb{R}, \qquad I \xrightarrow{g \circ f} \mathbb{R}$$

$$\begin{cases} f \text{ متصلة على } I \\ g \text{ متصلة على } J \end{cases} \Rightarrow g \circ f \text{ متصلة على } I$$

6 – صورة مجال و قطعة بدالة متصلة :

a – نشاط :

01. حدد جبريا ثم مبيانيا صورة المجال $]-3; -2]$ بالدالة :
$$f : x \to -\frac{x}{2} + 1$$
02. إستنتج صورة القطعة $[AB]$ بالدالة f علما أن $A(-3)$ و $B(-2)$.

b – مبرهنة (1) :

- صورة مجال بدالة متصلة هي مجال.
- صورة قطعة بدالة متصلة هي قطعة.

c – مبرهنة (2) :

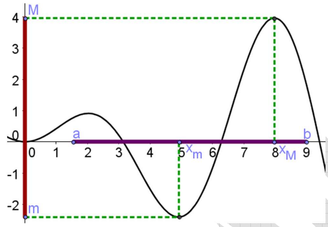
إذا كانت f دالة عددية معرفة و متصلة على المجال $[a; b]$ فإن صورته ب f هي المجال $[m; M] =: f([a; b])$ بحيث :

القيمة الدنيا المطلقة لـ f على$[a;b]$ $m = \min\limits_{x\in[a;b]} f(x) :=$

القيمة القصوى المطلقة لـ f على$[a;b]$ $M = \max\limits_{x\in[a;b]} f(x) :=$

و تعبير آخر،

$$\exists \begin{pmatrix} x_m \\ x_M \end{pmatrix} \in [a;b]^2 : \quad \forall\, x \in [a;b], \quad f(x_m) \le f(x) \le f(x_M)$$



d – حالة خاصة :

المجال	صورة المجال بالدالة المتصلة و التزايدية قطعا عليه هي :	التناقصية قطعا عليه هي :
$[a;b]$	$[f(a);f(b)]$	$[f(b);f(a)]$
$[a;b[$	$[f(a);\lim\limits_{\substack{x\to b\\ x<b}} f(x)[$	$]\lim\limits_{\substack{x\to b\\ x<b}} f(x);f(a)]$
$]a+\infty[$	$]\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(a);\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)[$	$]\lim\limits_{x\to+\infty} f(x);\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(a)[$

e – تطبيقات :

حدد $f(I)$ حسب كل حالة مما يلي :

$f_1(x) = \dfrac{3x-1}{4x-9}\,; I_1 =]3;5]$

$f_2(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 3$ ؛ $I_2 = [0;2]$

$f_3(x) = E(x)\,; I_3 = [0.5\,;1.5]$

$f_4(x) = -\dfrac{1}{x}\,; I_4 = [-1\,;1]$

III - مبرهنة القيمة الوسيطة :

1 – مبرهنة TVI 1 : 1

إذا كانت f متصلة على المجال $[a;b]$ و $f(a)\times f(b) < 0$ فإن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل على الأقل حلا حقيقيا ينتمي إلى المجال $]a;b[$.

بتعبير آخر :

$$\left.\begin{array}{l} f \text{ continue sur } [a;b] \\ f(a)\times f(b) < 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \exists\, c \in\,]a;b[\, : f(c) = 0$$

2 – مبرهنة TVI 2 : 2

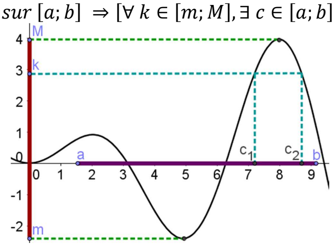
إذا كانت f دالة متصلة على المجال $[a;b]$ و

$$m = \min_{x\in[a;b]} f(x) \quad \text{و} \quad M = \max_{x\in[a;b]} f(x)$$

فإن لكل عدد k محصور بين m و M، يوجد على الأقل c من $[a;b]$

بحيث $f(c) = k$. و بتعبير آخر :

$$f \text{ continue sur } [a;b] \;\Rightarrow [\forall\, k \in [m;M], \exists\, c \in [a;b] : f(c) = k]$$



3 – ملحوظة :

إذا كانت f رتيبة قطعا على $[a;b]$ $(a\neq b)$ فإن العدد c يكون وحيدا.

4 – تطبيق :

بين أن المعادلة $-x^3 + x + 1 = 0$ تقبل حلا وحيدا على المجال $]1;2[$.

5 – التفرع الثنائي :

a – الخوارزمية :

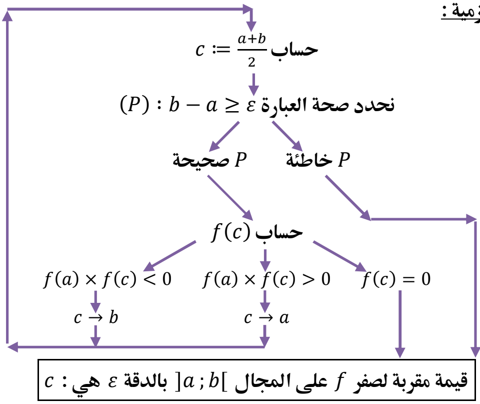
المعطيات : 1) العددين a و b بحيث $a < b$.

2) الدقة ε : عدد حقيقي موجب قطعا و صغير جدا.

3) دالة f متصلة على المجال $[a;b]$ و رتيبة قطعا عليه.

4) $f(a)\times f(b) < 0$

الخوارزمية :



b – تطبيق :

إذا علمت أن المعادلة $2x^3 + x - 2 = 0$ تقبل حلا وحيدا α على المجال $]0.8\,;0.9[$ فحدد قيمة مقربة لـ α بالدقة 10^{-2}.

Série d'exercices : Continuité dans $\mathcal{F}(\mathbb{R})$

Exercice 01 :

Calculer : $E(\pi^2)$ $\quad E(-\sqrt{8})$ $\quad E\left(\frac{1}{2-\sqrt{5}}\right)$ $\quad E\left(\frac{\sin^2(x)}{3}\right)$

Exercice 02 :

Cette fonction est-elle prolongeable par continuité au point $x_0 = 2$? $\quad \varphi : x \to \frac{\sqrt{x+2}-2}{x^2-5x+6}$

Exercice 03 :

Etudier la continuité de $\phi : t \to \begin{cases} t\sin\left(\frac{2}{t}\right) & si \quad t\neq 0 \\ 0 & si \quad t = 0 \end{cases}$ en 0.

Exercice 04 :

Etudier la continuité de $g\circ f$ au point $\omega_0 = 9$.

$f(\omega) = \sqrt{\omega}$ $\qquad g(t) = \begin{cases} \frac{3t^2-14t+15}{t^2-9} & si \quad x\neq 3 \\ {}^2/_3 & si \quad x = 3 \end{cases}$

Exercice 05 : *TVI* 1

01. Montrer que $x^5 + x^3 + x - 1 = 0$ admet une unique solution θ dans l'intervalle $]0.63\,;0.64[$.

02. Donner une valeur approchée de θ de précision $\varepsilon = 10^{-3}$.

Exercice 06 : *TVI* 2

Prouver que $f(x) = -1$ admet une unique solution dans l'intervalle $[-1\,;0]$ où $f(x) = x^3 - 2x^2 + x + 1$.

الدوال العكسية
FONCTIONS RÉCIPROQUE

I - الدوال العكسية :

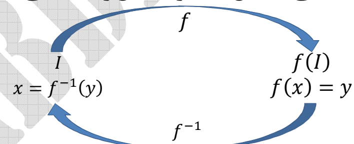
1 – تمهيد :

نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة ب : $f(x) = \sqrt{x}$

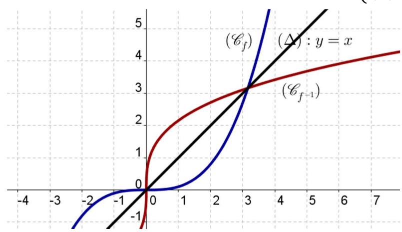
1. أنشئ $(\mathcal{C}_f)$ منحنى f في م.م.م.م.
2. أنشئ $(\mathcal{C}_F)$ منحنى الدالة F الذي يطابق مماثل $(\mathcal{C}_f)$ بالنسبة للمنصف الأول $((\Delta) : y = x)$.
3. حدد مبيانيا $f(F(2))$ و $F(f(9))$ ثم تضن قيمة كل من $f(F(x))$ و $F(f(x))$ لكل x من $\mathbb{R}^+$.
4. قارن رتابتي f و F على $\mathbb{R}^+$.

2 – تعريف :

- كل دالة f متصلة و رتيبة قطعا على مجال I تقبل دالة عكسية f^{-1} متصلة و رتيبة قطعا على المجال $f(I)$ و لها نفس رتابة f على I.



- المنحنيين $(\mathcal{C}_f)$ و $(\mathcal{C}_{f^{-1}})$ متماثلين بالنسبة للمنصف الأول $((\Delta) : y = x)$.



3 – خلاصة :

$$\left.\begin{cases} f \text{ متصلة على المجال } I \\ f \text{ رتيبة قطعا على } I \end{cases}\right\} \underset{\nLeftarrow}{\Rightarrow} f \text{ تقابل من } I \text{ نحو المجال } J = f(I).$$

4 – تطبيقات :

a – تطبيق 1 :

نعتبر الدالة العددية f المعرفة بما يلي : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x) = x^2 + 2x - 3$

1. بين أن f تقابل من المجال $[0; 2]$ نحو مجال يتم تحديده.
2. حدد التقابل العكسي f^{-1}.

b – تطبيق 2 :

نعتبر الدالة العددية f المعرفة بما يلي : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x) = 1 - \frac{1}{1+x^2}$

1. بين أن f تقابل من المجال $]0; +\infty[$ نحو مجال يتم تحديده.
2. حدد التقابل العكسي f^{-1}.

5 – خاصيات :

ليكن f تقابل من المجال I نحو المجال $J = f(I)$.

01. $\forall\, x \in I, \exists!\, y \in J : y = f(x)$
02. $\forall\, y \in J, \exists!\, x \in I : f(x) = y$
03. $\forall\, x \in I, (f^{-1} \circ f)(x) = x$
04. $\forall\, x \in J, (f \circ f^{-1})(x) = x$
05. $\forall\, (x; y) \in J \times I,\quad f^{-1}(x) = y \Leftrightarrow x = f(y)$

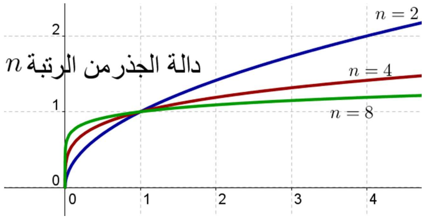
II - دالة الجذر من الرتبة n :

1 – ترميزات :

a – حالة رتبة زوجية :

ليكن $n \in \{2; 4; 6; \dots\}$.

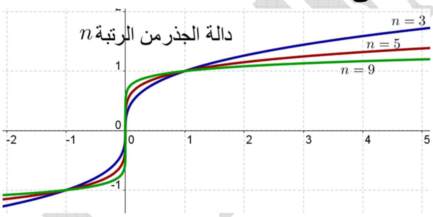
الدالة $f : \begin{matrix} \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ \\ x \to x^n \end{matrix}$ متصلة و تزايدية قطعا على $\mathbb{R}^+$ فهي تقابل من $\mathbb{R}^+$ نحو $\mathbb{R}^+$ و دالتها العكسية f^{-1} معرفة ب : $\forall\, x \in \mathbb{R}^+, f^{-1}(x) := \sqrt[n]{x}$ متصلة و تزايدية قطعا على $\mathbb{R}^+$.



b – حالة رتبة فردية :

ليكن $n \in \{3; 5; 7; \dots\}$.

الدالة $f : \begin{matrix} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \to x^n \end{matrix}$ متصلة و تزايدية قطعا على $\mathbb{R}$ فهي تقابل من $\mathbb{R}$ نحو $\mathbb{R}$ و دالتها العكسية f^{-1} معرفة ب : $\forall\, x \in \mathbb{R}, f^{-1}(x) := \sqrt[n]{x}$ متصلة و تزايدية قطعا على $\mathbb{R}$.



2 – تسمية :

الدالة $\sqrt[n]{\ } : x \to \sqrt[n]{x}$ حيث $n \in \{2; 3; 4; 5; \dots\}$ تسمى دالة الجذر من الرتبة n.

3 – أمثلة :

أحسب : $\sqrt[3]{64}$ $\quad \sqrt[4]{81}$ $\quad \sqrt[5]{-32}$ $\quad \sqrt[6]{-7}$ $\quad \sqrt[8]{0}$

4 – خاصيات :

لكل m و n من $\{2; 3; 4; 5; \dots\}$ و لكل x و y من $\mathbb{R}^+$ (x و y موجبين)،

01. $\left(\sqrt[n]{x}\right)^n = x$
02. $y = \sqrt[n]{x} \Leftrightarrow y^n = x$
03. $\forall\, t \in \mathbb{R}, \sqrt[n]{t^n} = \begin{cases} t & si \quad n\ est\ impair \\ |t| & si \quad n\ est\ pair \end{cases}$
04. $\sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{y} \Leftrightarrow x = y$

Série d'exercices : Fonctions réciproque

Réf : www.l9adi.com + sefroumaths.voila.net

Exercice 01 :

Déterminer les limites suivantes :

$$a=\lim_{x\to 8}\frac{\sqrt[3]{x}-2}{\sqrt[3]{x+19}-3}\qquad b=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}\times\sqrt[6]{x}$$

$$c=\lim_{x\to-\infty}\sqrt[3]{x-8x^3}+2x$$

Exercice 02 :

Considérons la fonction numérique à variable réelle définie par : $\forall\, x\in\mathbb{R}, f(x)=2-\sqrt[3]{x^2-1}$

01. Déterminer D_f l'ensemble de définition de f ensuite calculer ses limites aux bornes de D_f.

02. Montrer que f est une bijection de $]-\infty;-1[$ vers un intervall J e à déterminer.

03. Calculer $f^{-1}(1)$.

04. Déterminer l'expression de f^{-1} sur J.

Exercice 03 :

Considérons la fonction numérique à variable réelle définie par : $\forall\, x\in\mathbb{R}, f(x)=x-4\sqrt[4]{x^3}+6\sqrt[4]{x^2}-4\sqrt[4]{x}$

01. Déterminer D_f l'ensemble de définition de f.

02. Prouver que : $\forall\, x\in\mathbb{R}^+, f(x)=\left(\sqrt[4]{x}-1\right)^4-1$

03. Montrer que f est une bijection de $[1;+\infty[$ vers un intervalle J à déterminer.

04. Déterminer l'expression de f^{-1} sur J.

05. $\sqrt[n]{x}<\sqrt[n]{y}\Leftrightarrow x<y$

06. $\sqrt[n]{x}\times\sqrt[n]{y}=\sqrt[n]{x\times y}$

07. $y\neq 0\Rightarrow\frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}}=\sqrt[n]{\frac{x}{y}}$

08. $\sqrt[n]{\sqrt[m]{x}}=\sqrt[n\times m]{x}=\sqrt[m]{\sqrt[n]{x}}$

09. $\left(\sqrt[n]{x}\right)^m=\sqrt[n]{x^m}$

10. $\sqrt[n\times m]{x^m}=\sqrt[n]{x}$

11. $\lim_{x\to+\infty}\sqrt[n]{x}=+\infty$

5 – تطبيقات :

1. برهن أن العدد التالي صحيح طبيعي : $\frac{\sqrt[3]{1024}\times\sqrt{\sqrt{64}}\times\sqrt[5]{7776}}{\sqrt{18}\times\sqrt{\sqrt[3]{256}}}$

2. حل في $\mathbb{R}$ المعادلتين :

$$(E_1): x^3+27=0\quad et\quad (E_2): x^4-80=0$$

6 – مبرهنة :

ليكن n من $\{2;3;4;5;\dots\}$ و f دالة عددية للمتغير الحقيقي x معرفة بجوار x_0 $\left(x_0\in\mathbb{R}\text{ أو } x_0=\pm\infty\right)$.

- $\begin{cases} f \text{ متصلة على المجال } I\\ f \text{ موجبة على } I\end{cases}$ $\Leftarrow$ $\sqrt[n]{f}$ متصلة و موجبة على المجال I.
- $\begin{rcases}\lim_{x\to x_0} f(x)=l\in\mathbb{R}\\ l\geq 0\end{rcases}\Rightarrow\lim_{x\to x_0}\sqrt[n]{f(x)}=\sqrt[n]{l}$
- $\lim_{x\to x_0} f(x)=+\infty\Rightarrow\lim_{x\to x_0}\sqrt[n]{f(x)}=+\infty$

III - القوة الجذرية لعدد حقيقي موجب :

1 – تمهيد :

ليكن a عددا حقيقيا موجبا و n من $\{2;3;4;5;\dots\}$.

لدينا $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n=a^1=a^{\frac{n}{n}}=\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n$

إذن $\sqrt[n]{a}=a^{\frac{1}{n}}$

2 – مبرهنة :

لكل عدد حقيقي a بحيث $0<a$ و لكل $n\in\{2;3;4;5;\dots\}$،

01. $\sqrt[n]{a}=a^{\frac{1}{n}}$

02. لكل p من $\mathbb{Z}$، $\sqrt[n]{a^p}=a^{\frac{p}{n}}$

3 – أمثلة :

بسط ما يلي : $a=8^{\frac{2}{3}}\qquad b=16^{-\frac{3}{4}}\qquad c=1^{\frac{4}{5}}$

4 – صيغ :

لكل r و r' من $\mathbb{Q}$ و لكل a و b من $\mathbb{R}_+^*$ $\left(0<a \text{ و } 0<b\right)$،

01. $a^r\times a^{r'}=a^{r+r'}$	*02.* $\frac{a^r}{a^{r'}}=a^{r-r'}$	*03.* $\left(a^r\right)^{r'}=a^{r\times r'}$
04. $a^r\times b^r=(a\times b)^r$	*05.* $\frac{a^r}{b^r}=\left(\frac{a}{b}\right)^r$	*06.* $a^{-r}=\frac{1}{a^r}$

5 – تمرين :

بسط العدد : $A=\frac{2^{\frac{3}{2}}\times 8^{-\frac{5}{3}}}{4^{-\frac{7}{4}}}$

الإشتقاق
DÉRIVATION

عبد الله الدفاع

I - قابلية الإشتقاق في نقطة :

1 – نشاط :

نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة ب : $f(x) = |x^2 - 2x|$

.01 أدرس قابلية إشتقاق f على يمين و يسار النقطة $x_0 = 2$.

.02 هل الدالة f قابلة للإشتقاق في النقطة $x_0 = 2$؟

2 – تعاريف :

لتكن f دالة عددية للمتغير الحقيقي x و معرفة على مجال مفتوح I يحتوي العدد الحقيقي a.

➢ f قابلة للإشتقاق على اليمين في النقطة a $\Leftrightarrow$ $\exists\, l_1 \in \mathbb{R} :\ \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = l_1$

العدد l_1 يسمى العدد المشتق على اليمين للدالة f في النقطة a

و نكتب : $f'_d(a) = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$

➢ f قابلة للإشتقاق على اليسار في النقطة a $\Leftrightarrow$ $\exists\, l_2 \in \mathbb{R} :\ \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = l_2$

العدد l_2 يسمى العدد المشتق على اليسار للدالة f في النقطة a

و نكتب : $f'_g(a) = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$

➢ f قابلة للإشتقاق في النقطة a $\Leftrightarrow$ f قابلة للإشتقاق على اليمين و على اليسار في a ثم $f'_d(a) = f'_g(a)$

II - التأويل الهندسي :

1 – نشاط :

نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة ب :

$$f : x \to \begin{cases} \dfrac{\cos(x) - 1}{x} & si \quad x \neq 0 \\ 0 & si \quad x = 0 \end{cases}$$

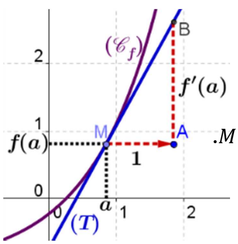
.01 أدرس قابلية إشتقاق f في النقطة $x_0 = 0$.

.02 حدد معادلة ديكارتية لمماس $(\mathcal{C}_f)$ منحنى f عند النقطة ذات الأفصول 0.

.03 حدد الدالة التآلفية المقاربة للدالة f في $x_0 = 0$.

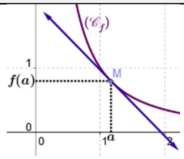
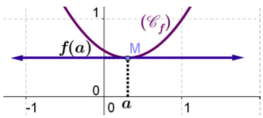
2 – مبرهنة :

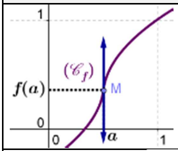
إذا كانت f قابلة للإشتقاق في النقطة a فإن $f'(a)$ تساوي المعامل الموجه لمماس $(\mathcal{C}_f)$ منحنى f في النقطة $M\binom{a}{f(a)}$.

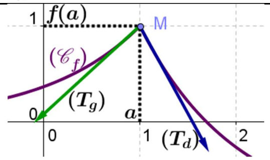


3 –

خلاصة :

f قابلة للإشتقاق في النقطة a	
 $f'(a) \in \mathbb{R}^*$ (C_f) يقبل مماسا مائلا في M معادلته هي : $y = f(a) + f'(a)(x-a)$	 $f'(a) = 0$ (C_f) يقبل مماسا أفقيا في M معادلته هي : $y = f(a)$

f غير قابلة للإشتقاق في النقطة a	
$\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \pm\infty$ (C_f) يقبل مماسا عموديا في M معادلته هي : $x = a$	



$f'_g(a) \neq f'_d(a)$

(C_f) يقبل نقطة مزواة في $M(a; f(a))$

➢ معادلة (T_d) نصف المماس على اليمين ل (C_f) في M هي :

$$\begin{cases} y = f(a) + f'_d(a)(x-a) \\ a \leq x \end{cases}$$

➢ معادلة (T_g) نصف المماس على اليسار ل (C_f) في M هي :

$$\begin{cases} y = f(a) + f'_g(a)(x-a) \\ x \leq a \end{cases}$$

III - الدالة المشتقة :

1 – نشاط :

.01 حدد صيغة مشتقة الدالتين f و g المعرفتين ب :

$g(x) = x\sqrt{x^2 - 1}$ $\qquad$ $f(x) = 3\cos^2(x) - \sin^2(x)$

.02 إستنتج قيمة :

$\lim\limits_{x \to -2} \frac{x\sqrt{x^2-1}+2\sqrt{3}}{x+2}$ و $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{3}} \frac{3\cos^2(x)-\sin^2(x)}{x-\frac{\pi}{3}}$

2 – تعاريف :

a – تعريف 1 :

نقول أن دالة عددية لمتغير حقيقي قابلة للإشتقاق على مجال مفتوح I إذا و فقط إذا كانت قابلة للإشتقاق في كل نقطة من I.

b – تعريف 2 :

نقول أن دالة عددية لمتغير حقيقي قابلة للإشتقاق على المجال $[a; b]$ (ع. ت. $]a; b]$) إذا و فقط إذا كانت قابلة للإشتقاق على المجال $]a; b[$ و قابلة للإشتقاق على اليمين في a (ع. ت. اليسار في b).

c – بعض مشتقات الدوال الإعتيادية :

$f(x)$	$f'(x)$	لكل x من
a (عدد ثابت)	0	$\mathbb{R}$
$ax+b$	a	$\mathbb{R}$
$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, x^n$	$n\, x^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{x^n}$	$-n\frac{1}{x^{n+1}}$	$\mathbb{R}^*$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0\,;\,+\infty[$
$\sin(x)$	$\cos(x)$	$\mathbb{R}$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$	$\mathbb{R}$
$\tan(x)$	$\frac{1}{cos^2(x)} = 1+tan^2(x)$	$x \notin \left\{\frac{\pi}{2}+k\pi :\ k \in \mathbb{Z}\right\}$
$\sin(ax+b)$	$a \times \cos(ax+b)$	$\mathbb{R}$
$\cos(ax+b)$	$-a \times \sin(ax+b)$	$\mathbb{R}$
$\tan(ax+b)$	$a\frac{1}{cos^2(ax+b)}$	
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$	$]0\,;\,+\infty[$
$\exp(x)$	$\exp(x)$	$\mathbb{R}$

3 – مبرهنة :

➢ f قابلة للإشتقاق في a $\underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow}$ f متصلة في a.

➢ f قابلة للإشتقاق على مجال I $\underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow}$ f متصلة على المجال I.

<u>مثال مضاد</u> : الدالة $|\,.\,|$ متصلة في 0 و لكنها غير قابلة للإشتقاق في 0.

4 – ملاحظة :

f قابلة للإشتقاق في a $\not\Rightarrow$ f' متصلة في a.

<u>مثال مضاد</u> : الدالة $f : x \to \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & si \quad x \neq 0 \\ 0 & si \quad x = 0 \end{cases}$ قابلة للإشتقاق في 0 و لكن مشتقتها f' غير متصلة في 0.

5 – العمليات على الدوال المشتقة :

Fonction	F.dérivée	Fonction	F.dérivée
$f+g$	$f'+g'$	$\frac{f}{g}$	$\frac{f'g-fg'}{g^2}$
$f \times g$	$f'g+fg'$	$\frac{f}{g^n}\ ;\ n \in \mathbb{N}^*$	$\frac{f'g-nfg'}{g^{n+1}}$
$(\lambda \in \mathbb{R})\ \lambda f$	$\lambda f'$	$\frac{1}{g}$	$-\frac{g'}{g^2}$
$(n \in \mathbb{N}^*)\ f^n$	$n\, f'\, f^{n-1}$	$\frac{ax+b}{cx+d}\ ;\ \nabla \neq 0$	$\frac{ad-bc}{(cx+d)^2} = \frac{\nabla}{(cx+d)^2}$
f^2	$2\, f' f$	$f(g(x))$	$g'(x)\, f'(g(x))$
$\sqrt{f(x)}$	$\frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$	$f(ax+b)$	$a\, f'(ax+b)$

6 – منحى تغيرات دالة عددية :

لتكن f د. عددية للمتغير الحقيقي x و قابلة للإشتقاق على مجال مفتوح I.

➢ f تزايدية على I $\Leftrightarrow$ $\forall\, x \in I, f'(x) \geq 0$

➢ f تناقصية قطعا على I $\Leftrightarrow$ $\forall\, x \in I, f'(x) < 0$

➢ f ثابتة على I $\Leftrightarrow$ $\forall\, x \in I, f'(x) = 0$

7 – مطاريف دالة :

لتكن f دالة عددية لمتغير حقيقي و معرفة على مجال مفتوح I يحتوي العدد الحقيقي a و قابلة للإشتقاق في النقطة a.

➢ f تقبل مطرافا في a $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} f'(a) = 0 \\ f' \text{ تغير إشارتها على يمين و يسار } a \end{cases}$

➢ $\begin{cases} f' \text{ تغير إشارتها على يمين} \\ a \text{ و يسار} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f \text{ تغير رتابتها على يمين} \\ a \text{ و يسار} \end{cases}$

8 – تقعر و نقطة إنعطاف منحنى :

لتكن f دالة عددية للمتغير الحقيقي x و قابلة للإشتقاق مرتين على مجال مفتوح I يحتوي العدد الحقيقي a و (C_f) منحنى الدالة f في م.م.م.

a – تقعر منحنى :

➢ $\forall\, x \in I, f''(x) \geq 0$ $\Leftrightarrow$ (C_f) مقعر على I

➢ $\forall\, x \in I, f''(x) \leq 0$ $\Leftrightarrow$ (C_f) محدب على I

b – نقطة إنعطاف منحنى :

➢ $\begin{cases} f''(a) = 0 \\ f'' \text{ تغير إشارتها على يمين و يسار } a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M(a\,;f(a)) \text{ نقطة} \\ \text{إنعطاف للمنحنى } (C_f) \end{cases}$

➢ $\begin{cases} f'' \text{ تغير إشارتها على يمين} \\ a \text{ و يسار} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (C_f) \text{ يغير تقعره على يمين} \\ a \text{ و يسار} \end{cases}$

IV - مشتقة مركب دالتين :

1 – نشاط :

حدد صيغة مشتقة الدالة f المعرفة ب : $f(x) = (2x^2-x+1)^6 - \sqrt{\tan(x)}$

2 – مبرهنة :

إذا كانت f و g دالتين عدديتين للمتغير الحقيقي x و قابلتين للإشتقاق على التوالي على مجالين I و J بحيث : $f(I) \subset J$

$$I \xrightarrow{f} J \xrightarrow{g} \mathbb{R}, \quad g \circ f$$

فإن الدالة $g \circ f$ قابلة للإشتقاق على I

و $\forall\, x \in I,\ (g \circ f)'(x) = f'(x) \times g'\big(f(x)\big)$

V - مشتقة الدالة العكسية :

1 – مبرهنة :

إذا كانت الدالة f تقابل من مجال I نحو المجال $J := f(I)$ و قابلة للإشتقاق على المجال I و كان $\forall x \in I\,, f'(x) \neq 0$ فإن :

➢ f^{-1} قابلة للإشتقاق على J.

➢ $\forall\, y \in J, (f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$

➢ $\forall\, (x_0, y_0) \in I \times J,$

$$\big(y_0 = f(x_0)\big) \Rightarrow \left((f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'\big(f^{-1}(y_0)\big)} = \frac{1}{f'(x_0)}\right)$$

2 – تطبيق :

حدد صيغة مشتقة الدالتين :

$$Arctan : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[\\ x \to \tan^{-1}(x) \end{array} \quad \text{و} \quad Arcsin : \begin{array}{l} [-1;1] \to \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right] \\ x \to \sin^{-1}(x) \end{array}$$

3 – نتائج :

- $\forall\, n \in \{2;3;4\dots\}, \forall\, x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \left(\sqrt[n]{x}\right)' = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}} = \frac{1}{n}\, x^{\frac{1}{n}-1}$
- $\forall\, r \in \mathbb{Q}, \forall\, x \in \mathbb{R}_+^*, \quad (x^r)' = r\, x^{r-1}$

4 – تعميم :

لكل دالة f قابلة للإشتقاق على مجال I بحيث $\forall\, x \in I, f(x) > 0$،

$$\forall\, r \in \mathbb{Q}, \forall\, x \in I, \quad (f^r)'(x) = r\, f'(x)\, f^{r-1}(x)$$

5 – تمرين :

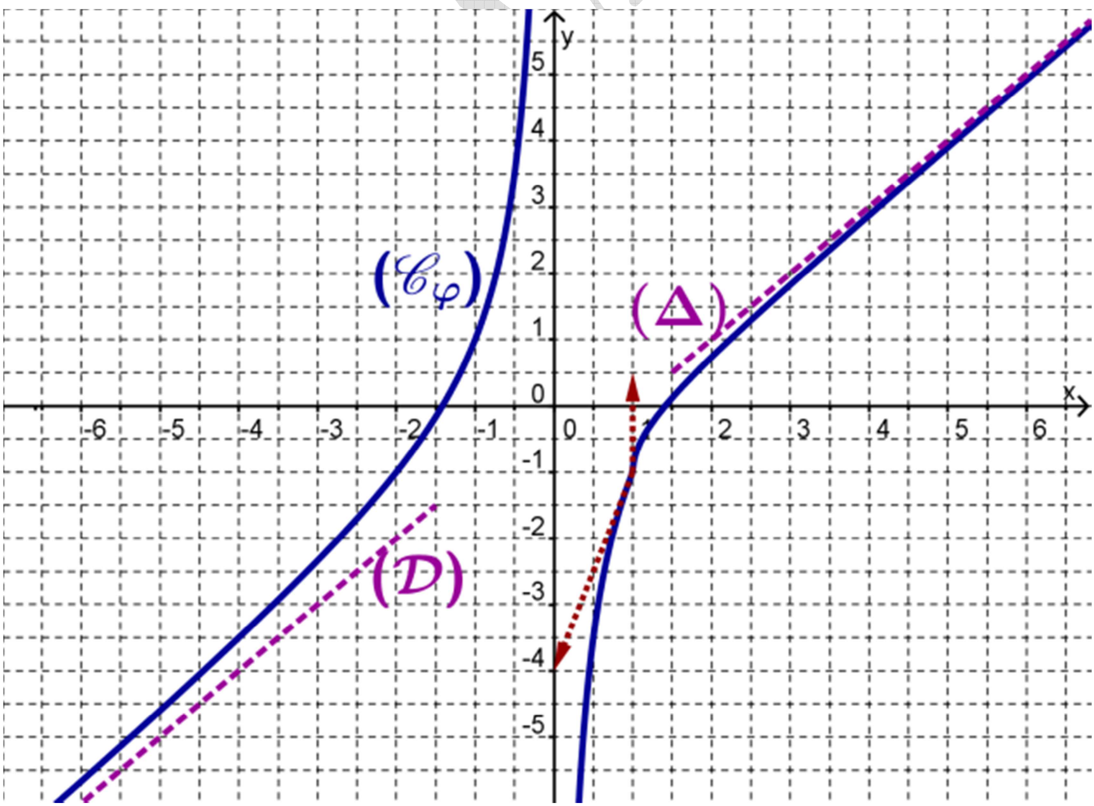
نعتبر التقابل f المعرف من $[0;+\infty[$ نحو $[1;+\infty[$ ب :

$$\forall x \in [0;+\infty[, \quad f(x) = \sqrt[3]{(x^2+1)^2}$$

.01 حدد صيغة f' على $[0;+\infty[$.

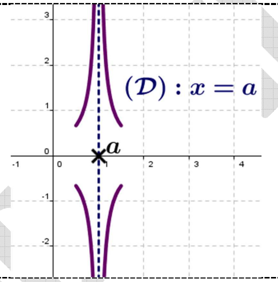
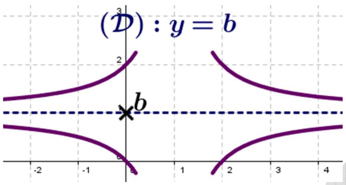
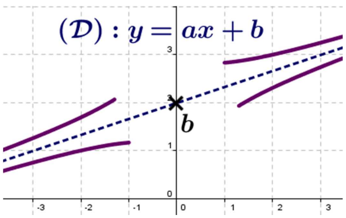
.02 أحسب $f^{-1}(2)$.

.03 إستنتج $(f^{-1})'(2)$.



الفروع اللانهائية لمنحنى دالة عددية

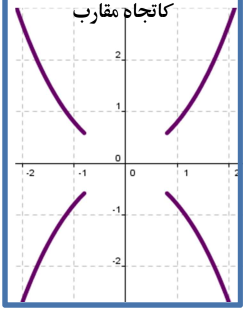
ذ. عبد الله الدفاع

النهاية	$\lim\limits_{x\to a} f(x) = \pm\infty$	$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = b \in \mathbb{R}$	$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) - (ax+b) = 0$
تأويل هندسي	المنحنى $(\mathcal{C}_f)$ يقبل المستقيم الذي معادلته $x = a$ كمقارب عمودي بجوار a.	المنحنى $(\mathcal{C}_f)$ يقبل المستقيم الذي معادلته $y = b$ كمقارب أفقي بجوار $\pm\infty$.	المنحنى $(\mathcal{C}_f)$ يقبل المستقيم الذي معادلته $y = ax + b$ كمقارب مائل بجوار $\pm\infty$.
أمثلة (مبيانيا)			

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$$

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \pm\infty$

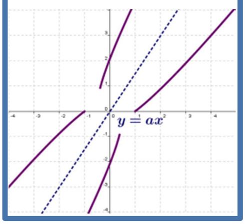
المنحنى يقبل محور الأراتيب كاتجاه مقارب



$\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = a \neq 0$; $a \in \mathbb{R}^*$

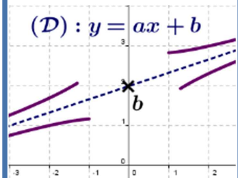
- $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) - ax = \pm\infty$

  المنحنى يقبل كل مستقيم ميله a كإتجاه مقارب بجوار $\pm\infty$.

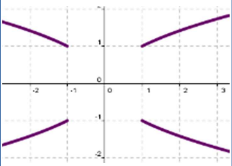
- $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) - ax = b \in \mathbb{R}$

  المنحنى يقبل المستقيم الذي معادلته $y = ax + b$ كمقارب مائل بجوار $\pm\infty$.

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$

المنحنى يقبل محور الأفاصيل كاتجاه مقارب (أو كفرع شلجمي Branche parabolique)



النقطة $\Omega(a;b)$ مركز تماثل المنحنى $(\mathcal{C}_f)$ إذا وفقط إذا تحقق الشرطان التاليان <u>في هذا الترتيب</u> :

$i.\ \forall x \in D_f, (2a - x) \in D_f$ (متماثلة بالنسبة للعدد a D_f $\Leftrightarrow$)

$ii.\ \forall x \in D_f, f(2a - x) = 2b - f(x)$

المستقيم (Δ) الذي معادلته $x = a$ هو محور تماثل المنحنى $(\mathcal{C}_f)$ إذا وفقط إذا تحقق الشرطان التاليان <u>في هذا الترتيب</u> :

$i.\ \forall x \in D_f, (2a - x) \in D_f$ (متماثلة بالنسبة للعدد a D_f $\Leftrightarrow$)

$ii.\ \forall x \in D_f, f(2a - x) = f(x)$

I - تذكير :

1 – نقطة تماثل منحنى دالة عددية :

النقطة $\Omega(a;b)$ مركز تماثل المنحنى $(\mathcal{C}_f)$ إذا و فقط إذا تحقق الشرطان التاليان في هذا الترتيب :

01. $\forall x \in D_f, (2a-x) \in D_f$ ($\Leftrightarrow$ D_f متماثلة بالنسبة للعدد a)
02. $\forall x \in D_f, f(2a-x) = 2b - f(x)$

2 – محور تماثل منحنى دالة عددية :

المستقيم (Δ) الذي معادلته $x = a$ هو محور تماثل المنحنى $(\mathcal{C}_f)$ إذا و فقط إذا تحقق الشرطان التاليان في هذا الترتيب :

01. $\forall x \in D_f, (2a-x) \in D_f$ ($\Leftrightarrow$ D_f متماثلة بالنسبة للعدد a)
02. $\forall x \in D_f, f(2a-x) = f(x)$

3 – الفروع اللانهائية لمنحنى دالة عددية : (أنظر المطبوع)

II - نماذج من دراسة دوال عددية :

1 – نشاط :

نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة جيدا على $\mathbb{R}$ ب :

$$f(x) = \begin{cases} x\sqrt{2-x} & si \quad x < 2 \\ \sqrt[3]{x^2 - 2x} & si \quad x \geq 2 \end{cases}$$

01. أدرس إتصال الدالة f في 2 ثم أحسب $\lim_{|x|\to+\infty} f(x)$.
02. أدرس الفروع اللانهائية ل $(\mathcal{C}_f)$ منحنى الدالة f.
03. أدرس قابلية إشتقاق f في النقطة $a = 2$.

لتكن f' الدالة المشتقة للدالة f على $\mathbb{R}\backslash\{2\}$.

04. بين أن :

- $\forall x \in]-\infty;2[, f'(x) = \frac{4-3x}{2\sqrt{2-x}}$
- $\forall x \in]2;+\infty[, f'(x) = \frac{2(x-1)}{3\sqrt[3]{(x^2-2x)^2}}$

05. إستنتج جدول تغيرات الدالة f.
06. أنشئ $(\mathcal{C}_f)$ منحنى الدالة f في م.م.م.م.م. $\mathcal{R}(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$.
07. حل مبيانيا في $\mathbb{R}$ المتراجحة : $(I) : 5 \times f(x) < x + 5$

ليكن g قصور الدالة f على المجال $I = [2;+\infty[$.

08. بين أن g تقابل من I نحو مجال J يتم تحديده.
09. أحسب $(g^{-1})'(2\sqrt[3]{3})$.
10. حدد صيغة التقابل العكسي g^{-1} على J.
11. أنشئ $(\mathcal{C}_{g^{-1}})$ منحنى الدالة g^{-1} في $\mathcal{R}$.

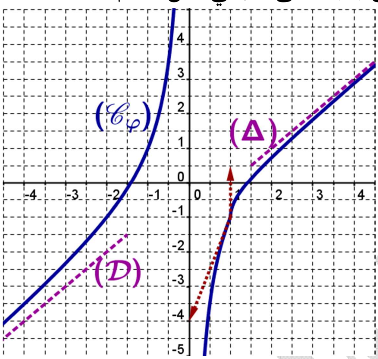
2 – تمرين 1 : (فرض منزلي)

نعتبر الدالة العددية φ للمتغير الحقيقي x المعرفة بمنحناها $(\mathcal{C})$ في $\Re$.

01. حدد δ حيز تعريف الدالة φ.
02. حدد نهايات φ عند محدات δ.
03. هل φ متصلة في 1؟
04. حدد : $\varphi'_g(1)$ و $\lim_{x\to1^+} \frac{\varphi(x)-\varphi(1)}{x-1}$
05. استنتج قابلية إشتقاق φ في 1.
06. أنشئ في جداول مختلفة : تغيرات φ و φ' و جدول تقعر $(\mathcal{C})$ على δ.
07. حدد الفروع اللانهائية ل $(\mathcal{C})$.
08. حدد تقاطع $(\mathcal{C})$ مع محوري المعلم.
09. استنتج إشارة φ على δ.
10. حل في $\mathbb{R}$ المتراجحة : $\varphi(x) + x > 0$.

ليكن ψ (Psi) قصور الدالة φ (Phi) على المجال $\omega = [1;+\infty[$.

11. تحقق من أن ψ تقابل من ω نحو المجال Ω يتم تحديده.
12. اعط جدول تغيرات ψ^{-1} على Ω.
13. حدد $\psi^{-1}(0)$ ثم $(\psi^{-1})'(0)$.
14. أنشئ $(\mathcal{C}')$ منحنى ψ^{-1} في نفس المعلم $\Re$.



3 – تمرين 2 :

نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة جيدا على $\mathbb{R}$ ب :

$$f(x) = \begin{cases} 1 + \sqrt[3]{1-x^3} & si \quad x < 1 \\ x + \sqrt{x^2 - 1} & si \quad x \geq 1 \end{cases}$$

01. أدرس إتصال الدالة f في 1 ثم أحسب نهاياتها عند مالانهاية.
02. بين أن المستقيم $(D) : y = 2x$ مقارب مائل ل $(\mathcal{C}_f)$ منحنى الدالة f بجوار $+\infty$.
03. أدرس وضع المنحنى $(\mathcal{C}_f)$ بالنسبة للمقارب (D) على $]1;+\infty[$.
04. أدرس الفروع اللانهائية لمنحنى الدالة f.
05. أدرس قابلية إشتقاق الدالة f في النقطة 1، ثم إعط التأويل الهندسي للنتيجة المحصل عليها.

لتكن g قصور الدالة f على المجال $]1;+\infty[$.

06. أحسب $g'(x)$ لكل x من $]1;+\infty[$.
07. بين أن $g'(x) > 0$ لكل x من $]1;+\infty[$.
08. إستنتج أن g تقابل من $]1;+\infty[$ نحو المجال $]1;+\infty[$.
09. حدد صيغة التقابل العكسي g^{-1} على $]1\ ;\ +\infty[$.
10. أنشئ $(\mathcal{C}_f)$ منحنى الدالة f في م.م.م.م.م. $\mathcal{R}(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$.
11. أنشئ $(\mathcal{C}_g)$ منحنى الدالة g في $\mathcal{R}$.

المتتاليات العددية
SUITES NUMÉRIQUES

$2^{ème}$ Bac Sc
Chapitre 06

I - رتابة متتالية عددية :

1 – تعريف و مبرهنة :

لكل N و p من $\mathbb{N}$ بحيث $N \leq p$ و لكل متتالية عددية $(u_n)_{n\geq N}$،

- (u_n) تزايدية بدءا من p $\Leftrightarrow$ $\forall\, n \geq p, u_n \leq u_{n+1}$
- (u_n) تناقصية قطعا بدءا من p $\Leftrightarrow$ $\forall\, n \geq p, u_n > u_{n+1}$
- (u_n) رتيبة بدءا من p $\Leftrightarrow$ (u_n) تزايدية أو تناقصية بدءا من p
- (u_n) ثابتة $\Leftrightarrow$ $\forall\, n \geq N, u_{n+1} = u_n$

2 – ملاحظة :

توجد متتاليات عددية غير رتيبة (ليست بتزايدية و لا بتناقصية) مثل :

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} : u_n = (-1)^n$

II - بعض تقنيات دراسة رتابة متتالية :

1 – تقنية دالية : $u_n = f(n)$

a – نشاط :

حدد رتابة المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة ب : $u_n = \sqrt{\frac{3n+5}{n+2}}$

b – المبدأ :

- تحديد الدالة f المرتبطة ب $(u_n)_{n\geq N}$.
- تحديد رتابة f على المجال $I = [N; +\infty[$. (نفترض أن $I \subset D_f$)
- إستنتاج رتابة $(u_n)_{n\geq N}$: ل f و $(u_n)_{n\geq N}$ نفس الرتابة.

2 – تقنيات جبرية :

a – نشاط :

حدد رتابة المتتاليتين $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ المعرفتين ب :

$u_n = 2n + \cos(n)$ $\qquad$ $v_n = \frac{2^n}{n^2}$

b – إستعمال الفرق :

لكل N و p من $\mathbb{N}$ بحيث $N \leq p$ و لكل متتالية عددية $(u_n)_{n\geq N}$،

- (u_n) تزايدية بدءا من p $\Leftrightarrow$ $\forall\, n \geq p, 0 \leq u_{n+1} - u_n$
- (u_n) تناقصية قطعا بدءا من p $\Leftrightarrow$ $\forall\, n \geq p, u_{n+1} - u_n < 0$

c – إستعمال الخارج :

لكل N و p من $\mathbb{N}$ بحيث $N \leq p$ و لكل متتالية عددية $(u_n)_{n\geq N}$ ذات حدود موجبة قطعا بدءا من p $(\forall\, n \geq p, 0 < u_n)$،

- $\left(\forall\, n \geq p, \frac{u_{n+1}}{u_n} > 1\right) \Leftarrow$ $(u_n)_{n\geq N}$ تزايدية قطعا بدءا من p
- $\left(\forall\, n \geq p, \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1\right) \Leftarrow$ $(u_n)_{n\geq N}$ مستقرة (أو ثابتة) بدءا من p
- $\left(\forall\, n \geq p, \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1\right) \Leftarrow$ $(u_n)_{n\geq N}$ تناقصية قطعا بدءا من p

3 – تقنية ترجعية :

a – نشاط :

حدد رتابة المتتالية $(\omega_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة : $\omega_{n+1} = \sqrt{\omega_n}\,; \omega_0 = 16$

b – المبدأ :

ملاحظة تغيرات حدود متتالية عددية لتضن رتابتها ثم إستعمال الترجع للبرهنة على صحة التضن.

III - المتتاليات المكبورة - المصغورة - المحدودة :

1 – تعريف و مبرهنة :

لكل N من $\mathbb{N}$ و لكل متتالية عددية $(u_n)_{n\geq N}$،

- $(u_n)_{n\geq N}$ مكبورة $\Leftrightarrow$ $\exists\, M \in \mathbb{R} : \forall\, n \geq N,\ u_n \leq M$
- $(u_n)_{n\geq N}$ مصغورة $\Leftrightarrow$ $\exists\, m \in \mathbb{R} : \forall\, n \geq N,\ m \leq u_n$
- $(u_n)_{n\geq N}$ محدودة $\Leftrightarrow$ $\exists\, \binom{M}{m} \in \mathbb{R}^2 : \forall\, n \geq N,\ m \leq u_n \leq M$
- $\Leftrightarrow$ $\exists\, a \in \mathbb{R}^+ : \forall\, n \geq N,\ |u_n| \leq a$

2 – تقنيات

a – إستعمال متفاوتات :

بين أن المتتالية $(u_n)_{n\geq1}$ المعرفة ب $u_n = \frac{(-1)^n + \cos(n)}{n^2}$ محدودة.

b – تقنية دالية : $u_n = f(n)$

برهن أن المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة ب $u_n = \frac{3n-1}{4n+2}$ محدودة.

c – تقنية ترجعية :

نعتبر المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة ب : $u_0 = 0\,;\ \ u_{n+1} = \sqrt{6 + u_n}$

.01 قارن الحدود الأربعة الأولى ل $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ مع العدد 3.

.02 أثبت أن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ محدودة.

IV - المتتالية الحسابية – المتتالية الهندسية :

1 – أنشطة :

a – نشاط 1 :

نعتبر المتتاليتين $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفتين ب :

$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} : \begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \sqrt{2 + (u_n)^2} \end{cases} \quad \text{و} \quad (v_n)_{n\in\mathbb{N}} : v_n = (u_n)^2$$

.01 بين أن $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ حسابية محددا أساسها و حدها الأول.

.02 إستنتج u_n بدلالة n.

.03 أحسب المجموع : $S_{10} = v_3 + v_4 + \cdots + v_{10}$

b – نشاط 2 :

نعتبر المتتاليتين $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفتين ب :

$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} : \begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = \frac{9u_n}{4u_n+3} \end{cases} \quad \text{و} \quad (v_n)_{n\in\mathbb{N}} : v_n = 2 - \frac{3}{u_n}$$

.01 بين أن $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ هندسية محددا أساسها و حدها الأول.

.02 حدد v_n ثم u_n بدلالة n.

.03 أحسب المجموع : $S_{13} = v_2 + v_3 + \cdots + v_{13}$

.04 حدد رتابة $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Série d'exercices : Suites numérique

Exercice 01 : National 2005

Considérons $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite numérique définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 4 \\ \forall\, n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{3}\, u_n + 2 \end{cases}$$

On définit la suite numérique $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, v_n = u_n - 3$$

01. Calculer u_1 ,v_0 et v_1.

02. Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique.

03. Calculer v_n en fonction de n.

04. En déduire u_n en fonction de n.

05. Calculer la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

06. Calculer en fonction de n $(n \geq 1)$ la somme :

$$S = u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1}$$

Exercice 02 : National 1999

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite numérique définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ \forall\, n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{5u_n - 4}{u_n + 1} \end{cases}$$

01. Montrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N}, 2 < u_n$

02. Prouver que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strict. décroissante.

03. En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

04. Considérons la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, v_n = \frac{1}{u_n - 2}$$

05. Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique de raison $\frac{1}{3}$.

06. Calculer la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 03 : National 2003

Considérons $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite numérique définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \quad et \quad u_1 = 2 \\ \forall\, n \geq 1, u_{n+1} = \frac{3u_n - u_{n-1}}{2} \end{cases}$$

On définit la suite numérique $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, v_n = u_{n+1} - u_n$$

01. Calculer v_0 et v_1.

02. Prouver que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique.

03. Calculer en fonction de n la somme :

$$S = v_0 + v_1 + \cdots + v_{n-1}$$

04. En déduire la formule de u_n en fonction de n.

05. Calculer la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

2 – ملخص :

لتكن $(u_n)_{n\geq N}$ متتالية عددية حدها الأول u_N و p عدد صحيح طبيعي بحيث : $N \leq p$.

	متتالية حسابية	متتالية هندسية
التعريف	$\exists\, r \in \mathbb{R} : \forall\, n \geq N, u_{n+1} = u_n + r$	$\exists\, q \in \mathbb{R} : \forall\, n \geq N, u_{n+1} = q \times u_n$
تقنية تحديد طبيعة	$\forall\, n \geq N, u_{n+1} - u_n = \cdots = r$	إثبات : $\forall\, n \geq N, u_n \neq 0$ ثم $\forall\, n \geq N, \frac{u_{n+1}}{u_n} = \cdots = q$
صيغة الحد العام لـ	$\forall\, n \geq N, u_n = u_p + (n-p) \times r$	$\forall\, n \geq N, u_n = u_p \times q^{n-p}$
حساب المجموع : $S_n = \sum_{k=p}^{n} u_k$	$S_n = (n-p+1)\frac{u_p + u_n}{2}$	$S_n = \begin{cases} u_p \frac{1-q^{n-p+1}}{1-q} & si\ q \neq 1 \\ (n-p+1)\, u_p & si\ q = 1 \end{cases}$
a و b و c حدود متتابعة لـ	$2b = a + c$	$b^2 = a \times c$

3 – رتابة متتالية حسابية :

لتكن $(u_n)_{n\geq N}$ متتالية حسابية أساسها r.

- $r \geq 0 \Leftrightarrow$ $(u_n)_{n\geq N}$ تزايدية
- $r < 0 \Leftrightarrow$ $(u_n)_{n\geq N}$ تناقصية قطعا

4 – رتابة متتالية هندسية :

لتكن $(u_n)_{n\geq N}$ متتالية هندسية أساسها q و حدها الأول u_N.

- إذا كان $1 < q$ فإن :
  - ❖ $(u_n)_{n\geq N}$ تزايدية قطعا $\Leftrightarrow 0 < u_N$
  - ❖ $(u_n)_{n\geq N}$ تناقصية قطعا $\Leftrightarrow u_N < 0$
- إذا كان $q = 1$ فإن $(u_n)_{n\geq N}$ ثابتة.
- إذا كان $0 < q < 1$ فإن :
  - ❖ $(u_n)_{n\geq N}$ تزايدية قطعا $\Leftrightarrow u_N < 0$
  - ❖ $(u_n)_{n\geq N}$ تناقصية قطعا $\Leftrightarrow 0 < u_N$
- إذا كان $q = 0$ فإن $(u_n)_{n\geq N}$ مستقرة (أو ثابتة).
  - ❖ $(u_n)_{n\geq N}$ تزايدية $\Leftrightarrow u_N \leq 0$
  - ❖ $(u_n)_{n\geq N}$ تناقصية $\Leftrightarrow 0 \leq u_N$
- إذا كان $q < 0$ فإن $(u_n)_{n\geq N}$ غير رتيبة (ليست بتزايدية و لا بتناقصية).

نهايات المتتاليات العددية
LIMITES DES SUITES NUMÉRIQUES

I - المتتالية المتقاربة :

1 – نشاط :

لتكن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المتتالية العددية المعرفة ب : $\begin{cases} u_0 = 10 \\ u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + 1 \end{cases}$

.01 أحسب u_1 ثم u_2.

.02 أنشئ المستقيمين $(D) : y = \frac{2}{3}x + 1$ و $(\Delta) : y = x$.

.03 استنتج مبيانيا :

.i قيمة تقريبية ل u_3 و u_4.

.ii نهاية u_n.

2 – تعريف :

لتكن (u_n) متتالية عددية.

نقول أن المتتالية (u_n) متقاربة إذا و فقط إذا كانت نهايتها عدد حقيقي.

(u_n) متقاربة $\Leftrightarrow$ $\exists\, l \in \mathbb{R} :\ \lim u_n = l$

(u_n) متباعدة $\Leftrightarrow$ $\lim u_n = \pm\infty$ أو (u_n) لا تقبل نهاية

3 – تطبيق :

بين أن المتتالية العددية المعرفة ب : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*, u_n = \sqrt[5]{\frac{n^2+1}{3n^2-1}}$ متقاربة.

4 – نهايات مرجعية :

$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ $\qquad$ $\lim_{n\to+\infty} n = +\infty$

$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} = 0$ $\qquad$ $\lim_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$

$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^3} = 0$ $\qquad$ $\lim_{n\to+\infty} n^3 = +\infty$

$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^p} = 0$ $\qquad$ $\forall\, p \in \mathbb{N}^*, \lim_{n\to+\infty} n^p = +\infty$

$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$ $\qquad$ $\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$

5 – مصاديق التقارب :

لتكن (u_n) متتالية عددية.

$\exists\, l \in \mathbb{R} :\ \lim u_n = l$

$\Updownarrow$

$\left.\begin{matrix} (u_n) \text{ تناقصية و مصغورة} \\ \text{أو} \\ (u_n) \text{ تناقصية و موجبة} \end{matrix}\right\} \Rightarrow (u_n) \text{ متقاربة} \Leftarrow \left\{\begin{matrix} (u_n) \text{ تزايدية و مكبورة} \\ \text{أو} \\ (u_n) \text{ تزايدية و سالبة} \end{matrix}\right.$

6 – ملاحظة :

(u_n) متقاربة $\;\underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow}\;$ (u_n) محدودة

مثال مضاد : المتتالية $u_n = (-1)^n$: $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ محدودة و متباعدة.

7 – النهايات و الترتيب :

ليكن l عددا حقيقيا و N و p عددين صحيحين طبيعيين بحيث : $N \leq p$

و لتكن $(a_n)_{n\geq p}$ و $(b_n)_{n\geq p}$ و $(u_n)_{n\geq N}$ متتاليات عددية.

01. $\left.\begin{matrix} \forall\, n \geq p, |u_n - l| \leq b_n \\ \lim b_n = 0^+ \end{matrix}\right\} \Rightarrow \lim u_n = l$

02. $\left.\begin{matrix} \forall\, n \geq p, a_n \leq u_n \leq b_n \\ \lim a_n = \lim b_n = l \end{matrix}\right\} \Rightarrow \lim u_n = l$

03. $\left.\begin{matrix} \forall\, n \geq p, a_n \leq u_n \\ \lim a_n = +\infty \end{matrix}\right\} \Rightarrow \lim u_n = +\infty$

04. $\left.\begin{matrix} \forall\, n \geq p, u_n \leq b_n \\ \lim b_n = -\infty \end{matrix}\right\} \Rightarrow \lim u_n = -\infty$

8 – العمليات على النهايات :

ليكن l و l' عددين حقيقيين و (u_n) و (v_n) متتاليتين عدديتين.

نهاية u_n	نهاية v_n	نهاية $u_n + v_n$
l	l'	$l + l'$
l	$+\infty$	$+\infty$
l	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	شكل غير محدد
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$

نهاية u_n	نهاية v_n	نهاية $u_n \times v_n$
l	l'	$l \times l'$
$0 < l$	$+\infty$	$+\infty$
$0 < l$	$-\infty$	$-\infty$
$l < 0$	$+\infty$	$-\infty$
$l < 0$	$-\infty$	$+\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$
0	$\pm\infty$	شكل غير محدد

نهاية u_n	نهاية $1/u_n$
$l \neq 0$	$1/l$
0^+	$+\infty$
0^-	$-\infty$
$\pm\infty$	0

$$\lim \frac{u_n}{v_n} = (\lim u_n) \times \left(\lim \frac{1}{v_n}\right)$$

II - نهاية المتتاليتين (a^n) و (n^α) :

1 – نهاية المتتالية (a^n) :

a – مبرهنة :

لكل عدد حقيقي a،

$$\lim a^n = \begin{cases} +\infty & si \quad a > 1 \\ 1 & si \quad a = 1 \\ 0 & si \quad -1 < a < 1 \\ \text{غير موجودة} & si \quad a \leq -1 \end{cases}$$

b – تطبيق :

أحسب : $c = \lim 3^n$ $\qquad$ $b = \lim\left(-\frac{4}{9}\right)^n$ $\qquad$ $a = \lim\left(\frac{2}{3}\right)^n$

$f = \lim\left(\sqrt{6} - 3\sqrt{2}\right)^n$ $\qquad$ $e = \lim 1^n$ $\qquad$ $d = \lim(-1)^n$

2 – نهاية المتتالية (n^α) :

a – مبرهنة :

لكل عدد جذري α ($\alpha \in \mathbb{Q}$)،

$$\lim n^\alpha = \begin{cases} +\infty & si \quad \alpha > 0 \\ 1 & si \quad \alpha = 0 \\ 0 & si \quad \alpha < 0 \end{cases}$$

b – تطبيق :

حدد : $d = (3 + 4n)^5$ $\qquad$ $c = \lim n^0$ $\qquad$ $b = \lim n^{\frac{-4}{9}}$ $\qquad$ $a = \lim n^{\frac{2}{3}}$

III - نماذج من بعض المتتاليات الترجعية :

1 – دراسة المتتالية : $u_{n+1} = au_n + b$

a – نشاط :

لتكن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المتتالية العددية المعرفة ب :

$$u_0 = 3 \quad et \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = -\frac{1}{2}u_n + 1$$

.01 أحسب الحدود الثلاثة الأولى للمتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

.02 بين أن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ليست بمتتالية حسابية و ليست بهندسية.

.03 أنشئ المستقيمين $(D) : y = -\frac{1}{2}x + 1$ و $(\Delta) : y = x$.

.04 حدد على محور الأفاصيل الأعداد u_0 و u_1 و u_2 و u_3 و u_4.

.05 حدد قيمة تقريبية لنهاية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

نضع لكل n من $\mathbb{N}$، $v_n = u_n - \frac{2}{3}$.

.06 بين أن $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ هندسية و أن أساسها هو : $q = -\frac{1}{2}$.

.07 عبر لكل n من $\mathbb{N}$، عن v_n بدلالة n.

.08 استنتج صيغة u_n لكل n من $\mathbb{N}$.

.09 حدد القيمة المضبوطة لنهاية u_n.

2 – دراسة المتتاليتين : $u_{n+1} = \frac{au_n+b}{cu_n+d}$ و $v_n = f(u_n)$

a – مبرهنة 1 :

لتكن f دالة عددية لمتغير حقيقي معرفة على مجال مغلق I،

و لتكن $\begin{cases} u_N \text{ معلوم} \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$: $(u_n)_{n\geq N}$ متتالية عددية حدها الأول u_N.

$\begin{cases} f \text{ متصلة على } I \\ f(I) \subset I \end{cases} \Rightarrow$ نهاية $(u_n)_{n\geq N}$ حل للمعادلة $f(x) = x$ في I.

$\begin{cases} (u_n)_{n\geq N} \text{ متقاربة} \\ u_N \in I \end{cases} \Rightarrow \exists\, l \in I : \begin{cases} \lim u_n = l \\ f(l) = l \end{cases}$

b – مبرهنة 2 :

ليكن l عددا حقيقيا و (u_n) متتالية عددية و f دالة عددية لمتغير حقيقي معرفة على مجال مفتوح I يحتوي l $(l \in I \subset D_f)$.

$\begin{cases} f \text{ متصلة على } I \\ \lim u_n = l \in I \end{cases} \Rightarrow$ المتتالية $(v_n) : v_n = f(u_n)$ متقاربة و نهايتها هي : $\lim v_n = f(l)$

---

c – تطبيق :

لتكن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المتتالية العددية المعرفة ب :

$$u_0 = 1 \quad et \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{4\,u_n + 6}{u_n + 3}$$

و لتكن f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة جيدا على المجال $I = [1\,;\,+\infty[$ بما يلي : $f(x) = \frac{4x+6}{x+3}$

.01 بين أن $f(I) \subset I$.

.02 برهن أن : $\forall n \in \mathbb{N}, 1 \leq u_n < 3$

.03 أثبت أن المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ تزايدية قطعا.

.04 إستنتج أن المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة.

.05 حدد نهاية المتتالية (u_n).

لتكن g الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة جيدا على المجال $J =]-2\,;\,+\infty[$ بما يلي : $g(x) = \frac{x-3}{x+2}$

و لتكن $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المتتالية العددية المعرفة ب : $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = g(u_n)$

.06 حدد نهاية المتتالية (v_n).

.07 بين أن المتتالية (v_n) هندسية محددا أساسها.

.08 أكتب u_n بدلالة n.

.09 تحقق من نهاية المتتالية (u_n).

الدوال الأصلية
PRIMITIVES DES FONCTIONS N.

I - الدوال الأصلية :

1 – تمهيد :

حدد دالة F تحقق $F' = f$ حسب كل حالة مما يلي :

01. $f(x) = 0$
02. $f(x) = -3$
03. $f(x) = 4x + 5$
04. $f(x) = 3x^2 + 7x - 5$ و $F(0) = 1$
05. $f(x) = -\frac{1}{x^2}$
06. $f(x) = \cos(3x+1)$ و $F\left(-\frac{1}{3}\right) = 2$

2 – تعريف :

لكل دالتين عدديتين f و F لنفس المتغير الحقيقي و معرفتين على مجال I،

$$\begin{cases} F \text{ دالة أصلية ل } f \\ \text{ على المجال } I \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} F \text{ قابلة للإشتقاق على } I \\ \text{ ثم } \\ \forall x \in I, F'(x) = f(x) \end{cases}$$

3 – خاصيات و تعاريف :

a – تعريف :

لتكن F دالة أصلية لدالة عددية f لمتغير حقيقي على مجال I.

مجموعة الدوال الأصلية للدالة f على المجال I هي :

$$\mathbb{P}_f = \{F + k : k \in \mathbb{R}\} = \{x \to F(x) + k : k \in \mathbb{R}\}$$

b – خاصية 1 :

لكل دالة عددية f لمتغير حقيقي بحيث تقبل دالة أصلية على مجال I،

و لكل زوج $(x_0 ; y_0) \in I \times \mathbb{R}$، توجد دالة أصلية وحيدة H للدالة f على المجال I تحقق $H(x_0) = y_0$.

c – خاصية 2 :

إذا كان λ عددا حقيقيا و كانت F و G دالتين أصليتين على التوالي لدالتين عدديتين f و g لنفس المتغير الحقيقي على مجال I فإن :

- $F + G$ دالة أصلية للدالة $f + g$ على I.
- λF دالة أصلية للدالة λf على I.

4 – مبرهنة :

$\Leftarrow$

كل دالة عددية لمتغير حقيقي و متصلة على مجال I تقبل دالة أصلية على I.

$\not\Rightarrow$

مثال مضاد : الدالة $f : x \to \begin{cases} 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right) & si\ x \neq 0 \\ 0 & si\ x = 0 \end{cases}$

غير متصلة في 0 و لكنها تقبل دالة أصلية على $\mathbb{R}$:

$$F : x \to \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & si\ x \neq 0 \\ 0 & si\ x = 0 \end{cases}$$

II - جدول دوال أصلية لدوال إعتيادية :

$f(x)$	$F(x)$	I
0	$k \quad (k \in \mathbb{R})$	$\mathbb{R}$
$a \neq 0$	ax	$\mathbb{R}$
$\forall r \in \mathbb{Q}\backslash\{0 ; -1\}$, x^r	$\frac{1}{r+1} x^{r+1}$	$\mathbb{R}_+^*$
x^2	$\frac{1}{3}x^3$	$\mathbb{R}$
$-\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{x}$	$\mathbb{R}_+^*$ أو $\mathbb{R}_-^*$
$x^{-1} = \frac{1}{x}$	$\ln(\|x\|)$	$\mathbb{R}_+^*$ أو $\mathbb{R}_-^*$
$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\sqrt{x}$	$\mathbb{R}_+^*$
$\cos(x)$	$\sin(x)$	$\mathbb{R}$
$\sin(x)$	$-\cos(x)$	$\mathbb{R}$
$1 + \tan^2(x)$ أو $\frac{1}{\cos^2(x)}$	$\tan(x)$	$\forall k \in \mathbb{Z}$, $\left]-\frac{\pi}{2} + k\pi ; \frac{\pi}{2} + k\pi\right[$
$\cos(ax+b)$ $(a \neq 0)$	$\frac{1}{a}\sin(ax+b)$	$\mathbb{R}$
$\sin(ax+b)$ $(a \neq 0)$	$-\frac{1}{a}\cos(ax+b)$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{\cos^2(ax+b)}$ $(a \neq 0)$	$\frac{1}{a}\tan(ax+b)$	
$\forall r \in \mathbb{Q}\backslash\{0 ; -1\}$, $u'(x) \times (u(x))^r$	$\frac{1}{r+1}(u(x))^{r+1}$	
$\frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$	$\sqrt{u(x)}$	
$\frac{u'(x)}{u(x)}$	$\ln(\|u(x)\|)$	
$(a \neq 0) \quad \frac{1}{ax+b}$	$\frac{1}{a}\ln(\|ax+b\|)$	
$\tan(x)$	$-\ln(\|cos(x)\|)$	$\forall k \in \mathbb{Z}$, $\left]-\frac{\pi}{2} + k\pi ; \frac{\pi}{2} + k\pi\right[$
e^x	e^x	$\mathbb{R}$
$(a \neq 0) \quad e^{ax}$	$\frac{1}{a}e^{ax}$	$\mathbb{R}$
$u'(x)\, e^{u(x)}$	$e^{u(x)}$	

III - تطبيقات :

حدد مجموعة الدوال الأصلية للدالة f حسب كل حالة مما يلي :

01. $f(x) = (2x+1)\sqrt{x^2 + x + 3}$
02. $f(x) = x\sqrt[3]{x^2 + 1}$
03. $f(x) = \frac{\sin^3(x)}{\cos^5(x)}$
04. $f(x) = x\sqrt[3]{(x^2+1)^2}$

Série d'exercices : Primitives des fonctions

Réf : www.l9adi.com

Exercice 01 :

Déterminer la fonction F la primitive de f selon chaque cas :

$f(x)$	*Critères*
$\frac{2}{x^2}+x$	$F(1)=-1$
$\sqrt{3x+2}$	$F(2)=-1$
$\frac{2}{x^3}+\frac{3}{\sqrt{x}}$	F s'annule en 1
$\frac{2x+3}{\sqrt{x^2+3x}}$	$A\binom{1}{6}\in(\mathcal{C}_F)$
$\frac{5}{x^2}\left(1-\frac{1}{x}\right)^4$	$(\mathcal{C}_F)$ admet (Ox) comme asymptote au voisinage de l'infinie
$\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}+1$	$(\mathcal{C}_F)$ admet la $(D) : y=2x+1$ comme asymptote au voisinage de $+\infty$.

Exercice 02 :

Considérons la fonction v définie par :

$$\forall\, x \in]-1\,;2[,\quad v(x)=\frac{3x^2+6}{(x^2-x-2)^2}$$

01. Déterminer les deux réels a et b tels que :

$$v(x)=\frac{a}{(x-2)^2}+\frac{b}{(x+1)^2}$$

02. En déduire V la primitive de v sur $]-1\,;2[$ qui s'annule en 1.

Exercice 03 :

Considérons la fonction f définie par :

$$f(x)=\begin{cases}2x+1 & ; \ x\le 1\\ -x+4 & ; \ x>1\end{cases}$$

01. Montrer que f admet une primitive sur $\mathbb{R}$.

02. Donner l'ensemble des primitives de f sur $\mathbb{R}$.

II - جدول دوال أصلية لدوال إعتيادية :

تعميم		أمثلة	
$f(x)$	$F(x)$	$f(x)$	$F(x)$
0	$k\ \ (k\in\mathbb{R})$	0	3
$a\neq 0$	ax	5	$5x$
$\forall\, r\in\mathbb{Q}\backslash\{0\,;-1\}$, x^r	$\frac{1}{r+1}x^{r+1}$	x^6	$\frac{1}{7}x^7$
x^2	$\frac{1}{3}x^3$		
$-\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{x}$		
$x^{-1}=\frac{1}{x}$	$\ln(\lvert x\rvert)$		
$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\sqrt{x}$		
$\cos(x)$	$\sin(x)$		
$\sin(x)$	$-\cos(x)$		
$1+\tan^2(x)$ أو $\frac{1}{\cos^2(x)}$	$\tan(x)$		
$\cos(ax+b)$ $(a\neq 0)$	$\frac{1}{a}\sin(ax+b)$	$\cos(2x+1)$	$\frac{1}{2}\sin(2x+1)$
$\sin(ax+b)$ $(a\neq 0)$	$-\frac{1}{a}\cos(ax+b)$	$\sin(5x-4)$	$-\frac{1}{5}\cos(5x-4)$
$\frac{1}{\cos^2(ax+b)}$ $(a\neq 0)$	$\frac{1}{a}\tan(ax+b)$	$\frac{1}{\cos^2(6x+4)}$	$\frac{1}{6}\tan(6x+4)$
$\forall\, r\in\mathbb{Q}\backslash\{0\,;-1\}$, $u'(x)\times(u(x))^r$	$\frac{1}{r+1}(u(x))^{r+1}$	$2x\,(x^2-13)^5$	$\frac{1}{6}(x^2-13)^6$
$\frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$	$\sqrt{u(x)}$	$\frac{3x^2}{2\sqrt{x^3-10}}$	$\sqrt{x^3-10}$
$\frac{u'(x)}{u(x)}$	$\ln(\lvert u(x)\rvert)$	$\frac{2x}{(x^2+3)}$	$\ln(\lvert x^2+3\rvert)$
$(a\neq 0)\ \ \frac{1}{ax+b}$	$\frac{1}{a}\ln(\lvert ax+b\rvert)$	$\frac{1}{4x-5}$	$\frac{1}{4}\ln(\lvert 4x-5\rvert)$
$\tan(x)$	$-\ln(\lvert cos(x)\rvert)$		
e^x	e^x		
$(a\neq 0)\ \ e^{ax}$	$\frac{1}{a}e^{ax}$	e^{3x}	$\frac{1}{3}e^{3x}$
$u'(x)\,e^{u(x)}$	$e^{u(x)}$	$\cos(x)\ e^{\sin(x)}$	$e^{\sin(x)}$

I - دالة اللوغاريثم النبيري :

1 – تعريف :

➢ الدالة الأصلية للدالة $x \to \frac{1}{x}$ على المجال $]0\,;\,+\infty[$ و التي تنعدم في النقطة $x_0 = 1$، تسمى دالة اللوغاريثم النبيري و يرمز لها ب ln أو Log.

➢ بتعبير آخر $\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*, \ln'(x) = \frac{1}{x}$ و $\ln(1) = 0$

2 – دراسة أولية :

➢ الدالة ln دالة متصلة على $\mathbb{R}_+^*$. (لأنها قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}_+^*$)

➢ الدالة ln تزايدية قطعا على $\mathbb{R}_+^*$.(لأن $\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*, \ln'(x) = \frac{1}{x} > 0$)

x	0	1	$+\infty$
$\ln(x)$	‖	0 ↗	
$\ln(x)$	‖ $-$	0	$+$

3 – خاصيات :

لكل r من $\mathbb{Q}$ و لكل x و y من $\mathbb{R}_+^*$،

01. $\ln(x \times y) = \ln(x) + \ln(y)$

02. $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$

03. $\ln\left(\frac{1}{y}\right) = -\ln(y)$

04. $\ln(x^r) = r\ln(x)$

05. $\forall\, n \in \mathbb{N}\backslash\{0\,;1\},\ \ln(\sqrt[n]{x}) = \frac{1}{n}\ln(x)$

06. $\ln(x) = \ln(y) \quad \Leftrightarrow \quad x = y$

07. $\ln(x) < \ln(y) \quad \Leftrightarrow \quad x < y$

4 – تطبيق :

01. أحسب : $\ln\left(\sqrt{\sqrt{2}+1}\right) + \ln\left(\sqrt{\sqrt{2}-1}\right)$

02. إذا علمت أن $\ln(2) \simeq 0.7$ و $\ln(3) \simeq 1.1$ فحدد قيمة مقربة لكل من $\ln(\sqrt{6})$ و $\ln(\sqrt[3]{12})$.

II - دراسة الدالة ln :

1 – نشاط :

لتكن f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة جيدا على $\mathbb{R}_+^*$ ب :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*,\ \ f(x) = \ln(x)$$

و ليكن $(\mathcal{C})$ منحناها في م.م.م.م.م. $\mathcal{R}(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

01. دراسة نهايات f عند محدات $\mathbb{R}_+^*$:

a. بوضعك ل $x = 2^n$، أحسب : $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

b. بوضعك ل $x = \frac{1}{2^n}$، إستنتج : $\lim_{x\to 0^+} f(x)$

02. دراسة الفروع اللانهائية للمنحنى $(\mathcal{C})$:

a. أول هندسا نتيجة السؤال b السابق.

b. بين أن : $\forall\, x > 1,\ \ 0 < \ln(x) < \sqrt{x}$

c. إستنتج : $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$ ثم أول هندسا نتيجة.

03. أدرس تقعر المنحنى $(\mathcal{C})$.

04. حدد معادلة المماس ل $(\mathcal{C})$ عند النقطة ذات الأفصول $x_0 = 1$.

05. مثل المنحنى $(\mathcal{C})$ في $\mathcal{R}$.

06. حل مبيانيا في $\mathbb{R}_+^*$ المعادلة : $(E) : \ln(x) = 1$

07. بين أن الدالة ln تقبل دالة عكسية على $\mathbb{R}_+^*$.

08. أنشئ منحنى الدالة ln^{-1} في $\mathcal{R}$.

2 – تسمية :

حَل المعادلة $\ln(x) = 1$ في $\mathbb{R}_+^*$ يسمى العدد النبيري و نرمز له ب e

و لدينا $\ln(e) = 1$ و $e \simeq 2.71828\ 18284\ 59045\ \ldots$

3 – نهايات مهمة :

$$\lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0^+ \qquad \lim_{x\to 0^+} x\ln(x) = 0^-$$

لكل r من $\mathbb{Q}_+^*$، $(r > 0)$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x^r} = 0^+ \qquad \lim_{x\to 0^+} x^r \ln(x) = 0^-$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln(x)}{x-1} = \lim_{h\to 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1$$

4 – المشتقة اللوغاريثمية – دالة أصلية ل $x \to \frac{u'(x)}{u(x)}$:

لتكن u دالة قابلة للإشتقاق على مجال I بحيث : $\forall\, x \in I, u(x) \neq 0$

➢ الدالة $x \to \ln(|u(x)|)$ قابلة للإشتقاق على I

و $\forall\, x \in I, (\ln(|u(x)|))' = \frac{u'(x)}{u(x)}$

➢ الدوال الأصلية للدالة $x \to \frac{u'(x)}{u(x)}$ على المجال I هي الدوال : $x \to \ln(|u(x)|) + \lambda$ حيث λ عدد حقيقي.

III - دالة اللوغاريثم العشري :

1 – نشاط :

إذا علمت أن $[H_3O^+] = 5.37\ 10^{-8}\ mol.l^{-1}$ فحدد pH الماء الخالص.

2 – تعريف :

نسمي دالة اللوغاريثم العشري الدالة التي نرمز لها ب log و المعرفة ب :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*,\ \ \log(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(10)}$$

IV - دالة اللوغاريثم للأساس a :

1 – تعميم :

ليكن $a \in \mathbb{R}_+^*\backslash\{1\}$.

الدالة $x \to \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$ المعرفة جيدا على المجال $]0\,;\,+\infty[$ تسمى دالة اللوغاريثم للأساس a و يرمز لها ب : $\log_a$ ونكتب :

$$\forall\, x \in]0\,;+\infty[,\ \ \log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$$

: Série d'exercices :
Fonction logarithme népérien

Réf : www.naja7math.com + ...

Exercice 01 :

Résoudre dans $\mathbb{R}$,

$(E_1) : \ln(x^2+2x)=0$ $(E_2) : \ln(x^2-3)=\ln(2x)$

$(I_1) : \ln(x+1)\geq \ln(2x)$ $(I_2) : \ln(x^2+2x)<0$

Exercice 02 :

Donner l'ensemble de définition de f ensuite l'expression de sa dérivée selon chaque cas :

$f_1(x)=\ln(1+ln(x))$ $f_2(x)=\ln(7-x^2)$

$f_3(x)=xln(x)+\frac{\ln(\sqrt{x})}{x}$ $f_4(x)=\ln^3(x)$

Exercice 03 :

Déterminer les limites suivantes :

$a=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(\,x^2\,)}{x+2}$ $b=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln^2(x)-x$

$c=\lim\limits_{x\to0^+}\ln(x)\ln(x+1)$ $d=\lim\limits_{x\to0^+}\sqrt{x}\,\ln(x)-x^2\ln\left(\frac{1}{x}\right)$

Exercice 04 : National 2002

Considérons la fonction f à variable réelle définie par :

$$f(x)=\frac{x}{2}-2\ln(\sqrt{x}-1)$$

01. Déterminer D_f l'ensemble de définition de f.

02. Calculer les limites de f aux bornes de D_f.

03. Montrer que : $\forall\, x\in\,]1\,;\,+\infty[\,:f'(x)=\frac{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-2)}{2\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}$

04. Dresser le tableau de variation de f.

Soit $(\mathcal{C}_f)$ la représentation graphique de f dans un repère orthonormée $\mathcal{R}(O\,;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath})$ tel que : $\|\vec{\imath}\|=1.5\,cm$.

05. Etudier les deux branches infinies de $(\mathcal{C}_f)$.

06. Etudier la position relative de $(\mathcal{C}_f)$ par rapport à la droite d'équation $y=\frac{x}{2}$.

07. Dessiner $(\mathcal{C}_f)$.

2 – خاصيات :

لكل $a\in\mathbb{R}_+^*\backslash\{1\}$ ولكل r من $\mathbb{Q}$ ولكل x و y من $\mathbb{R}_+^*$،

01. $\log_a(1)=0$

02. $\log_a(a)=1$

03. $\log_a(x\times y)=\log_a(x)+\log_a(y)$

04. $\log_a\left(\frac{x}{y}\right)=\log_a(x)-\log_a(y)$

05. $\log_a\left(\frac{1}{y}\right)=-\log_a(y)$

06. $\log_a(x^r)=r\log_a(x)$

07. $\forall\,n\in\mathbb{N}\backslash\{0\,;1\},\ \log_a(\sqrt[n]{x})=\frac{1}{n}\log_a(x)$

08. $\log_a(x)=\log_a(y)\quad\Leftrightarrow\quad x=y$

3 – المشتقة اللوغاريثمية للأساس a :

ليكن $a\in\mathbb{R}_+^*\backslash\{1\}$ ولتكن u دالة عددية معرفة على مجال I بحيث :

$\forall\,x\in I\,,u(x)\neq0$

➢ الدالة $\log_a$ قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}_+^*$ ولدينا :

$$\forall\,x\in\mathbb{R}_+^*,(\log_a)'(x)=\frac{1}{ln(a)\,x}$$

➢ إذا كانت u قابلة للإشتقاق على المجال I فإن الدالة $x\to\log_a(|u(x)|)$ قابلة للإشتقاق على I ولدينا :

$$\forall\,x\in I,\left(\log_a(|u(x)|)\right)'=\frac{u'(x)}{ln(a)\,u(x)}$$

4 – رتابة دالة اللوغاريثم للأساس a :

ليكن $a\in\mathbb{R}_+^*\backslash\{1\}$.

الدالة $\log_a$ تزايدية قطعا $\Leftrightarrow$ $1<a$

الدالة $\log_a$ تناقصية قطعا $\Leftrightarrow$ $0<a<1$

5 – التمثيل المبياني للدالة $\log_a$:

أنشئ منحنى الدالتين $f:x\to\log_2(x)$ و $g:\ x\to\log_{\frac{1}{2}}(x)$ في م.م.م.م.

الأعداد العقدية : الجزء الأول

LES NOMBRES COMPLEXES

I - مجموعة الأعداد العقدية :

1 – تمهيد :

$$\mathbb{N} \xrightarrow[x+1=0]{} \mathbb{Z} \xrightarrow[2x+1=0]{} \mathbb{Q} \xrightarrow[x^2-2=0]{} \mathbb{R} \xrightarrow[x^2+1=0]{} ?$$

$$x^2+1=0 \iff x^2=-1$$

2 – تعريف :

➢ نسمي حل المعادلة $x^2=-1$ الوحدة التخيلية و نرمز له ب i و نكتب $i^2=-1$.

➢ مجموعة الأعداد العقدية التي نرمز لها ب $\mathbb{C}$ هي مجموعة الأعداد z التي تكتب على شكل $a+ib$ حيث a و b عددين حقيقيين و نكتب :

$$\mathbb{C}=\left\{a+i\,b \;:\; (a\,;b)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R} \text{ و } i^2=-1\right\}$$

3 – الشكل الجبري لعدد عقدي :

➢ كل عدد عقدي z يكتب بكيفية وحيدة هي $z=a+ib$ حيث a و b عددين حقيقيين و تسمى الشكل الجبري ل z (الشكل الديكارتي).

➢ العدد الحقيقي a يسمى الجزء الحقيقي ل z و نكتب $a=\mathcal{R}e(z)$.

➢ العدد الحقيقي b يسمى الجزء التخيلي ل z و نكتب $b=\mathcal{I}m(z)$.

➢ $z=a+ib=\mathcal{R}e(z)+i\,\mathcal{I}m(z)$

➢ إذا كان $z=ib$ حيث $b\in\mathbb{R}^*$ فإن z يسمى عددا تخيليا صرفا.

➢ يرمز لمجموعة الأعداد التخيلية الصرفة ب $i\mathbb{R}^*$.

4 – تساوي عددين عقديين :

لكل عددين عقديين z و z'،

$$z=0 \iff \mathcal{R}e(z)=0 \text{ و } \mathcal{I}m(z)=0$$

$$z=z' \iff \begin{cases}\mathcal{R}e(z)=\mathcal{R}e(z')\\ \mathcal{I}m(z)=\mathcal{I}m(z')\end{cases}$$

II - التمثيل الهندسي لعدد عقدي :

في كل ما يلي، المستوى $(\mathcal{P})$ مزود بمعلم متعامد ممنظم $(O\,;\vec{e_1}\,;\vec{e_2})$.

1 – نشاط :

نعتبر التقابل f المعرف من $\mathbb{C}$ نحو $(\mathcal{P})$ ب : $f(a+ib)=M\binom{a}{b}$

أنشئ في $(O\,;\vec{e_1}\,;\vec{e_2})$،

$A=f(1+i)$ $\quad B=f(-1)$ $\quad C=f(4i)$

$D=f(-3-2i)$ $\quad E=f\left(2-\frac{3}{2}i\right)$ $\quad F=f(-2+i)$

2 – تسميات :

➢ المستوى $(\mathcal{P})$ يسمى المستوى العقدي.

➢ محور الأفاصيل الموجه ب $\vec{e_1}$ يسمى المحور الحقيقي.

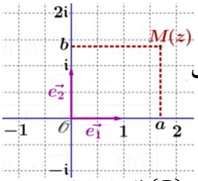
➢ محور الأراتيب الموجه ب $\vec{e_2}$ يسمى المحور التخيلي.

➢ كل عدد عقدي شكله الجبري هو $z=a+ib$ يوافقه نقطة وحيدة $M\binom{a}{b}$ من المستوى العقدي $(\mathcal{P})$.

➢ كل نقطة $M\binom{x}{y}$ من المستوى العقدي $(\mathcal{P})$ يوافقها عدد عقدي وحيد شكله الجبري هو $z=x+iy$.

➢ النقطة M تسمى صورة z و z يسمى لَحِق M و نكتب :

$$M(z) \qquad \text{و} \qquad \mathit{aff}(M)=z$$



➢ إذا كان $z=a+ib$ هو الشكل الجبري للعدد العقدي z فإن الزوج $(a\,;\,b)$ يسمى الشكل المتجهي ل z ونكتب $z=(a\,;\,b)$.

3 – لحق متجهة :

➢ إذا كانت $M(z)$ نقطة من المستوى العقدي $(\mathcal{P})$ فإن لحق المتجهة $\overrightarrow{OM}$ هو z و نكتب :

$$\overrightarrow{OM}(z) \qquad \text{و} \qquad \mathit{aff}\left(\overrightarrow{OM}\right)=z$$

➢ إذا كانت $A(z_A)$ و $B(z_B)$ نقطتين من المستوى العقدي $(\mathcal{P})$ فإن لحق المتجهة $\overrightarrow{AB}$ هو z_B-z_A و نكتب :

$$\overrightarrow{AB}(z_B-z_A) \qquad \text{و} \qquad \mathit{aff}\left(\overrightarrow{AB}\right)=z_B-z_A$$

III - العمليات على الأعداد العقدية :

1 – قواعد الحساب :

لكل عدد حقيقي λ و لكل عددين عقديين z و z' بحيث :

$$z=a+ib \text{ و } z'=a'+ib' \text{ و } (a\,;b\,;a'\,;b')\in\mathbb{R}^4$$

01. $z+z'=(a+a')+i\,(b+b')$

02. $z-z'=(a-a')+i\,(b-b')$

03. $\lambda z=(\lambda a)+i\,(\lambda b)$

04. $z\times z'=(aa'-bb')+i\,(ab'+a'b)$

05. $(a+ib)(a-ib)=a^2+b^2 \in\mathbb{R}^+$

06. $z\neq 0 \Rightarrow \frac{1}{z}=\frac{a}{a^2+b^2}+i\frac{-b}{a^2+b^2}$

07. $z\neq 0 \Rightarrow \frac{z'}{z}=\frac{aa'+bb'}{a^2+b^2}+i\frac{ab'-a'b}{a^2+b^2}$

2 – تطبيقات :

أكتب الأعداد التالية على شكلها الجبري :

$z_1=(3i-5)(1+2i)$ $\qquad z_2=(4-3i)^2$

$z_3=\frac{i+1}{2+i}-\frac{4}{2-i}$ $\qquad z_4=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{10}$

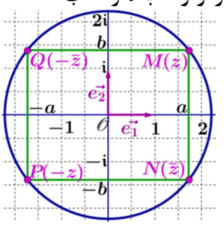
IV - مرافق عدد عقدي :

1 – تعريف :

ليكن $z=a+ib$ عددا عقديا بحيث $(a\,;b)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}$.

العدد العقدي $a-ib$ يسمى مرافق العدد z و نرمز له ب $\overline{z}$ و نكتب :

$$\overline{z}=a-ib$$



2 – ملاحظة :

إذا كانت $M(z)$ نقطة من المستوى العقدي $(\mathcal{P})$ فإن النقطة $N(\overline{z})$ هي مماثلة M بالنسبة للمحور الحقيقي.

3 – خاصيات :

لكل عدد حقيقي λ و لكل عددين عقديين z و z' بحيث :

$z = a + ib$ و $z' = a' + ib'$ و $(a\,;b\,;a'\,;b') \in \mathbb{R}^4$

01. $\overline{\overline{z}} = z$

02. $z + \overline{z} = 2a = 2\mathcal{R}e(z)$

03. $z - \overline{z} = 2b\,i = 2\mathcal{I}m(z)\,i$

04. $z \times \overline{z} = a^2 + b^2 = |z|^2 \quad \in \mathbb{R}^+$

05. $z \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{z\overline{z}} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$

06. $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$

07. $\overline{z - z'} = \overline{z} - \overline{z'}$

08. $\overline{\lambda \times z} = \lambda \times \overline{z}$

09. $\overline{z \times z'} = \overline{z} \times \overline{z'}$

10. $z \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \overline{\left(\frac{z'}{z}\right)} = \frac{\overline{z'}}{\overline{z}}$

11. $\forall\, n \in \mathbb{Q}^*, \quad \overline{z^n} = (\,\overline{z}\,)^n$

4 – مبرهنة :

لكل عدد عقدي z،

01. $\mathcal{R}e(z) = \frac{z+\overline{z}}{2}$ و $\mathcal{I}m(z) = \frac{z-\overline{z}}{2\,i}$

02. $z \in \mathbb{R} \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{I}m(z) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \overline{z} = z$

03. $z \in i\mathbb{R} \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{R}e(z) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \overline{z} = -z$

5 – تطبيقات :

أثبت و بدون حساب العددين أن :

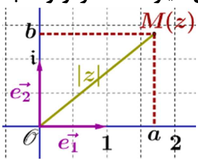
$z_1 = \frac{2-3i}{2+3i} + \frac{2+3i}{2-3i} \in \mathbb{R} \qquad z_2 = (5+4i)^3 - (5-4i)^3 \in i\mathbb{R}$

V - معيار عدد عقدي :

1 – تعريف :

ليكن $z = a + ib$ عددا عقديا بحيث $(a\,;b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

➢ العدد الحقيقي الموجب $\sqrt{a^2+b^2}$ يسمى معيار العدد z و نرمز له ب $|z|$ و نكتب $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$.



➢ هندسيا، معيار العدد العقدي z هو $|z| = OM$ بحيث $M(z)$.

2 – ملاحظات :

➢ لكل عدد عقدي z، $|z| = \sqrt{z \times \overline{z}}$

➢ إذا كانت $A(z_A)$ و $B(z_B)$ نقطتين من المستوى العقدي $(\mathcal{P})$ فإن :

$AB = \|\overrightarrow{AB}\| = |aff(\overrightarrow{AB})| = |z_B - z_A|$

3 – خاصيات :

لكل عدد حقيقي λ و لكل عددين عقديين z و z'،

01. $|\overline{z}| = |z| = \sqrt{(\mathcal{R}e(z))^2 + (\mathcal{I}m(z))^2}$

02. $|i| = 1$

03. $|z + z'| \leq |z| + |z'|$ المتفاوتة المثلثية :

04. $|\lambda\, z| = |\lambda| \times |z|$

05. $|z \times z'| = |z| \times |z'|$

06. $z \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{z'}{z}\right| = \frac{|z'|}{|z|}$

07. $\forall\, n \in \mathbb{Q}^*, \quad |z^n| = |z|^n$

08. $|z| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z = 0$

09. $|z| = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \overline{z} = \frac{1}{z}$

10. $\mathcal{R}e(z) \leq |z|$ و $\mathcal{I}m(z) \leq |z|$

11. $|z| \leq |\mathcal{R}e(z)| + |\mathcal{I}m(z)|$

4 – تطبيقات :

01. أحسب : $|(1+i)^{10}| \qquad |4-3i|$

02. أحسب المسافة AB علما أن $A(1+i)$ و $B(-3+2i)$.

VI - عمدة و شكل مثلثي لعدد عقدي :

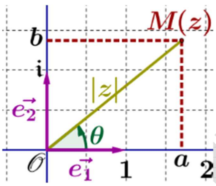
في كل ما يلي، $(\mathcal{P})$ مزود بمعلم متعامد ممنظم مباشر $(O\,;\vec{e_1}\,;\vec{e_2})$.

1 – تعريف :

➢ لكل عدد عقدي غير منعدم $z = a + ib$ بحيث $(a\,;b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

يوجد عددين حقيقيين r و θ بحيث :

$$\begin{cases} r = |z| \\ \cos(\theta) = \frac{a}{|z|} = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \sin(\theta) = \frac{b}{|z|} = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{cases}$$



➢ كل عدد حقيقي على شكل $\theta + 2k\pi$ حيث $k \in \mathbb{Z}$ يسمى عمدة العدد العقدي z و يرمز له ب $\arg(z)$ و نكتب :

$\arg(z) = \theta + 2k\pi \quad ; k \in \mathbb{Z}$ أو $\arg(z) \equiv \theta\ [2\pi]$

➢ يمكن كتابة العدد العقدي z :

❖ على شكل مثلثي : $z = r\,(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$

❖ كتابة أسية : $z = r\,e^{i\theta}$

❖ كتابة بالمعقوفات : $z = [r\,;\theta] = r\angle\theta$

2 – ملاحظات :

➢ ليس للعدد العقدي 0 عمدة.

➢ لكل عدد حقيقي θ، $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$

3 – المتجهات و العمدة :

➢ إذا كانت $M(z)$ نقطة من المستوى العقدي $(\mathcal{P})$ فإن عمدة z هو :

$$z \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \arg(z) \equiv \left(\widehat{\vec{e_1}\,;\overrightarrow{OM}}\right) [2\pi]$$

➢ إذا كانت $A(z_A)$ و $B(z_B)$ نقطتين مختلفتين من $(\mathcal{P})$ فإن :

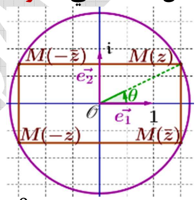
$$\left(\widehat{\vec{e_1}\,;\overrightarrow{AB}}\right) \equiv \arg(z_B - z_A)\ [2\pi]$$

➢ إذا كانت $\vec{u}(z_{\vec{u}})$ و $\vec{v}(z_{\vec{v}})$ متجهتين غير منعدمتين من المستوى المتجهي العقدي فإن :

$$\left(\widehat{\vec{u}\,;\vec{v}}\right) \equiv \arg(z_{\vec{v}}) - \arg(z_{\vec{u}})\ [2\pi] \equiv \arg\left(\frac{z_{\vec{v}}}{z_{\vec{u}}}\right)\ [2\pi]$$

4 – خاصيات :

لكل عدد حقيقي λ غير منعدم و لكل عددين عقديين غير منعدمين z و z'،



01. $\arg(\bar{z}) \equiv -\arg(z)\ [2\pi]$

02. $\arg(-z) \equiv \arg(z) + \pi\ [2\pi]$

03. $\arg(-\bar{z}) \equiv \pi - \arg(z)\ [2\pi]$

04. $\begin{cases} \arg(\lambda z) \equiv \arg(z)\ [2\pi] & si\ \lambda > 0 \\ \arg(\lambda z) \equiv \arg(z) + \pi\ [2\pi] & si\ \lambda < 0 \end{cases}$

05. $\arg\left(\frac{1}{z}\right) \equiv -\arg(z)\ [2\pi]$

06. $\arg(z \times z') \equiv \arg(z) + \arg(z')\ [2\pi]$

07. $\arg\left(\frac{z'}{z}\right) \equiv \arg(z') - \arg(z)\ [2\pi]$

08. $\forall\, n \in \mathbb{Q}^*,\ \ \arg(z^n) \equiv n\arg(z)\ [2\pi]$

09. $z = z' \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} |z| = |z'| \\ \arg(z) \equiv \arg(z')\ [2\pi] \end{cases}$

5 – نتائج :

لكل عدد جذري n و لكل عدد عقدي غير منعدم $z = [r\,;\theta]$،

➢ $z^n = [r^n\,;\,n\theta] = r^n(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)) = r\,e^{in\theta}$

مع : $r = |z|$ و $\theta \equiv \arg(z)\ [2\pi]$

➢ صيغة موافر : $(\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$

6 – العلاقة بين العمدة و بعض المجموعات :

$z \in \mathbb{R}_+^* \Leftrightarrow \arg(z) \equiv 0\ [2\pi]$	$z \in i\mathbb{R}_+^* \Leftrightarrow \arg(z) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$
$z \in \mathbb{R}_-^* \Leftrightarrow \arg(z) \equiv \pi\ [2\pi]$	$z \in i\mathbb{R}_-^* \Leftrightarrow \arg(z) \equiv -\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$
$z \in \mathbb{R}^* \Leftrightarrow \arg(z) \equiv 0\ [\pi]$	$z \in i\mathbb{R}^* \Leftrightarrow \arg(z) \equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi]$

7 – تطبيقات :

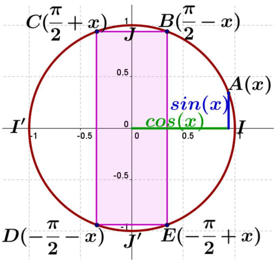
أكتب الأعداد التالية كتابة بالمعقوفات :

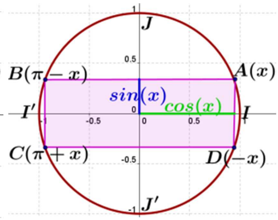
$z_1 = -13$ $\qquad z_2 = 7$

$z_3 = \frac{4}{5}i$ $\qquad z_4 = -2i$

8 – ملخص لبعض صيغ تحويل مثلثية :

لكل عدد حقيقي x،





$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x) \qquad \cos(\pi - x) = -\cos(x)$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x) \qquad \sin(-x) = -\sin(x)$$

9 – تطبيقات :

أكتب الأعداد التالية على شكل مثلثي و أسي و بالمعقوفات :

$z_1 = 5 + 5i$ $\qquad z_2 = 1 - i$

$z_3 = -\sqrt{3} - i$ $\qquad z_4 = -\sqrt{2} + \sqrt{6}\,i$

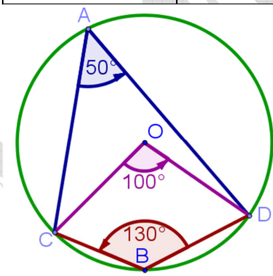
$z_5 = 4 + 3i$ $\qquad z_6 = \sin\left(\frac{\pi}{7}\right) + i\cos\left(\frac{\pi}{7}\right)$

VII - تأويلات هندسية :

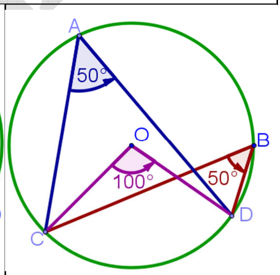
1 – ملخص :

هندسيا	عقديا
$\overrightarrow{AB}$	$aff(\overrightarrow{AB}) = z_B - z_A$
$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$	$z_B - z_A = z_D - z_C$
I منتصف $[AB]$	$z_I = \frac{z_A + z_B}{2}$
$ABCD$ متوازي أضلاع	$(\neq)\quad z_B - z_A = z_C - z_D \quad (\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC})$
AB	$AB = \|z_B - z_A\|$
M نقطة من واسط القطعة $[AB]$ $A \neq B$	$\|z_M - z_A\| = \|z_M - z_B\| \quad (\Leftrightarrow AM = BM)$
M نقطة من الدائرة $\mathcal{C}(\Omega\,;r)$	$\|z_M - z_\Omega\| = r \quad (\Leftrightarrow \Omega M = r)$
$(\widehat{\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{CD}})$ $A \neq B$ و $C \neq D$	$(\widehat{\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{CD}}) \equiv \arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right)\ [2\pi]$ $(\widehat{\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{CD}}) = \arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) + 2k\pi\,;\ k \in \mathbb{Z}$
$M \in (AB)$ $M \neq A$ و $M \neq B$	$\arg\left(\frac{z_M - z_A}{z_B - z_A}\right) \equiv 0\ [\pi] \ \left(\Leftrightarrow (\widehat{\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AM}}) \equiv 0\ [\pi]\right)$ $\frac{z_M - z_A}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}^* \ \left(\Leftrightarrow \frac{\overline{z_M} - \overline{z_A}}{\overline{z_B} - \overline{z_A}} = \frac{z_M - z_A}{z_B - z_A}\right)$
A و B و C نقط مختلفة مثنى مثنى و مستقيمية	$\arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) \equiv 0\ [\pi] \ \left(\Leftrightarrow (\widehat{\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AC}}) \equiv 0\ [\pi]\right)$ $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}^* \ \left(\Leftrightarrow \frac{\overline{z_C} - \overline{z_A}}{\overline{z_B} - \overline{z_A}} = \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right)$

$(AB)\parallel(CD)$ $A\neq B$ و $C\neq D$	$\arg\left(\frac{z_D-z_C}{z_B-z_A}\right)\equiv 0\,[\pi]\quad\left(\Leftrightarrow\ (\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD}})\equiv 0\,[\pi]\right)$
	$\frac{z_D-z_C}{z_B-z_A}\in\mathbb{R}^*\quad\left(\Leftrightarrow\ \frac{\overline{z_D}-\overline{z_C}}{\overline{z_B}-\overline{z_A}}=\frac{z_D-z_C}{z_B-z_A}\right)$
$(AB)\perp(CD)$ $A\neq B$ و $C\neq D$	$\arg\left(\frac{z_D-z_C}{z_B-z_A}\right)\equiv \frac{\pi}{2}\,[\pi]\quad\left(\Leftrightarrow\ (\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD}})\equiv \frac{\pi}{2}\,[\pi]\right)$
	$\frac{z_D-z_C}{z_B-z_A}\in i\mathbb{R}^*\quad\left(\Leftrightarrow\ \frac{\overline{z_D}-\overline{z_C}}{\overline{z_B}-\overline{z_A}}=-\frac{z_D-z_C}{z_B-z_A}\right)$
M نقطة من الدائرة التي أحد أقطارها $[AB]$ $(A\neq B)$ $M\neq A$ و $M\neq B$	$\arg\left(\frac{z_M-z_B}{z_M-z_A}\right)\equiv \frac{\pi}{2}\,[\pi]\quad\left(\Leftrightarrow (AM)\perp(BM)\right)$
	$\frac{z_M-z_B}{z_M-z_A}\in i\mathbb{R}^*\quad\left(\Leftrightarrow\ \frac{\overline{z_M}-\overline{z_B}}{\overline{z_M}-\overline{z_A}}=-\frac{z_M-z_B}{z_M-z_A}\right)$
A و B و C و D نقط مختلفة مثنى مثنى و (متداورة أو مستقيمية)	$\arg\left(\frac{z_D-z_A}{z_C-z_A}\right)\equiv \arg\left(\frac{z_D-z_B}{z_C-z_B}\right)\,[\pi]$
	$\frac{z_D-z_A}{z_C-z_A}\times\frac{z_C-z_B}{z_D-z_B}\in\mathbb{R}^*$ (⇔ فرق arg)



$(\widehat{\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AD}})+(\widehat{\overrightarrow{BD};\overrightarrow{BC}})\equiv\pi\,[2\pi]$



$(\widehat{\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AD}})\equiv(\widehat{\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BD}})\,[2\pi]$

2 – تطبيقات :

نعتبر في المستوى العقدي النقط :

$A\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\qquad B\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$E(1+i)\qquad F(3+2i)\qquad H(-1+5i)$

01. بين أن OAB مثلث متساوي الأضلاع.

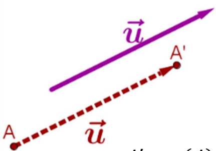
02. أثبت أن EFH مثلث قائم الزاوية في E.

03. حدد النقطة $K(z_K)$ من المستوى العقدي التي من أجلها يكون الرباعي $AKEF$ متوازي أضلاع.

VIII - تحويلات إعتيادية في المستوى العقدي :

1 – الإزاحة :

a – تذكير :



لتكن τ إزاحة متجهتها $\vec{u}$.

لكل نقطتين A و A' من مستوى،

$A'=\tau(A)\quad\Leftrightarrow\quad\overrightarrow{AA'}=\vec{u}$

b – التمثيل العقدي للإزاحة :

لتكن τ إزاحة متجهتها $\vec{u}(z_{\vec{u}})$.

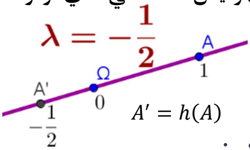
لكل نقطتين $A(z)$ و $A'(z')$ من المستوى العقدي،

$A'=\tau(A)\quad\Leftrightarrow\quad z'=z+z_{\vec{u}}$

2 – التحاكي :

a – تذكير :

ليكن λ عددا حقيقيا و Ω نقطة من مستوى و ليكن h التحاكي الذي مركزه Ω و نسبته λ.



لكل نقطتين A و A'،

$A'=h(A)\quad\Leftrightarrow\quad\overrightarrow{\Omega A'}=\lambda\,\overrightarrow{\Omega A}$

b – التمثيل العقدي للتحاكي :

ليكن λ عددا حقيقيا و $\Omega(z_\Omega)$ نقطة من المستوى العقدي و ليكن h التحاكي الذي مركزه Ω و نسبته λ.

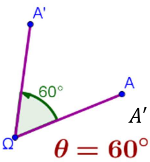
لكل نقطتين $A(z)$ و $A'(z')$ من المستوى العقدي،

$A'=h(A)\quad\Leftrightarrow\quad z'=z_\Omega+\lambda\,(z-z_\Omega)$

3 – الدوران :

a – تذكير :

ليكن θ عددا حقيقيا و Ω نقطة من مستوى و ليكن r الدوران الذي مركزه Ω و زاويته θ.



لكل نقطتين A و A' بحيث $A\neq\Omega$،

$$A'=r(A)\Leftrightarrow\begin{cases}\Omega A'=\Omega A\\ (\widehat{\overrightarrow{\Omega A};\overrightarrow{\Omega A'}})=\theta+2k\pi\ ;\ k\in\mathbb{Z}\end{cases}$$

b – التمثيل العقدي للدوران :

ليكن θ عددا حقيقيا و $\Omega(z_\Omega)$ نقطة من المستوى العقدي و ليكن r الدوران الذي مركزه Ω و زاويته θ.

لكل نقطتين $A(z)$ و $A'(z')$ من المستوى العقدي بحيث $A\neq\Omega$ ،

$$A'=r(A)\quad\Leftrightarrow\quad\begin{cases}|z'-z_\Omega|=|z-z_\Omega|\\ \arg\left(\frac{z'-z_\Omega}{z-z_\Omega}\right)=\theta+2k\pi\ ;\ k\in\mathbb{Z}\end{cases}$$

$$A'=r(A)\quad\Leftrightarrow\quad z'=z_\Omega+(z-z_\Omega)\,e^{i\theta}$$

4 – تقنية و تطبيقات :

a – تقنية :

نعتبر في المستوى العقدي التحويل Γ الذي تمثيله العقدي هو :

$$z'=a\,z+b$$

حيث a و b و z و z' أعداد عقدية و $a\neq0$.

$a=1\quad\Rightarrow\quad\Gamma$ إزاحة متجهتها $\vec{u}(b)$.

$a\in\mathbb{R}^*\backslash\{1\}\quad\Rightarrow\quad\Gamma$ تحاكي مركزه $\Omega\left(\frac{b}{1-a}\right)$ و نسبته a.

$|a|=1$ و $a\notin\mathbb{R}\quad\Rightarrow\quad\Gamma$ دوران مركزه $\Omega\left(\frac{b}{1-a}\right)$ و زاويته $\arg(a)$.

b – تطبيقات :

نعتبر في المستوى العقدي النقطتين $M(z)$ و $M'(z')$ حيث M' هي صورة M بتحويل Γ. حدد حسب كل حالة مما يلي التحويل Γ مع ذكر مميزاته:

01. $z+5z'=3+4i$

02. $z-z'=7i-1$

03. $z=iz'+2-i$

: Série d'exercices :
Les nombres complexes

le plan complexe $(\mathcal{P})$ est munit d'un repère orthonormé direct $(O\,;\overrightarrow{e_1}\,;\overrightarrow{e_2})$.

Exercice 01 : www.l9adi.com

01. Donner une forme exponentielle de : $z_1 = (1+i)^{17}$

02. Déterminer z_2 tel que :

$$z_1 z_2 = 256\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right)$$

03. En déduire la valeur de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

Posons : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ z_n = (z_2)^n$

04. Déterminer les valeurs de n pour que :

a. z_n soit réel. b. z_n soit imaginaire pur

Exercice 02 : www.naja7math.com

Considérons le nombre complexe : $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

01. Vérifier que : $j^2 + j + 1 = 0$

02. En déduire : $j^3 = 1$

03. Calculer la somme : $S = 1 + j + j^2 + j^3 + \cdots + j^{101}$

04. Donner une écriture exponentielle du nombre j.

05. Représenter j dans un cercle trigonométrique.

06. En déduire :

a. $\overline{j} = \frac{1}{j} = -j - 1 = j^2$

b. $\forall\, z \in \mathbb{C},\ z^2 + z + 1 = (z - j)(z - j^2)$

Exercice 03 : National 2008

01. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - 6z + 34 = 0$

Considérons dans le plan $(\mathcal{P})$ les points A, B et C dont les affixes respectivement :

$$a = 3 + 5i \qquad b = 3 - 5i \qquad c = 7 + 3i$$

Soient z l'affixe du point M du plan $(\mathcal{P})$ et z' l'affixe de M' l'image de M par la translation τ de vecteur $\vec{u}$ d'affixe :

$$z_{\vec{u}} = 4 - 2i$$

02. Montrer que : $z' = z + 4 - 2i$

03. Vérifier que C est l'image de A par cette translation.

04. Prouver que : $\frac{b-c}{a-c} = 2i$

05. En déduire que ABC est un triangle rectangle et que $BC = 2AC$.

Exercice 04 : www.l9adi.com

Considérons dans le plan $(\mathcal{P})$ les points A, B et C dont les affixes respectivement :

$$a = 1 + \sqrt{3}\,i \qquad b = -\sqrt{3} + i \qquad c = 2 - 2\sqrt{3}\,i$$

01. Donner une forme trigonométrique de a, b et c.

02. En déduire une forme trigonométrique de $\frac{1}{a}$ et $b \times c$ en suite $\left(\frac{c}{4}\right)^{2013}$ sous sa forme algébrique.

03. Donner une mesure algébrique de l'angle : $(\widehat{\overrightarrow{OA}\,;\overrightarrow{OB}})$.

04. En déduire la nature du triangle OAB.

05. Déterminer l'affixe du point D du plan $(\mathcal{P})$ pour que $OADB$ soit un carré.

Considérons la transformation Γ dont sa représentation complexe est : $z' - 4z = 6 - 3i$

06. Montrer que Γ est une homothétie en déterminant ses caractéristiques $(\Omega\,;\lambda)$.

07. Donner a' l'affixe du point A' l'image de A par Γ.

08. Que peut – on dire des point A, A' et Ω ?

Exercice 05 : National 2011

01. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - 18z + 82 = 0$

Considérons dans le plan $(\mathcal{P})$ les points A, B et C dont les affixes respectivement :

$$a = 9 + i \qquad b = 9 - i \qquad c = 11 - i$$

02. Montrer que : $\frac{c-b}{a-b} = -i$

03. En déduire que ABC est un triangle rectangle et isocèle en B.

04. Donner une forme trigonométrique du nombre complexe : $4(1-i)$

05. Montrer que : $(c-a)(c-b) = 4(1-i)$

06. En déduire que : $AC \times BC = 4\sqrt{2}$

Soient z l'affixe du point M du plan $(\mathcal{P})$ et z' l'affixe de M' l'image de M par la rotation r de centre B et d'angle $\frac{3\pi}{2}$.

07. Démontrer que : $z' = -iz + 10 + 8i$

08. Vérifier que l'affixe de C' l'image de C par cette rotation est : $9 - 3i$

الدوال الأسية
FONCTIONS EXPONENTIELLES

I - دالة الأس النبيري :

1 – تعريف :

➢ الدالة ln متصلة و تزايدية قطعا على $\mathbb{R}_+^*$ فهي تقابل من $\mathbb{R}_+^*$ نحو $\mathbb{R}$ و دالتها العكسية تسمى الدالة الأسية النبيرية و يرمز لها ب exp.

➢ بتعبير آخر، $\forall\ (x;y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*,\ exp(x) = y \ \Leftrightarrow\ x = ln(y)$

2 – دراسة أولية :

➢ الدالة exp دالة متصلة على $\mathbb{R}$.

(لأنها دالة عكسية لدالة متصلة على $\mathbb{R}_+^*$)

➢ الدالة exp دالة تزايدية قطعا على $\mathbb{R}$.

(لأنها دالة عكسية لدالة تزايدية قطعا $\mathbb{R}_+^*$)

x	$-\infty$	$+\infty$
$exp(x)$	0 ↗	$+\infty$
$exp(x)$	$+$	

➢ الدالة exp موجبة قطعا على $\mathbb{R}$: $\forall\ x \in \mathbb{R},\quad 0 < exp(x)$

3 – إصطلاح :

$$\forall\ x \in \mathbb{R},\qquad exp(x) = e^x \qquad (\simeq (2.7182\ldots)^x)$$

4 – خاصيات :

لكل r من $\mathbb{R}$ و لكل x و y من $\mathbb{R}$،

01. $e^{x+y} = e^x \times e^y$

02. $e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}$

03. $\frac{1}{e^y} = e^{-y}$

04. $(e^x)^r = e^{rx}$

05. $\forall\ n \in \mathbb{N}\backslash\{0\,;1\},\ \sqrt[n]{e^x} = e^{\frac{x}{n}}$

06. $e^x = e^y \quad\Leftrightarrow\quad x = y$

07. $e^x < e^y \quad\Leftrightarrow\quad x < y$

5 – نتائج :

01. $\forall\ x \in \mathbb{R},\quad ln(e^x) = x$

02. $\forall\ x \in \mathbb{R}_+^*,\quad e^{ln(x)} = x$

03. $\forall\ (a;b) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R},\ a^b = e^{b\times ln(a)}$

04. $\forall\ x \in \mathbb{R},\quad 1^x = 1$

05. $\forall\ (a;b) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R},\quad ln(a^b) = b \times ln(a)$

II - دراسة الدالة exp :

1 – نشاط :

لتكن f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة جيدا على $\mathbb{R}$ ب :

$$\forall\ x \in \mathbb{R},\ \ f(x) = exp(x)$$

و ليكن $(\mathcal{C}')$ منحناها في م.م.م.م. $\mathcal{R}(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

01. مثل المنحنى $(\mathcal{C}')$ في $\mathcal{R}$.

02. حدد مبيانيا :

a. نهايات f عند محدات $\mathbb{R}$.

b. الفروع اللانهائية للمنحنى $(\mathcal{C}')$.

c. النهاية : $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x}$

03. إستنتج قيمة : $\lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x}$

2 – نهايات مهمة :

$$\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} e^x = 0^+$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} x\,e^x = 0^-$$

$$\forall\ r \in \mathbb{R},\ \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^r} = +\infty \qquad \forall\ n \in \mathbb{Z},\ \lim_{x\to-\infty} x^n\,e^x = 0$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$$

3 – المشتقة الأسية – دالة أصلية ل $x \to u'(x)e^{u(x)}$:

لتكن u دالة قابلة للإشتقاق على مجال I.

➢ الدالة exp قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$

و $\forall\ x \in \mathbb{R},\ exp'(x) = exp(x) \qquad ((e^x)' = e^x)$

➢ الدالة $x \to e^{u(x)}$ قابلة للإشتقاق على I

و $\forall\ x \in I\,, (e^{u(x)})' = u'(x)\, e^{u(x)}$

➢ الدوال الأصلية للدالة $x \to u'(x)\, e^{u(x)}$ على المجال I هي الدوال : $x \to e^{u(x)} + \lambda$ حيث λ عدد حقيقي.

III - دالة الأس للأساس a :

1 – تعميم :

ليكن $a \in \mathbb{R}_+^*\backslash\{1\}$.

➢ الدالة log_a متصلة و رتيبة قطعا على $\mathbb{R}_+^*$ فهي تقابل من $\mathbb{R}_+^*$ نحو $\mathbb{R}$ و دالتها العكسية تسمى الدالة الأسية للأساس a و يرمز لها ب exp_a.

➢ بتعبير آخر،

$$\forall\ (x;y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*,\ \ exp_a(x) = y \ \Leftrightarrow\ x = log_a(y)$$

2 – خاصيات :

لكل $a \in \mathbb{R}_+^*\backslash\{1\}$ و لكل r من $\mathbb{R}$ و لكل x و y من $\mathbb{R}$،

01. $exp_a(x) = a^x = e^{x\,ln(a)}$

02. $exp_a(0) = 1$

03. $exp_a(1) = a$

04. $a^{x+y} = a^x \times a^y$

05. $a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y}$

06. $\frac{1}{a^y} = a^{-y}$

07. $(a^x)^r = a^{rx}$

08. $\forall\ n \in \mathbb{N}\backslash\{0\,;1\},\ \sqrt[n]{a^x} = a^{\frac{x}{n}}$

09. $a^x = a^y \quad\Leftrightarrow\quad x = y$

3 – ملحوظة :

لكل $a \in \mathbb{R}_+^*\backslash\{1\}$،

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad 0 < exp_a(x) \quad (0 < a^x)$$

4 – المشتقة الأسية للأساس a :

ليكن $a \in \mathbb{R}_+^*\backslash\{1\}$ و لتكن u دالة عددية معرفة على مجال I.

➢ الدالة exp_a قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و :

$$\forall x \in \mathbb{R}, (exp_a)'(x) = ln(a)\, exp_a(x) \quad ((a^x)' = ln(a)\ a^x)$$

➢ إذا كانت u قابلة للإشتقاق على المجال I فإن الدالة $x \to exp_a(u(x))$ قابلة للإشتقاق على I و لدينا :

$$\forall x \in I, (exp_a(u(x)))' = (a^{u(x)})' = ln(a)\ u'(x)\ a^{u(x)}$$

➢ الدوال الأصلية للدالة $x \to u'(x)\ a^{u(x)}$ على المجال I هي الدوال : $x \to \frac{1}{\ln(a)}\ a^{u(x)} + \lambda$ حيث λ عدد حقيقي.

5 – رتابة دالة الأس للأساس a :

ليكن $a \in \mathbb{R}_+^*\backslash\{1\}$.

الدالة exp_a تزايدية قطعا على $\mathbb{R}$ $\Leftrightarrow$ $1 < a$

الدالة exp_a تناقصية قطعا على $\mathbb{R}$ $\Leftrightarrow$ $0 < a < 1$

6 – التمثيل المبياني للدالة $\exp_a$:

أنشئ منحنى الدالتين $f : x \to exp_{\sqrt{2}}(x)$ و $g : x \to exp_{\frac{1}{2}}(x)$ في م.م.م.م.م.

: Série d'exercices :
Fonction exponentielle népérien

Réf : www.naja7math.com + …

Exercice 01 :

Résoudre dans $\mathbb{R}$,

$(E_1) : e^x - \dfrac{3}{e^x} - 2 = 0$ $\qquad$ $(E_2) : 2^x = 3^{1-2x}$

$(I_1) : e^{x+1} - e^{-x} \geq 0$ $\qquad$ $(I_2) : 2\, e^{2x} - 3e^x + 1 < 0$

Exercice 02 :

Donner l'expression de la dérivée de f selon chaque cas :

$f_1(x) = ln(1 + e^x)$ $\qquad$ $f_2(x) = e^{3x^2 - 9x + 5}$

$f_3(x) = ln(x)\, e^{\sqrt{x}}$ $\qquad$ $f_4(x) = x^x$

Exercice 03 :

Déterminer les limites suivantes :

$a = \lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt{-x}\, e^x$ $\qquad$ $b = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^{\sqrt{x}} + 5}{e^x - 10}$

$c = \lim\limits_{x \to 0^+} (e^x - 1)\, ln(x)$ $\qquad$ $d = \lim\limits_{x \to 0^+} x^{\sqrt{x}}$

Exercice 04 : National 1997

Considérons la fonction f à variable réelle définie par :

$$\begin{cases} f(x) = e^{2x} - 2x - 1 & si \quad x \leq 0 \\ f(x) = x(ln(x) - 1)^2 & si \quad x > 0 \end{cases}$$

Soit $(\mathcal{C}_f)$ la représentation graphique de f dans un repère orthonormée $\mathcal{R}(O\,; \vec{\imath}\,; \vec{\jmath})$ tel que : $\|\vec{\imath}\| = 2\ cm$.

01. Montrer que : $\quad lim_{x \to 0^+}\, x\, ln^2(x) = 0 \quad (pose\ x = t^2)$

02. Prouver que f est continue au point $x_0 = 0$.

03. Etudier la dérivabilité de f au point précédent.

04. Calculer les limites de f au bornes de $\mathbb{R}$.

05. Calculer $f'(x)$ sur $\mathbb{R}^*$.

06. Etudier le sens de variation de f sur $\mathbb{R}^*$.

07. Dresser le tableau de variation de f.

08. Etudier les branches infinies de $(\mathcal{C}_f)$.

09. Démontrer que $A\binom{1}{1}$ est un point d'inflexion de $(\mathcal{C}_f)$.

10. Dessiner $(\mathcal{C}_f)$.

حساب التكاملات
CALCUL DES INTÉGRALES

I - تكامل دالة متصلة على مجال :

1 – تعريف :

لتكن f دالة متصلة على مجال I و F دالة أصلية للدالة f على I و ليكن a و b عنصرين من المجال I.

➢ العدد الحقيقي $F(b) - F(a)$ يسمى تكامل الدالة f من a إلى b و يرمز له ب $\int_a^b f(x)\,dx$ و نكتب :

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

و يقرأ : "تكامل من a إلى b ل $f(x)\,dx$"

➢ العددان a و b يسميان محدا التكامل $\int_a^b f(x)\,dx$.

2 – ملحوظة :

قيمة التكامل $\int_a^b f(x)\,dx$ لا تتغير إذا غيرنا إسم المتغير :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f(y)\,dy = \cdots$$

3 – تطبيقات :

أحسب التكاملات التالية :

$$I = \int_2^1 \frac{1}{x}\,dx \qquad J = \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{5}} t^3\,dt \qquad K = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(\theta)\,d\theta$$

II - خاصيات التكامل :

1 – خاصية :

إذا كانت f دالة متصلة على مجال I يحتوي عددا حقيقيا a فإن الدالة $H : x \to \int_a^x f(t)\,dt$ هي الدالة الأصلية للدالة f على المجال I التي تنعدم في a.

بتعبير آخر، $\forall\, x \in I,\ \ H'(x) = f(x)$ و $H(a) = 0$

2 – خاصيات : (علاقة شال – الخطانية ...)

ليكن λ عددا حقيقيا و لتكن f و g دالتين متصلتين على مجال I.

لكل a و b من المجال I،

01. $\int_a^a f(x)\,dx = 0$

02. $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$

علاقة شال : لكل a و b و c من المجال I،

03. $\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx$

الخطانية :

04. $\int_a^b \lambda\, f(x)\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx$

05. $\int_a^b f(x) + g(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$

3 – تطبيقات :

أحسب التكاملين التاليين :

$$I = \int_1^2 \frac{x^2}{x+1}\,dx \qquad J = \int_{-2}^3 |5t - 4|\,dt$$

4 – التكامل و الترتيب :

لتكن f و g دالتين متصلتين على مجال I و ليكن a و b من المجال I.

01. $\left\{\begin{matrix} a \le b \\ 0 \le f \ (\text{موجبة على } [a\,;b]) \end{matrix}\right\} \Rightarrow 0 \le \int_a^b f(x)\,dx$

02. $\left\{\begin{matrix} a \le b \\ f \le 0 \ (\text{سالبة على } [a\,;b]) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \le 0$

03. $\left\{\begin{matrix} a \le b \\ g \le f \ \text{على } [a\,;b] \end{matrix}\right\} \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx$

04. $a \le b \Rightarrow \left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx$

متفاوتة المتوسط :

05. $\left\{\begin{matrix} a \le b \\ m = \min_{x\in[a\,;b]} f(x) \\ M = \max_{x\in[a\,;b]} f(x) \end{matrix}\right\} \Rightarrow m\,(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M\,(b-a)$

5 – القيمة المتوسطة :

لتكن f دالة متصلة على المجال $[a\,;b]$ بحيث $a < b$.

➢ العدد الحقيقي $\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$ يسمى القيمة المتوسطة للدالة f على المجال $[a\,;b]$.

➢ يوجد على الأقل عدد حقيقي c من المجال $[a\,;b]$ بحيث :

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\,f(c)$$

6 – تطبيق :

01. أحسب μ القيمة المتوسطة للدالة : $f : x \to \frac{1}{\sqrt{x+3}}$ على $[-2\,;6]$.

02. حدد قيمة c من $[-2\,;6]$ بحيث $f(c) = \mu$.

III - تقنيات حساب التكامل :

1 – إستعمال الدوال الأصلية :

a – نشاط :

أحسب التكامل : $I = \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{1}{\tan(x)}\,dx$

2 – المكاملة بالأجزاء :

a – مبرهنة :

لتكن u و v دالتين قابلتين للإشتقاق على المجال $[a\,;b]$ و u' و v' متصلتين على $[a\,;b]$.

$$\int_a^b u(x)\,v'(x)\,dx = [u(x)\,v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)\,v(x)\,dx$$

b – تطبيقات :

بإستعمال المكاملة بالأجزاء، أحسب التكاملين التاليين :

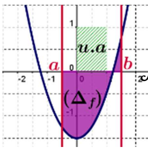
$$I = \int_1^e \ln(x)\,dx \qquad J = \int_0^{\pi/2} x\cos(x)\,dx$$

IV - حساب المساحات :

في كل ما يلي :

- ➢ المستوى منسوب إلى معلم متعامد $\mathcal{R}(O\,;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath})$.
- ➢ f دالة متصلة على المجال $[a\,;b]$ $(a<b)$.
- ➢ (Δ_f) الحيز المستوي المحدد بالمنحنى $(\mathcal{C}_f)$ و محور الأفاصيل و المستقيمان اللذان معادلتهما : $x=a$ و $x=b$.

1 – مساحة الحيز (Δ_f) :



مساحة الحيز (Δ_f) هي :

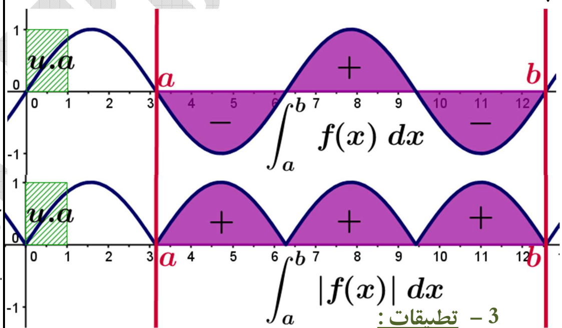
$$\mathcal{A}(\Delta_f)=\left(\int_a^b |f(x)|\,dx\right)\,u.a.$$

حيث $u.a.$ هي وحدة قياس المساحة :

$$u.a.=\|\vec{\imath}\,\|\times\|\vec{\jmath}\|$$

2 – التأويل الهندسي للعدد $\int_a^b f(x)\,dx$:

- ➢ العدد الحقيقي الموجب $\int_a^b |f(x)|\,dx$ يسمى المساحة الهندسية للحيز (Δ_f) ب $u.a.$.
- ➢ العدد الحقيقي $\int_a^b f(x)\,dx$ يسمى المساحة الجبرية للحيز (Δ_f) ب $u.a.$.



3 – تطبيقات :

المستوى منسوب إلى معلم متعامد $\mathcal{R}(O\,;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath})$ بحيث :

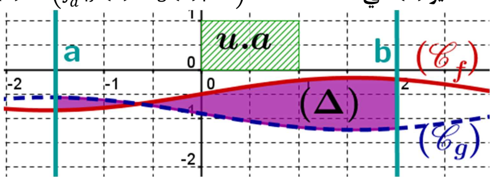
$\|\vec{\imath}\,\|=2\,cm$ $\qquad$ $\|\vec{\jmath}\,\|=3\,cm$

أحسب ب cm^2 المساحة الهندسية و الجبرية ل (Δ_f) الحيز المستوي المحصور بين منحنى الدالة cos في $\mathcal{R}$ و محور الأفاصيل و المستقيمان اللذان معادلتهما : $x=\frac{\pi}{2}$ و $x=2\pi$.

4 – مساحة الحيز المستوي المحصور بين منحنين :

لتكن f و g دالتين متصلتين على المجال $[a\,;b]$ $(a<b)$ و ليكن (Δ) الحيز المستوي المحصور بين المنحنيين $(\mathcal{C}_f)$ و $(\mathcal{C}_g)$ و المستقيمان اللذان معادلتهما : $x=a$ و $x=b$.

مساحة الحيز (Δ) هي : $\mathcal{A}(\Delta)=\left(\int_a^b |f(x)-g(x)|\,dx\right)\,u.a.$



V - حساب الحجوم :

1 – مبرهنة :

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد $\mathcal{R}(O\,;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath}\,;\vec{k})$.

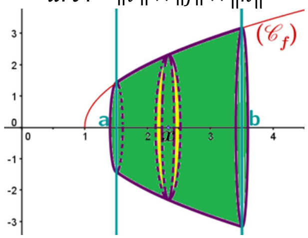
لتكن f دالة متصلة على المجال $[a\,;b]$ $(a<b)$.

حجم الجسم المولد بالدوران حول محور الأفاصيل دورة كاملة للحيز المستوي المحدد بمحور الأفاصيل و منحنى الدالة f و المستقيمان اللذان معادلتهما : $x=a$ و $x=b$ هو :

$$\mathcal{V}_x=\left(\pi\int_a^b (f(x))^2\,dx\right)u.v.$$

حيث $u.v.$ هي وحدة قياس الحجم :

$$u.v.=\|\vec{\imath}\,\|\times\|\vec{\jmath}\|\times\|\vec{k}\|$$



2 – تطبيق :

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد $\mathcal{R}(O\,;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath}\,;\vec{k})$ بحيث :

$\|\vec{\imath}\,\|=2\,cm$ $\qquad$ $\|\vec{\jmath}\,\|=3\,cm$ $\qquad$ $\|\vec{k}\,\|=0.25\,cm$

نعتبر الدالة العددية f المعرفة ب : $\forall\,x\in\mathbb{R}^+,\ \ f(x)=\sqrt[6]{x}$

أحسب ب cm^3 حجم الجسم المولد بالدوران حول محور الأفاصيل دورة كاملة للحيز المستوي المحدد بمحور الأفاصيل و منحنى الدالة f و المستقيمان اللذان معادلتهما : $x=8$ و $x=1$.

: Série d'exercices :
Calcul des intégrales

Exercice 01 :

Calculer les intégrales suivantes :

$$I_1 = \int_{-1}^{2} (x^2+1)^2\, dx \qquad I_2 = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{2x-5}\, dx$$

$$I_3 = \int_{-3}^{0} exp_3(x) + \sqrt{e^x}\, dx \qquad I_4 = \int_e^{e^2} \frac{\ln(x)}{x} - \frac{1}{xln(x)}\, dx$$

$$I_5 = \int_{\ln(2)}^{\ln(3)} \frac{1}{e^x - 1}\, dx \qquad I_6 = \int_1^4 |x^2 - 2x|\, dx$$

Exercice 02 :

Calculer les intégrales suivantes en utilisant l'intégration par partie :

$$I_1 = \int_0^1 (3+2x)e^x\, dx \qquad I_2 = \int_1^e x^2 \ln(x)\, dx$$

$$I_3 = \int_{-1}^{0} x\sqrt{4-x}\, dx \qquad I_4 = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} e^t \cos(2t)\, dt$$

Exercice 03 : National 1994

Posons : $I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{cos(x)} dx \quad et \quad J = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{sin(x)}{cos(x)} dx$

01. Calculer J.

02. Calculer $I - J$. $\left(Observer\ que : \frac{1-sin(x)}{cos(x)} = \frac{cos(x)}{1+sin(x)} \right)$

03. En déduire la valeur de I.

04. En utilisant l'intégration par partie, calculer :

$$K = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos(x).\ln(cos(x))\, dx$$

Exercice 04 :

Calculer l'aire algébrique compris entre l'axe des abscisses, le graphe de la fonction f et les deux droites (D) et (Δ) suivant chaque cas :

$f(x) = \ln(x) - 1 \qquad (D) : x = 1 \qquad (\Delta) : x = e$

$f(x) = \sqrt{x}(\ln(x) - 1) \qquad (D) : x = e \qquad (\Delta) : x = 10$

$f(x) = xe^x \qquad (D) : x = 1 \qquad (\Delta) : x = 2$

: Série d'exercices :
Calcul des intégrales

Exercice 01 :

Calculer les intégrales suivantes :

$$I_1 = \int_{-1}^{2} (x^2+1)^2\, dx \qquad I_2 = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{2x-5}\, dx$$

$$I_3 = \int_{-3}^{0} exp_3(x) + \sqrt{e^x}\, dx \qquad I_4 = \int_e^{e^2} \frac{\ln(x)}{x} - \frac{1}{xln(x)}\, dx$$

$$I_5 = \int_{\ln(2)}^{\ln(3)} \frac{1}{e^x - 1}\, dx \qquad I_6 = \int_1^4 |x^2 - 2x|\, dx$$

Exercice 02 :

Calculer les intégrales suivantes en utilisant l'intégration par partie :

$$I_1 = \int_0^1 (3+2x)e^x\, dx \qquad I_2 = \int_1^e x^2 \ln(x)\, dx$$

$$I_3 = \int_{-1}^{0} x\sqrt{4-x}\, dx \qquad I_4 = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} e^t \cos(2t)\, dt$$

Exercice 03 : National 1994

Posons : $I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{cos(x)} dx \quad et \quad J = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{sin(x)}{cos(x)} dx$

01. Calculer J.

02. Calculer $I - J$. $\left(Observer\ que : \frac{1-sin(x)}{cos(x)} = \frac{cos(x)}{1+sin(x)} \right)$

03. En déduire la valeur de I.

04. En utilisant l'intégration par partie, calculer :

$$K = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos(x).\ln(cos(x))\, dx$$

Exercice 04 :

Calculer l'aire algébrique compris entre l'axe des abscisses, le graphe de la fonction f et les deux droites (D) et (Δ) suivant chaque cas :

$f(x) = \ln(x) - 1 \qquad (D) : x = e \qquad (\Delta) : x = 1$

$f(x) = \sqrt{x}(\ln(x) - 1) \qquad (D) : x = e \qquad (\Delta) : x = 10$

$f(x) = xe^x \qquad (D) : x = 2 \qquad (\Delta) : x = 1$

الأعداد العقدية : الجزء الثاني
LES NOMBRES COMPLEXES

I - معادلات من الدرجة الثانية :

1 – الجذور المربعة لعدد عقدي :

a – نشاط :

حدد الأعداد العقدية z حسب كل حالة مما يلي :

$(E_1) :\ z^2 = 7 \qquad (E_2) :\ z^2 = -5 \qquad (E_3) :\ z^2 = 3+4i$

b – تعريف :

ليكن x و y و α و β و r و θ أعداد حقيقية و z و σ عددين عقديين.

➢ σ جذر مربع للعدد $z \iff \sigma^2 = z$

➢ لكل عدد عقدي غير منعدم جذران مربعان مختلفان و متقابلان.

➢ إذا كان $\sigma = \alpha + i\beta$ و $z = x+iy = [r\,;\theta]$ فإن :

σ جذر مربع ل $z \iff (\alpha+i\beta)^2 = x+iy$

$$\iff \begin{cases} \alpha^2 = \frac{|z|+\mathcal{Re}(z)}{2} = \frac{x+\sqrt{x^2+y^2}}{2} \\ \beta^2 = \frac{|z|-\mathcal{Re}(z)}{2} = \frac{-x+\sqrt{x^2+y^2}}{2} \\ 2\alpha\beta = \mathcal{Im}(z) = y \end{cases}$$

$(r>0) \iff \sigma = \left[\sqrt{r}\,;\frac{\theta}{2}\right]\ ou\ \sigma = \left[\sqrt{r}\,;\frac{\theta}{2}+\pi\right]$

c – تطبيق :

حدد الجذور المربعة للعدد العقدي : $1+2i$

2 – معادلات من الدرجة الثانية في المجموعة $\mathbb{C}$:

a – نشاط :

حل في $\mathbb{C}$ المعادلتين التاليتين :

$(E_1) : z^2 - z + 1 = 0$

$(E_2) :\ z^2 - 6z + 13 = 0$

b – ملخص :

نعتبر في $\mathbb{C}$ المعادلة : $(E): az^2+bz+c=0$

حيث : $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ و $a \neq 0$ و $P(z) = az^2+bz+c$ و $\Delta = b^2-4ac$.

	المعادلة (E)	تعميل $P(z)$ في $\mathbb{C}$
$\Delta < 0$	تقبل حلين عقديين مختلفين و مترافقين هما : $z_1 = \frac{-b+i\sqrt{\lvert\Delta\rvert}}{2a}$ ، $z_2 = \frac{-b-i\sqrt{\lvert\Delta\rvert}}{2a}$	$a(z-z_1)(z-z_2)$
$\Delta = 0$	تقبل حلا حقيقيا وحيدا و مزدوجا هو : $z = \frac{-b}{2a}$	$a\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2$
$\Delta > 0$	تقبل حلين حقيقيين مختلفين و مترافقين هما : $z_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ ، $z_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$	$a(z-z_1)(z-z_2)$

c – مجموع و جداء حلي $az^2+bz+c=0$:

إذا كان z_1 و z_2 حلي المعادلة : $az^2+bz+c=0$ مع $a \neq 0$ فإن :

$z_1 + z_2 = -\frac{b}{a}$ و $z_1 \times z_2 = \frac{c}{a}$

II - صيغ موافر و أولير :

1 – صيغ موافر :

a – مبرهنة :

لكل عدد حقيقي θ و لكل عدد n من $\mathbb{Z}$،

$$(\cos(\theta)+i\sin(\theta))^n = \cos(n\theta)+i\sin(n\theta)$$
$$(\cos(\theta)-i\sin(\theta))^n = \cos(n\theta)-i\sin(n\theta)$$
$$\frac{1}{\cos(n\theta)+i\sin(n\theta)} = \cos(n\theta)-i\sin(n\theta)$$

(نذكر أن : $e^{i\theta} = \cos(\theta)+i\sin(\theta)$)

b – تطبيق :

باستعمال صيغ موافر، أثبت أنه لكل عدد حقيقي θ،

$\cos(2\theta) = \cos^2(\theta)-\sin^2(\theta) \quad ; \quad \sin(2\theta) = 2\sin(\theta)\cos(\theta)$

2 – صيغتا أولير :

a – مبرهنة :

لكل عدد حقيقي θ،

$$\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} \qquad \sin(\theta) = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$$

b – الإخطاط :

إخطاط التعبير $\cos^p(x)\sin^q(x)$ حيث p و q من $\mathbb{N}$ و $(p;q) \neq (0;0)$ و x عدد حقيقي هو كتابته على شكل مجموع الدوال : $x \to a\cos(\alpha x)$ و $x \to b\sin(\beta x)$ حيث a و b من $\mathbb{Q}$ و α و β من $\mathbb{N}$.

c – تطبيقات :

.01 أخطط $x \to \sin^2(x)$

.02 أحسب : $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4(x)\,dx$

d – بعض الصيغ الإعتيادية :

$$\cos^2(x) = \frac{1+\cos(2x)}{2}$$
$$\sin^2(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2}$$

$$\cos^3(x) = \frac{3\cos(x)+\cos(3x)}{4}$$
$$\sin^3(x) = \frac{3\sin(x)-\sin(3x)}{4}$$

$$\cos^4(x) = \frac{3+4\cos(2x)+\cos(4x)}{8}$$
$$\sin^4(x) = \frac{3-4\cos(2x)+\cos(4x)}{8}$$

$$\cos^5(x) = \frac{10\cos(x)+5\cos(3x)+\cos(5x)}{16}$$
$$\sin^5(x) = \frac{10\sin(x)-5\sin(3x)+\sin(5x)}{16}$$

: Série d'exercices :
Les nombres complexes

Exercice 01 :

Résoudre dans $\mathbb{C}$:

$(E_1) :\ z - 2i\,\overline{z} = 0$ $\quad$ $(E_2) :\ z^2 - 6z + 34 = 0$

$(E_3) : z^2 - 18z + 82 = 0$ $\quad$ $(E_4) : z = \dfrac{2}{\overline{z}}$

$(E_5) : z^5 - 1 = 0$ $\quad$ $(E_6) : z^9 - 1 = 0$

Exercice 02 :

Considérons dans $\mathbb{C}$:

$$P(z) = z^3 - 7z^2 + 25z - 39$$

01. Vérifier que 3 est un zéro de P.

02. Trouver les réels a, b et c tels que :

$$P(z) = (z-3)(az^2 + bz + c)$$

03. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $P(z) = 0$.

Exercice 03 :

Considérons dans $\mathbb{C}$:

$$(E) :\ 4z^2 - 12\,z + 25 = 0$$

01. Prouver que (E) admet deux solutions différentes notées α et β.

02. Calculer : $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}$

03. Vérifier que : $\frac{3}{2} + 2i$ est une solution de (E).

04. En déduire la deuxième solution de (E).

: Série d'exercices :
Les nombres complexes

Exercice 01 :

Résoudre dans $\mathbb{C}$:

$(E_1) :\ z - 2i\,\overline{z} = 0$ $\quad$ $(E_2) :\ z^2 - 6z + 34 = 0$

$(E_3) : z^2 - 18z + 82 = 0$ $\quad$ $(E_4) : z = \dfrac{2}{\overline{z}}$

$(E_5) : z^5 - 1 = 0$ $\quad$ $(E_6) : z^9 - 1 = 0$

Exercice 02 :

Considérons dans $\mathbb{C}$:

$$P(z) = z^3 - 7z^2 + 25z - 39$$

01. Vérifier que 3 est un zéro de P.

02. Trouver les réels a, b et c tels que :

$$P(z) = (z-3)(az^2 + bz + c)$$

03. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $P(z) = 0$.

Exercice 03 :

Considérons dans $\mathbb{C}$:

$$(E) :\ 4z^2 - 12\,z + 25 = 0$$

01. Prouver que (E) admet deux solutions différentes notées α et β.

02. Calculer : $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}$

03. Vérifier que : $\frac{3}{2} + 2i$ est une solution de (E).

04. En déduire la deuxième solution de (E).

: Série d'exercices :
Les équations différentielles

Réf : www.naja7math.com + …

Exercice 01 :

Résoudre les ED suivantes :

$(E_1) :\ y' + 3(y+2) = 0$ $\quad$ $(E_2) : \begin{cases} 5y = y' - 13 \\ y(0) = 5 \end{cases}$

$(E_3) : \begin{cases} y'' - 6y' = -9y \\ y(2) = 4 \\ y(0) = -6 \end{cases}$ $\quad$ $(E_4) : \begin{cases} y'' - 5y' + 4y = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 2 \end{cases}$

$(E_5) : \begin{cases} 2y' + y'' + 5y = 0 \\ y(0) = 4 \\ y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 5 \end{cases}$

Exercice 02 :

Calculer $f(ln(2))$ sachant que f est une fonction numérique vérifiant :

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ \ f'(x) = 2\,f(x) - 2 \quad et \quad f(0) = 0$$

: Série d'exercices :
Les équations différentielles

Réf : www.naja7math.com + …

Exercice 01 :

Résoudre les ED suivantes :

$(E_1) :\ y' + 3(y+2) = 0$ $\quad$ $(E_2) : \begin{cases} 5y = y' - 13 \\ y(0) = 5 \end{cases}$

$(E_3) : \begin{cases} y'' - 6y' = -9y \\ y(2) = 4 \\ y(0) = -6 \end{cases}$ $\quad$ $(E_4) : \begin{cases} y'' - 5y' + 4y = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 2 \end{cases}$

$(E_5) : \begin{cases} 2y' + y'' + 5y = 0 \\ y(0) = 4 \\ y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 5 \end{cases}$

Exercice 02 :

Calculer $f(ln(2))$ sachant que f est une fonction numérique vérifiant :

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ \ f'(x) = 2\,f(x) - 2 \quad et \quad f(0) = 0$$

معادلات تفاضلية
EQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

I - معادلات تفاضلية خطية من الرتبة الأولى :

1 – نشاط : قانون التناقص الإشعاعي :

إذا علمت أن نشاط عينة مشعة في اللحظة t $(0 \leq t)$ هو عدد التفتتات في الثانية : $N'(t) = -\lambda \times N(t)$

فبين أن قانون التناقص الإشعاعي هو : $N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$

نذكر : $N(t) =$ عدد النوى المشعة (غير المتفتتة) في اللحظة t.

$N_0 =$ عدد النوى المشعة (غير المتفتتة) في اللحظة $t = 0$.

$\lambda =$ ثابتة النشاط الإشعاعي.

2 – حلول المعادلة : $y' = ay + b$ حيث $a \neq 0$

a – مبرهنة :

حلول المعادلة التفاضلية : $y' = ay + b$ حيث $(a,b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ هي الدوال العددية y المعرفة على $\mathbb{R}$ ب : $y(t) = \lambda e^{at} - \frac{b}{a}$ حيث $\lambda \in \mathbb{R}$.

b – حالة خاصة :

- يوجد حل وحيد للمعادلة التفاضلية $y' = ay + b$ حيث $(a,b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ و يحقق الشرط $y(t_0) = y_0$، هو الدالة المعرفة ب :
$$y(t) = \left(y_0 + \frac{b}{a}\right) e^{a(t-t_0)} - \frac{b}{a}$$
- الشرط $y(t_0) = y_0$ يسمى الشرط البدئي.

3 – تطبيقات :

حل المعادلات التفاضلية التالية :

$$\frac{dx}{dt} = 7x + 3 \quad ; \quad y' = 5 \quad ; \quad \begin{cases} 2\varphi' - 4\varphi = 6 \\ \varphi(8) = 2 \end{cases}$$

4 – تمرين :

نعتبر دارة كهربائية مكونة من مكثف مشحون سعته C و مقاومة R.

نرمز ب $u_c(t)$ التوتر بين مربطي المكثف (ب V) في اللحظة t (ب s).

في اللحظة $t = 0$، $u_c(0) = 3\,V$.

عبر عن $u_c(t)$ بدلالة t.

نذكر : $u_R(t) = R\frac{dq(t)}{dt}$ $\qquad$ $u_c(t) = \frac{q(t)}{C}$

II - معادلات تفاضلية خطية من الرتبة الثانية :

في كل ما يلي، نعتبر المعادلة التفاضلية : $(E) : ay'' + by' + cy = 0$ حيث $(a,b,c) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ و $a \neq 0$.

1 – تسمية :

المعادلة : $(E_c) : ar^2 + br + c = 0$ تسمى المعادلة المميزة للمعادلة (E) و $\Delta = b^2 - 4ac$ مميز المعادلة (E_c).

2 – حلول المعادلة $ay'' + by' + cy = 0$ و $a \neq 0$:

لتكن $(E_c) : ar^2 + br + c = 0$ المعادلة المميزة ل (E) و $\Delta = b^2 - 4ac$

الحالات	$\Delta > 0$ (موجب قطعا)	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$ (سالب قطعا)
تعليق	المعادلة (E_c) تقبل حلين حقيقيين مختلفين و مترافقين هما : $r_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ ، $r_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$	المعادلة (E_c) تقبل حلا حقيقيا وحيدا و مزدوجا هو : $r = \frac{-b}{2a}$	المعادلة (E_c) تقبل حلين عقديين مختلفين و مترافقين هما : $r_1 = p + iq$ و $r_2 = p - iq$ بحيث : $p = \Re e(r_1) = \frac{-b}{2a}$ ، $q = \Im m(r_1) = \frac{\sqrt{\lvert\Delta\rvert}}{2a}$
حلول المعادلة (E) هي الدوال العددية y المعرفة على $\mathbb{R}$ ب :	$y(t) = \alpha e^{r_1 t} + \beta e^{r_2 t}$ حيث : $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$	$y(t) = (\alpha t + \beta)e^{\frac{-b}{2a} \times t}$ حيث : $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$	$y(t) = (\alpha\cos(qt) + \beta\sin(qt))e^{pt}$ حيث : $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

3 – حالة خاصة :

يكون حل المعادلة (E) وحيدا إذا علمنا – على سبيل المثال – قيمة كل من $y(t_0)$ و $y'(t_0)$ بحيث t_0 عدد حقيقي معلوم.

4 – تطبيقات :

أوجد جميع حلول المعادلات التفاضلية التالية :

$$(E_1) : -2x'' - 9x' + 5x = 0 \quad (E_2) : \frac{d^2\theta}{dt^2} - 2\frac{d\theta}{dt} + 4\theta = 0$$

$$(E_3) : 4\frac{d^2\phi}{dt^2} - 12\frac{d\phi}{dt} + 9\phi = 0 \ et \ \begin{cases} \phi(0) = 2 \\ \frac{d\phi}{dt}(0) = 0 \end{cases}$$

: Complément de la série d'exercices : Les équations différentielles

Exercice 01 :

Une grandeur non nulle y évolue à une vitesse proportionnelle à elle-même. On sait que cette grandeur double après dix ans. Combien de temps lui faut-il pour tripler ?

Exercice 02 : (Loi de refroidissement de Newton)

« La vitesse de refroidissement d'un corps inerte est proportionnelle à la différence de température entre ce corps et le milieu ambiant ». On suppose que la température de l'air ambiant est constante égale à 25°C. Dans ces conditions, la température d'un corps passe de 100°C à 70°C en 15min. Au bout de combien de temps se trouvera-t-il à 40°C ?

Exercice 03 : (Dissolution d'une substance)

Une substance se dissout dans l'eau. On admet que la vitesse de dissolution est proportionnelle à la quantité non encore dissoute. A l'instant $t = 0$ (t en min), on place 20 grammes de cette substance dans une grande quantité d'eau.

Sachant que les dix premiers grammes se dissolvent en cinq minutes, donner une expression de la quantité dissoute $f(t)$, en grammes, en fonction de t.

Exercice 04 : (Taux d'alcoolémie)

Le taux d'alcoolémie $f(t)$ (en gL^{-1}) d'une personne ayant absorbé, à jeun, une certaine quantité d'alcool vérifie, sur $\mathbb{R}_+$, l'ED : $(E) : y' + y = ae^{-t}$ où t est le temps écoulé après l'ingestion (exprimé en heures) et a une constante qui dépend des conditions expérimentales.

On pose pour $t \in \mathbb{R}_+$, $g(t) = f(t)\,e^t$.

01. Démontrer que g est une fonction affine.

02. Exprimer $f(t)$ en fonction de t et de a.

Dans cette question, on suppose que $a = 5$.

03. Etudier les variations de f et tracer sa courbe.

04. Déterminer le taux d'alcoolémie maximal et le temps au bout duquel il est atteint.

05. Donner une valeur du délai T (à l'heure près par excès) au bout duquel le taux d'alcoolémie de cette personne est inférieur à 0,5 gL^{-1}.

5 – تمرين :

نعتبر المعادلة التفاضلية : $(E) : y'' - 6y' + 9y = 9x + 12$

.01 حل المعادلة التفاضلية المتجانسة : $(E_h) : y'' - 6y' + 9y = 0$

.02 حدد العددين الحقيقيين a و b لكي تكون الدالة العددية g المعرفة جيدا على $\mathbb{R}$ ب $g(x) = ax + b$ حلا خاصا للمعادلة التفاضلية (E).

.03 إستنتج حلول المعادلة التفاضلية (E).

I - الجداء السلمي تعاريف و خاصيات :

1 – تمهيد :

الفضاء (E) مزود بمعلم متعامد ممنظم $\Re(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$.

ليكن $ABCD$ مربعا ضمن (E) طول حرفه 1.

أحسب : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB}$ $\quad\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB}$ $\quad\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB}$

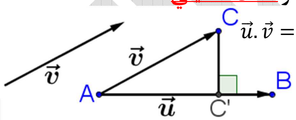
2 – أساسيات :

a – تعريف :

لتكن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهتين غير منعدمتين من الفضاء المتجهي $\mathcal{V}_3$ و A و B و C ثلاث نقط من (E) بحيث : $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ و $\vec{v}=\overrightarrow{AC}$ و C' المسقط العمودي ل C على المستقيم (AB).

الجداء السلمي للمتجهتين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ هو العدد الحقيقي $\overline{AB}\times\overline{AC'}$

و نكتب : $\vec{u}.\vec{v}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\overline{AB}\times\overline{AC'}$



b – مبرهنة 1:

لكل متجهتين غير منعدمتين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ من الفضاء المتجهي $\mathcal{V}_3$،

$$\vec{u}.\vec{v}=\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times\cos(\widehat{\vec{u};\vec{v}})$$

c – قواعد الحساب : (التماثلية و الخطانية)

لكل عدد حقيقي λ و لكل $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$ من الفضاء المتجهي $\mathcal{V}_3$،

- Symétrie : (التماثلية) $\qquad \vec{u}.\vec{v}=\vec{v}.\vec{u}$
- $\vec{0}.\vec{u}=\vec{u}.\vec{0}=0$

العدد $\vec{u}.\vec{u}$ يسمى مربع المتجهة $\vec{u}$ و نكتب : $\quad \vec{u}^2=\vec{u}.\vec{u}=\|\vec{u}\|^2$

- Bilinéarité : (الثنائية الخطانية)

$$\vec{u}.(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}.\vec{v}+\vec{u}.\vec{w}\qquad(\vec{u}+\vec{v}).\vec{w}=\vec{u}.\vec{w}+\vec{v}.\vec{w}$$
$$(\lambda\vec{u}).\vec{v}=\lambda(\vec{u}.\vec{v})=\vec{u}.(\lambda\vec{v})$$

d – مبرهنة 2 : متطابقات هامة

لكل $\vec{u}$ و $\vec{v}$ من الفضاء المتجهي $\mathcal{V}_3$،

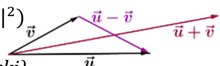
- $(\vec{u}+\vec{v})^2=\vec{u}^2+2\,\vec{u}.\vec{v}+\vec{v}^2=\|\vec{u}\|^2+2\,\vec{u}.\vec{v}+\|\vec{v}\|^2$
- $(\vec{u}-\vec{v})^2=\vec{u}^2-2\,\vec{u}.\vec{v}+\vec{v}^2=\|\vec{u}\|^2-2\,\vec{u}.\vec{v}+\|\vec{v}\|^2$
- $(\vec{u}+\vec{v}).(\vec{u}-\vec{v})=\vec{u}^2-\vec{v}^2=\|\vec{u}\|^2-\|\vec{v}\|^2$

e – مبرهنة 3 :

لكل $\vec{u}$ و $\vec{v}$ من الفضاء المتجهي $\mathcal{V}_3$،

- $\vec{u}.\vec{v}=\frac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2-\|\vec{u}\|^2-\|\vec{v}\|^2\right)$
- $\vec{u}.\vec{v}=\frac{1}{4}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2-\|\vec{u}-\vec{v}\|^2\right)$
- $\cos(\theta)=\frac{\vec{u}.\vec{v}}{\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|}\qquad avec\ \theta=(\widehat{\vec{u};\vec{v}})\ et\ \vec{u}\neq\vec{0}\ et\ \vec{v}\neq\vec{0}$
- *Identité du parallélogramme :*

$$\|\vec{u}+\vec{v}\|^2+\|\vec{u}-\vec{v}\|^2=2(\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2)$$



- *Inégalité triangulaire : (Minkowski)*

$$\|\vec{u}+\vec{v}\|\leq\|\vec{u}\|+\|\vec{v}\|$$

- *Inégalité de Cauchy-Schwarz :*

$$|\vec{u}.\vec{v}|\leq\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|$$

f – مبرهنة 4 : تعامد و استقامية متجهتين

لكل $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهتين غير منعدمتين من الفضاء المتجهي $\mathcal{V}_3$،

$\vec{u}$ و $\vec{v}$ متعامدتين $\Leftrightarrow\quad \vec{u}.\vec{v}=0$

$\vec{u}$ و $\vec{v}$ مستقيميتين $\Leftrightarrow\quad |\vec{u}.\vec{v}|=\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|$

3 – المعلم و الأساس :

a – تسمية و تعريف :

لتكن $\vec{\imath}$ و $\vec{\jmath}$ و $\vec{k}$ ثلاث متجهات غير منعدمة و غير مستوائية من $\mathcal{V}_3$.

- نقول أن $(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ أساس في $\mathcal{V}_3$.
- إذا كانت $\vec{\imath}$ و $\vec{\jmath}$ و $\vec{k}$ متعامدة مثنى مثنى $(\vec{\imath}\perp\vec{\jmath}\ et\ \vec{\jmath}\perp\vec{k}\ et\ \vec{\imath}\perp\vec{k})$

فإننا نقول أن الأساس $(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ متعامد.

b – حالة خاصة : أساس متعامد ممنظم

لتكن $\vec{\imath}$ و $\vec{\jmath}$ و $\vec{k}$ ثلاث متجهات غير منعدمة و غير مستوائية من $\mathcal{V}_3$.

- $(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ أساس متعامد ممنظم $\Leftrightarrow\quad \left.\begin{array}{l}\|\vec{\imath}\|=\|\vec{\jmath}\|=\|\vec{k}\|=1\\ \vec{\imath}\perp\vec{\jmath}\ و\ \vec{\jmath}\perp\vec{k}\ و\ \vec{\imath}\perp\vec{k}\end{array}\right\}$
- المعلم $\Re(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ متعامد ممنظم $\Leftrightarrow$ $(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ أساس متعامد ممنظم.

II - صيغ تحليلية :

في كل ما يلي، الفضاء (E) مزود بمعلم متعامد ممنظم $\Re(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$.

1 – مبرهنة :

لكل نقطتين $A\begin{pmatrix}x_A\\y_A\\z_A\end{pmatrix}$ و $B\begin{pmatrix}x_B\\y_B\\z_B\end{pmatrix}$ من (E) و لكل متجهتين $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ و $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$ من الفضاء المتجهي $\mathcal{V}_3$،

- $\vec{u}=x\,\vec{\imath}+y\,\vec{\jmath}+z\,\vec{k}$ و $\overrightarrow{OA}=x_A\,\vec{\imath}+y_A\,\vec{\jmath}+z_A\,\vec{k}$
- $\vec{u}.\vec{v}=x\,x'+y\,y'+z\,z'$
- $\|\vec{u}\|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$
- $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_B-x_A\\y_B-y_A\\z_B-z_A\end{pmatrix}$
- $AB=\|\overrightarrow{AB}\|=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}$

2 – حالات خاصة : التعامد و الإستقامية

لكل $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ و $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$ متجهتين غير منعدمتين من $\mathcal{V}_3$،

$\vec{u}$ و $\vec{v}$ متعامدتان $\Leftrightarrow\quad \vec{u}\perp\vec{v}\quad\Leftrightarrow\quad \vec{u}.\vec{v}=xx'+yy'+zz'=0$

$\vec{u}$ و $\vec{v}$ مستقيميتان $\Leftrightarrow\quad \exists\,\alpha\in\mathbb{R}: x'=\alpha\,x$ و $y'=\alpha\,y$ و $z'=\alpha\,z$

$\Leftrightarrow\quad |\vec{u}.\vec{v}|=\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|$

$\Leftrightarrow\quad \begin{vmatrix}x&x'\\y&y'\end{vmatrix}=0$ و $\begin{vmatrix}x&x'\\z&z'\end{vmatrix}=0$ و $\begin{vmatrix}y&y'\\z&z'\end{vmatrix}=0$

$\vec{u}$ و $\vec{v}$ غير مستقيميتين $\Leftrightarrow\quad |\vec{u}.\vec{v}|\neq\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|$

$\Leftrightarrow\quad \begin{vmatrix}x&x'\\y&y'\end{vmatrix}\neq0$ أو $\begin{vmatrix}x&x'\\z&z'\end{vmatrix}\neq0$ أو $\begin{vmatrix}y&y'\\z&z'\end{vmatrix}\neq0$

3 – محدد ثلاث متجهات :

لتكن $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ و $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$ و $\vec{w}\begin{pmatrix}x''\\y''\\z''\end{pmatrix}$ ثلاث متجهات من $\mathcal{V}_3$.

محدد المتجهات $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$ في هذا الترتيب هو العدد الحقيقي :

$$\det(\vec{u};\vec{v};\vec{w})=\begin{vmatrix}x&x'&x''\\y&y'&y''\\z&z'&z''\end{vmatrix}=x\begin{vmatrix}y'&y''\\z'&z''\end{vmatrix}-y\begin{vmatrix}x'&x''\\z'&z''\end{vmatrix}+z\begin{vmatrix}x'&x''\\y'&y''\end{vmatrix}$$

4 – إستوائية ثلاث متجهات :

لكل $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$ من الفضاء المتجهي $\mathcal{V}_3$،

➢ $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$ مستوائية $\Leftrightarrow$ $\det(\vec{u};\vec{v};\vec{w}) = 0$

➢ $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$ غير مستوائية $\Leftrightarrow$ $\det(\vec{u};\vec{v};\vec{w}) \neq 0$

5 – تطبيق :

.01 أحسب : $\det\left(\begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix};\begin{pmatrix}0\\6\\4\end{pmatrix};\begin{pmatrix}2\\9\\3\end{pmatrix}\right)$ و $\det\left(\begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix};\begin{pmatrix}0\\0\\4\end{pmatrix};\begin{pmatrix}2\\9\\3\end{pmatrix}\right)$

.02 أول هندسيا النتائج المحصل عليها آنفا.

III - المستقيم و المستوى في الفضاء :

1 – نشاط :

نعتبر في الفضاء (E) النقطتين : $A\begin{pmatrix}1\\4\\-3\end{pmatrix}$ و $B\begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix}$ و $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-1\\-2\end{pmatrix}$ متجهة من $\mathcal{V}_3$.

.01 إعط تمثيلا برامتريا للمستقيم (D) المار من A و الموجه ب $\vec{u}$.

.02 إعط معادلتين ديكارتيتين للمستقيم (D).

.03 ليكن $(\mathcal{P})$ المستوى المار من B و المتضمن ل (D).

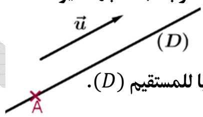
.a حدد تمثيلا برامتريا للمستوى $(\mathcal{P})$.

.b حدد معادلة ديكارتية للمستوى $(\mathcal{P})$.

2 – المستقيم في الفضاء :

a – تمثيل برامتري للمستقيم $D(A;\vec{u})$:

ليكن (D) المستقيم المار من النقطة $A\begin{pmatrix}x_A\\y_A\\z_A\end{pmatrix}$ و الموجه بالمتجهة غير المنعدمة $\vec{u}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$.



النظمة $\begin{cases} x = x_A + at \\ y = y_A + bt \,; t \in \mathbb{R} \\ z = z_A + ct \end{cases}$ تسمى تمثيلا برامتريا للمستقيم (D).

b – معادلتا المستقيم $D(A;\vec{u})$:

معادلتا المستقيم (D) المار من $A\begin{pmatrix}x_A\\y_A\\z_A\end{pmatrix}$ و الموجه بالمتجهة غير المنعدمة $\vec{u}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ هما :

➢ $(abc \neq 0) \Rightarrow \frac{x-x_A}{a} = \frac{y-y_A}{b} = \frac{z-z_A}{c}$

➢ $(a = 0$ و $bc \neq 0) \Rightarrow x = x_A$ و $\frac{y-y_A}{b} = \frac{z-z_A}{c}$

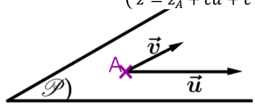
➢ $(a = 0$ و $b = 0$ و $c \neq 0) \Rightarrow x = x_A$ و $y = y_A$

3 – المستوى في الفضاء : (الجزء الأول)

a – تمثيل برامتري للمستوى $\mathcal{P}(A;\vec{u};\vec{v})$:

ليكن $(\mathcal{P})$ المستوى المار من $A\begin{pmatrix}x_A\\y_A\\z_A\end{pmatrix}$ و الموجه بالمتجهتين غير المنعدمتين و غير المستقيميتين $\vec{u}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ و $\vec{v}\begin{pmatrix}a'\\b'\\c'\end{pmatrix}$.

النظمة $\begin{cases} x = x_A + a\alpha + a'\beta \\ y = y_A + b\alpha + b'\beta \,; \begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \\ z = z_A + c\alpha + c'\beta \end{cases}$ تسمى تمثيلا برامتريا للمستوى $(\mathcal{P})$.



b – معادلة ديكارتية للمستوى $\mathcal{P}(A;\vec{u};\vec{v})$:

➢ مجموعة النقط $M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ حيث : $(*)\ ax + by + cz + d = 0$ و $\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ هي مستوى و $(*)$ تسمى معادلة ديكارتية لهذا المستوى.

➢ لتحديد معادلة ديكارتية للمستوى $\mathcal{P}(A;\vec{u};\vec{v})$ نستعمل :

$$M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in (\mathcal{P}) \Leftrightarrow \det(\overrightarrow{AM};\vec{u};\vec{v}) = 0$$

➢ لتحديد معادلة ديكارتية لمستوى محدد بالنقط غير المستقيمية A و B و C نستعمل : $M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in (ABC) \Leftrightarrow \det(\overrightarrow{AM};\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}) = 0$

IV - تطبيقات الجداء السلمي :

1 – المستوى في الفضاء : (الجزء الثاني)

a – نشاط :

نعتبر في (E) النقط : $A\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}$ و $B\begin{pmatrix}-3\\4\\5\end{pmatrix}$ و $S\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$.

.01 حدد معادلة ديكارتية للمستوى $(\mathcal{P})$ واسط القطعة $[AB]$.

.02 إستنتج تمثيلا برامتريا للمستوى $(\mathcal{P})$.

.03 أحسب مسافة S عن المستوى $(\mathcal{P})$.

b – معادلة ديكارتية للمستوى $\mathcal{P}(A;\vec{n})$:

لتحديد معادلة ديكارتية للمستوى $(\mathcal{P})$ المار من $A\begin{pmatrix}x_A\\y_A\\z_A\end{pmatrix}$ و $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ منظمية عليه نستعمل :

$$M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in (\mathcal{P}) \Leftrightarrow \vec{n}.\overrightarrow{AM} = 0$$
$$\Leftrightarrow ax + by + cz - (ax_A + by_A + cz_A) = 0$$

c – نتائج :

لتكن a و b و c أعداد حقيقية بحيث $\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ و $(\mathcal{P})$ مستوى ضمن (E).

➢ إذا كانت $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ منظمية على $(\mathcal{P})$ فإنه يوجد $d \in \mathbb{R}$ بحيث :

$$(\mathcal{P}) : ax + by + cz + d = 0$$

➢ إذا كان $(\mathcal{P}) : ax + by + cz + d = 0$ فإن $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ منظمية عليه.

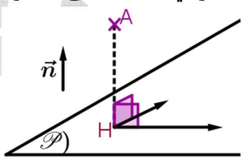
d – مسافة نقطة عن مستوى :

نعتبر في (E) النقطة $A\begin{pmatrix}x_A\\y_A\\z_A\end{pmatrix}$ و المستوى $(\mathcal{P}) : ax + by + cz + d = 0$.

مسافة النقطة A عن المستوى $(\mathcal{P})$ هي :

$$d(A\,;(\mathcal{P})) = AH = \frac{|ax_A + by_A + cz_A + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

حيث H هي المسقط العمودي للنقطة A على المستوى $(\mathcal{P})$.



e – خاصيات :

لتكن $\vec{u}$ متجهة غير منعدمة و موجهة لمستقيم (D) و $\vec{v}$ متجهة غير منعدمة و موجهة لمستقيم (Δ) و $\vec{n}$ متجهة غير منعدمة و منظمية على مستوى $(\mathcal{P})$ و $\vec{m}$ متجهة غير منعدمة و منظمية على مستوى $(\mathcal{Q})$ و $\vec{p}$ و $\vec{q}$ متجهتين غير منعدمتين و غير مستقيميتين و موجهتين ل $(\mathcal{P})$.

Série d'exercices : Produit Scalaire dans $\mathcal{V}_3$

Réf : www.naja7math.com + ⋯

L'espace (E) est munit d'un repaire orthonormé.

Exercice 01 :

Considérons les points $A\begin{pmatrix}5\\-3\\2\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}-1\\1\\4\end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix}3\\-4\\-2\end{pmatrix}$.

01. Montrer que le triangle ABC est rectangle en A.

02. Calculer son aire.

Exercice 02 :

Considérons les points $A\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}5\\0\\-3\end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix}1\\5\\1\end{pmatrix}$.

01. Déterminer une équation cartésienne du plan $(\mathcal{P})$ passant par C et normal sur (AB).

02. Déterminer une représentation paramétrique du plan $(\mathcal{Q})$ passant par B et normal sur (AC).

03. Démontrer que : $(\mathcal{P})\perp(\mathcal{Q})$.

Exercice 03 :

Considérons le point $A\begin{pmatrix}4\\-1\\2\end{pmatrix}$ et le plan :

$$(\mathcal{P}) : 2x-y+3z+5=0$$

01. Vérifier que : $A\notin(\mathcal{P})$.

02. Déterminer une équation cartésienne du plan $(\mathcal{Q})$ passant par A et parallèle à $(\mathcal{P})$.

Exercice 04 :

Considérons le point $A\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}$ et le plan :

$$(\mathcal{P}) : 2x-y+3z+5=0$$

01. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (D) passante par A et normal sur $(\mathcal{P})$.

02. En déduire les coordonnées de H la projection orthogonale de A sur $(\mathcal{P})$.

03. Trouver deux vecteurs directeurs du plan $(\mathcal{P})$.

04. En déduire une représentation paramétrique du plan $(\mathcal{P})$.

Exercice 05 :

Considérons les points $A\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix}0\\2\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$.

01. Prouver que A, B et C ne sont pas alignés.

02. Vérifier que $\vec{u}$ est normal sur le plan (ABC).

03. Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC)

≺ $(D)\perp(\Delta)\Leftrightarrow$ $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متعامدتان $(\vec{u}.\vec{v}=0\ \Leftrightarrow)$

≺ $(D)\parallel(\Delta)\Leftrightarrow$ $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مستقيميتان $(\vec{u}\wedge\vec{v}=\vec{0}\Leftrightarrow)$

≺ $(D)\perp(\mathcal{P})\Leftrightarrow$ $\vec{u}$ منظمية على $(\mathcal{P})$

$\Leftrightarrow \vec{u}\perp\vec{p}$ و $\vec{u}\perp\vec{q}$ $(\vec{u}.\vec{p}=\vec{u}.\vec{q}=0\Leftrightarrow)$

$\Leftrightarrow$ $\vec{u}$ و $\vec{n}$ مستقيميتان $(\vec{u}\wedge\vec{n}=\vec{0}\Leftrightarrow)$

≺ $(D)\parallel(\mathcal{P})\Leftrightarrow$ يوجد مستقيم (Δ) ضمن $(\mathcal{P})$ بحيث $(D)\parallel(\Delta)$

$\Leftrightarrow$ $\vec{u}$ و $\vec{p}$ و $\vec{q}$ مستوائية $(\det(\vec{u};\vec{p};\vec{q})=0\Leftrightarrow)$

$\Leftrightarrow$ $\vec{u}$ و $\vec{n}$ متعامدتان $(\vec{u}.\vec{n}=0\ \Leftrightarrow)$

≺ $(\mathcal{P})\perp(\mathcal{Q})\Leftrightarrow$ $\vec{n}$ و $\vec{m}$ متعامدتان $(\vec{n}.\vec{m}=0\Leftrightarrow)$

$\Leftrightarrow$ $\vec{m}$ و $\vec{p}$ و $\vec{q}$ مستوائية $(\det(\vec{m};\vec{p};\vec{q})=0\Leftrightarrow)$

≺ $(\mathcal{P})\parallel(\mathcal{Q})\Leftrightarrow$ $\vec{n}$ و $\vec{m}$ مستقيميتان $(\vec{m}\wedge\vec{n}=\vec{0}\Leftrightarrow)$

$\Leftrightarrow \vec{m}\perp\vec{p}$ و $\vec{m}\perp\vec{q}$ $(\vec{m}.\vec{p}=\vec{m}.\vec{q}=0\Leftrightarrow)$

2 – تحديد تحليلي للمجموعة $\mathcal{P}_k=\{M\in(E):\ \vec{n}.\overrightarrow{AM}=k\}$

a – نشاط :

نعتبر في الفضاء (E) النقطة $A\begin{pmatrix}5\\-3\\4\end{pmatrix}$ و المتجهة $\vec{n}\begin{pmatrix}-2\\4\\3\end{pmatrix}$ من $\mathcal{V}_3$.

01. حدد المجموعتين : $\mathcal{E}_0=\{M\in(E):\ \vec{n}.\overrightarrow{AM}=0\}$

و $\mathcal{E}_5=\{M\in(E):\ \vec{n}.\overrightarrow{AM}=5\}$

02. حدد الوضع النسبي ل$(\mathcal{E}_0)$ و $(\mathcal{E}_5)$.

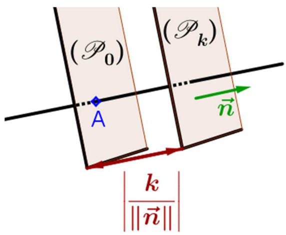
b – ملخص :

لكل عدد حقيقي k و لكل نقطة A من الفضاء (E) و لكل متجهة غير منعدمة $\vec{n}$ من الفضاء المتجهي $\mathcal{V}_3$،

≺ المجموعة $\mathcal{P}_0=\{M\in(E):\ \vec{n}.\overrightarrow{AM}=0\}$ هي المستوى ضمن (E) المار من A و $\vec{n}$ منظمية عليه.

≺ المجموعة $\mathcal{P}_k=\{M\in(E):\ \vec{n}.\overrightarrow{AM}=k\}$ هي مستوى ضمن (E) موازي ل $(\mathcal{P}_0)$ (أي $\vec{n}$ منظمية على $(\mathcal{P}_k)$). .

≺ المسافة بين $(\mathcal{P}_0)$ و $(\mathcal{P}_k)$ هي : $d=\left|\frac{k}{\|\vec{n}\|}\right|$



Série d'exercices : Produit vectoriel

Réf : www.naja7math.com + madariss.fr + Examens nationaux

L'espace (E) est munit d'un repaire orthonormé.

Exercice 01 :

Considérons les points $A\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix}0\\1\\3\end{pmatrix}$.

01. Calculer $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$.

02. En déduire une équation cartésienne de (ABC).

03. Calculer l'aire de ABC.

Exercice 02 : (Traité en cours)

Considérons dans (E) :

$(P) : x + y + z - 1 = 0 \qquad (P') : 2x - y - z = 3$

01. Déterminer la position relative de (P) et (P').

02. Donner une représentation paramétrique de la droite (Δ) l'intersection de (P) et (P').

Exercice 03 :

Considérons les points $A\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix}$.

01. Calculer $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$.

02. En déduire que A, B et C ne sont pas alignés.

03. Calculer l'aire du parallélogramme construit à partir de A, B et C.

04. Donner une représentation paramétrique de (AC).

05. Calculer la distance $d(A,(BC))$.

Exercice 04 : (BAC 2009 rattrapage)

Considérons $A\begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix}$, $(P) : 2x + y + 2z - 13 = 0$ et (S) la sphère de centre $\Omega\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ et de rayon $R = 3$.

01. Montrer que $(S) : x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2z - 7 = 0$.

02. Vérifier que $A \in (S)$.

03. Calculer la distance $d\big(\Omega,(P)\big)$.

04. En déduire que (P) est tangent à (S) .

Soit (D) la droite passante par A et perponduculaire à (P).

05. Prouver que $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$ est directrice à (D)

et que $\overrightarrow{\Omega A} \wedge \vec{u}\begin{pmatrix}6\\-6\\-3\end{pmatrix}$.

06. Calculer : $\dfrac{\|\overrightarrow{\Omega A} \wedge \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}$

07. En déduire que (D) est tangent à (S) en A.

Exercice 05 : (BAC 2008 rattrapage)

Considérons :

$(P) : x + 2y + z - 1 = 0$

$(S) : x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 6y + 2z + 5 = 0$

01. Démontrer que $S\left(I\begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix};3\right)$.

02. Prouver que $d\big(I;(P)\big) = \sqrt{6}$.

03. En déduire que (P) coupe (S) en un cercle (C) dont on calculera son rayon r.

04. Donner une représentation paramétrique de (D) la droite passante par I et perpendiculaire à (P) .

05. Montrer que le centre de (C) est $H\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$.

Série d'exercices : Produit Scalaire dans $\mathcal{V}_3$

Réf : www.naja7math.com + ⋯

L'espace (E) est munit d'un repaire orthonormé.

Exercice 01 :

Considérons les points $A\begin{pmatrix}5\\-3\\2\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}-1\\1\\4\end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix}3\\-4\\-2\end{pmatrix}$.

01. Montrer que le triangle ABC est rectangle en A.

02. Calculer son aire.

Exercice 02 :

Considérons les points $A\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}5\\0\\-3\end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix}1\\5\\1\end{pmatrix}$.

01. Déterminer une équation cartésienne du plan $(\mathcal{P})$ passant par C et normal sur (AB).

02. Déterminer une représentation paramétrique du plan $(\mathcal{Q})$ passant par B et normal sur (AC).

03. Démontrer que : $(\mathcal{P}) \perp (\mathcal{Q})$.

Exercice 03 :

Considérons le point $A\begin{pmatrix}4\\-1\\2\end{pmatrix}$ et le plan

$(\mathcal{P}) : 2x - y + 3z + 5 = 0$

01. Vérifier que : $A \notin (\mathcal{P})$.

02. Déterminer une équation cartésienne du plan $(\mathcal{Q})$ passant par A et parallèle à $(\mathcal{P})$.

Exercice 04 :

Considérons le point $A\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}$ et le plan

$(\mathcal{P}) : 2x - y + 3z + 5 = 0$

01. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (D) passante par A et normal sur $(\mathcal{P})$.

02. En déduire les coordonnées de H la projection orthogonale de A sur $(\mathcal{P})$.

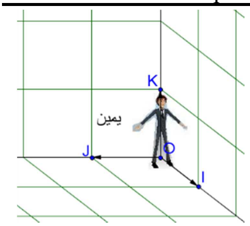
Exercice 05 :

Considérons les points $A\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix}0\\2\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$.

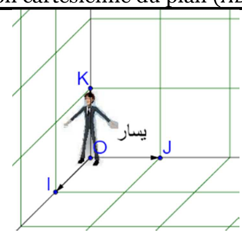
01. Prouver que A, B et C ne sont pas alignés.

02. Vérifier que $\vec{u}$ est normal sur le plan (ABC).

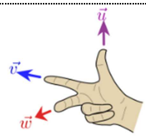
03. Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC)

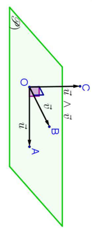


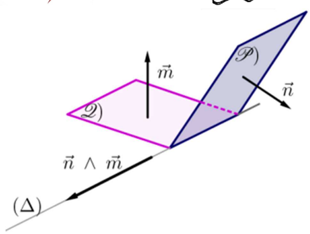
النقطة J توجد على يمين رجل أمبير، نقول أن المعلم $\mathfrak{R}$ غير مباشر.



النقطة J توجد على يسار رجل أمبير، نقول أن المعلم $\mathfrak{R}$ مباشر.







دراسة تحليلية للفلكة

ÉTUDE ANALYTIQUE DE LA SPHÈRE

في كل ما يلي، الفضاء (E) منسوب إلى معلم متعامد ممنظم.

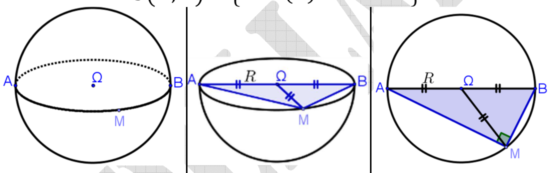
I - الفلكة، تعريف و خاصيات :

1 – تعريف :

لتكن Ω نقطة من الفضاء (E) و R عددا حقيقيا موجبا.

الفلكة (S) التي مركزها Ω و شعاعها R هي مجموعة النقط من الفضاء (E) التي تبعد عن المركز Ω بالمسافة R و بتعبير آخر :

$$S(\Omega;R) = \{M \in (E) : \Omega M = R\}$$



الفلكة (S) — نصف الفلكة (S) — دائرة كبرى من (S)

2 – معادلات فلكة :

a – معادلة فلكة :

معادلة الفلكة (S) التي مركزها $\Omega(a;b;c)$ و شعاعها R هي :

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2 = R^2$$

b – معادلة ديكارتية لفلكة :

المعادلة $x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$ حيث $d = a^2+b^2+c^2-R^2$ تسمى معادلة ديكارتية للفلكة (S) التي مركزها $\Omega(a;b;c)$ و شعاعها R.

c – معادلة فلكة معرفة بأحد أقطارها :

- كل مستقيم مار من Ω مركز الفلكة $S(\Omega;R)$ يقطعها في نقطتين مختلفتين $A\begin{pmatrix}x_A\\y_A\\z_A\end{pmatrix}$ و $B\begin{pmatrix}x_B\\y_B\\z_B\end{pmatrix}$ بحيث $\Omega A = \Omega B = R$.
- القطعة $[AB]$ تسمى قطر للفلكة (S).
- الفلكة التي أحد أقطارها القطعة $[AB]$ هي :

$((AM)\perp(BM))$ $\quad S = \{M \in (E) : \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM} = 0\}$

أي: $(S) : (x-x_A)(x-x_B)+(y-y_A)(y-y_B)+(z-z_A)(z-z_B)=0$

3 – دراسة المجموعة $x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$

a – مبرهنة :

نعتبر في الفضاء (E) المجموعة :

$$(\mathcal{L}) : x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$$

- $a^2+b^2+c^2-d<0 \Leftrightarrow \mathcal{L}=\phi$
- $a^2+b^2+c^2-d=0 \Leftrightarrow \mathcal{L}=\left\{\Omega\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}\right\}$
- $a^2+b^2+c^2-d>0 \Leftrightarrow \left.\begin{matrix}\mathcal{L}=S\left(\Omega\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix};R\right)\\ R=\sqrt{a^2+b^2+c^2-d}\end{matrix}\right\}$

b – تطبيق :

أدرس المجموعتين :

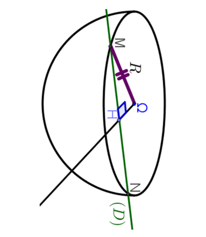
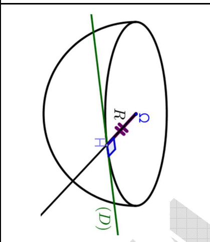
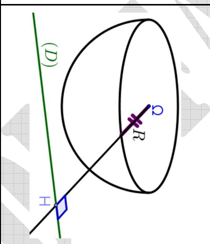
$$(\mathcal{L}) : x^2+y^2+z^2-2y+z-3=0$$
$$(\phi) : x^2+y^2+z^2+4x-6y+8z+29=0$$

II - تقاطع فلكة و مستقيم :

1 – ملخص :

نعتبر الفلكة (S) التي مركزها Ω و شعاعها R و (D) مستقيما ضمن (E) و لتكن H المسقط العمودي للنقطة Ω على المستقيم (D).

نضع : $d = d(\Omega;(D)) = \Omega H \left(= \dfrac{\|\overrightarrow{A\Omega}\wedge\vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}\ avec\ D(A,\vec{u})\right)$

الحالة	تمثيل	تعليق
$d<R$		(S) و (D) يتقاطعان وفق نقطتين مختلفتين M و N. أي: $(S)\cap(D)=\{M;N\}$ نقول إن المستقيم (D) مخترق (S).
$d=R$		(S) و (D) يتقاطعان وفق نقطة وحيدة H. أي: $(S)\cap(D)=\{H\}$ نقول إن المستقيم (D) مماس لـ (S) في H.
$d>R$		(S) و (D) لا يتقاطعان أي: $(S)\cap(D)=\phi$ نقول إن المستقيم (D) خارج الفلكة (S).

2 – تمرين :

أدرس الوضع النسبي للفلكة (S) و المستقيم (D) بحيث :

$$(D): \begin{cases} x=t \\ y=t+1\ ; t\in\mathbb{R} \\ z=2 \end{cases} \quad \text{و} \quad (S): x^2+y^2+z^2-3x+2y-4z-5=0$$

III - تقاطع فلكة و مستوى :

1 – ملخص :

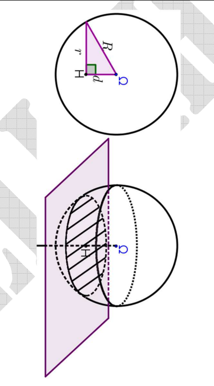
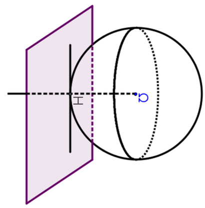
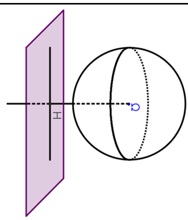
نعتبر الفلكة (S) التي مركزها Ω و شعاعها R و $(\mathcal{P})$ مستوى ضمن (E)

و لتكن H المسقط العمودي للنقطة Ω على المستوى $(\mathcal{P})$.

نضع $\quad d = d\big(\Omega;(\mathcal{P})\big) = \Omega H$

إذا كان $(\mathcal{P}) : Ax + By + Cz + D = 0$ و $\Omega\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ فإن :

$$\Omega H = \frac{|Aa + Bb + Cc + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

الحالة	تمثيل	تعليق
$d < R$		➤ (S) و $(\mathcal{P})$ يتقاطعان وفق دائرة (C) مركزها H وشعاعها : $r = \sqrt{R^2 - d^2}$ ➤ نقول إن المستوى $(\mathcal{P})$ قاطع ل (S) في دائرة. ➤ إذا كان $r = R$ فإن (C) تسمى دائرة كبرى.
$d = R$		➤ (S) و $(\mathcal{P})$ يشتركان في نقطة وحيدة H. أي : $(S)\cap(\mathcal{P}) = \{H\}$ ➤ نقول إن المستوى $(\mathcal{P})$ مماس ل (S) في H.
$d > R$		➤ (S) و $(\mathcal{P})$ لا يشتركان في أية نقطة من (E). أي : $(S)\cap(\mathcal{P}) = \phi$ ➤ نقول إن المستوى $(\mathcal{P})$ خارج الفلكة (S).

2 – تقنية : معادلة المماس لفلكة في نقطة معلومة منها :

نعتبر الفلكة (S) التي مركزها Ω و شعاعها R و A نقطة معلومة من (S).

لتحديد معادلة ديكارتية للمستوى $(\mathcal{P})$ المماس ل (S) في A نستعمل :

$$M(x;y;z) \in (\mathcal{P}) \iff \overrightarrow{A\Omega}\,.\,\overrightarrow{AM} = 0 \quad \big(\Leftrightarrow (\mathcal{P}) \text{ منظمية على } \overrightarrow{A\Omega}\big)$$

3 – تطبيق :

حدد معادلة المستوى $(\mathcal{P})$ المماس للفلكة :

$$(S) : x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2z - 7 = 0$$

في النقطة $A(2;2;-1)$.

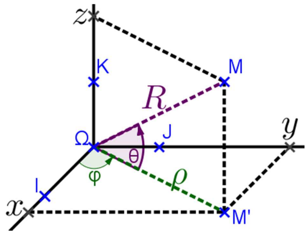
IV - تمثيل برامتري لفلكة :

1 – مبرهنة :

لتكن (S) الفلكة التي مركزها $\Omega(a;b;c)$ و شعاعها R.

النظمة : $\begin{cases} x = a + R\cos(\theta)\cos(\varphi) \\ y = b + R\cos(\theta)\sin(\varphi) \\ z = c + R\sin(\theta) \end{cases} \; ; \; \binom{\varphi}{\theta} \in \mathbb{R}^2$ تسمى

تمثيلا برامتريا للفلكة (S).



2 – تطبيق :

حدد تمثيلا برامتريا للفلكة :

$$(S) : x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y - 2z - 3 = 0$$

Série d'exercices : La sphère

Réf : www.naja7math.com + ...

L'espace (E) est munit d'un repaire orthonormé.

Exercice 01 :

01. Déterminer une équation de la sphère $\mathcal{S}\left(A\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix};4\right)$.

02. Déterminer une équation cartésienne de la sphère $(\mathcal{S}')$ de centre $A\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}$ et passant par $B\begin{pmatrix}3\\0\\-6\end{pmatrix}$.

Exercice 02 :

01. Déterminer une équation de la sphère $(\mathcal{S})$ de diamètre $[AB]$ où $A\begin{pmatrix}-2\\-1\\3\end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix}0\\5\\7\end{pmatrix}$.

02. En déduire une équation cartésienne de $(\mathcal{S})$.

Exercice 03 :

Considérons la sphère : $(\mathcal{S}) : x^2+y^2+z^2+2x-6y+10z-1=0$ et le plan $(\mathcal{P}) : 2x+y+2z-9=0$.

01. Déterminer le centre Ω et le rayon R de $(\mathcal{S})$.

02. Prouver que $(\mathcal{P})$ est tangent à $(\mathcal{S})$.

03. Donner une représentation paramétrique de la droite passant par Ω et normale sur le plan $(\mathcal{P})$.

04. En déduire les coordonnées du point de contact.

Exercice 04 :

Considérons la sphère : $(\mathcal{S}) : x^2+y^2+z^2-2x+4y-4=0$

et la droite (Δ): $\begin{cases}x=1-t\\y=t\\z=\sqrt{7}\end{cases}\ ;t\in\mathbb{R}$.

01. Déterminer le centre Ω et le rayon R de $(\mathcal{S})$.

02. Résoudre dans $\mathbb{R}^4$ le système composé d'équations de $(\mathcal{S})$ et (Δ).

03. En déduire la position relative de $(\mathcal{S})$ et (Δ).

Exercice 05 :

Considérons le point $A\begin{pmatrix}0\\3\\1\end{pmatrix}$ et le plan

$$(\mathcal{P}) : -x+y-z+1=0$$

01. Vérifier que : $A\notin(\mathcal{P})$.

02. Trouver une équation cartésienne de la sphère $(\mathcal{S})$ de centre A et tangente au plan $(\mathcal{P})$.

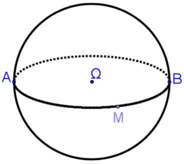
Exercice 06 :

Considérons la sphère $(\mathcal{S})$ de centre $A\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}$ et de rayon 5 et le plan $(\mathcal{P}) : -x+y-z+1=0$.

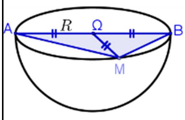
01. Montrer que l'intersection de $(\mathcal{S})$ et $(\mathcal{P})$ est un cercle $(\mathcal{C})$.

02. Déterminer le rayon de $(\mathcal{C})$.

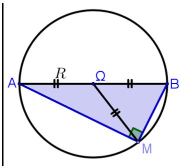
03. Trouver les coordonnées de H le centre de $(\mathcal{C})$.



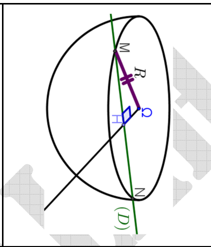
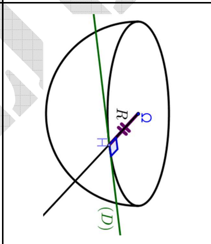
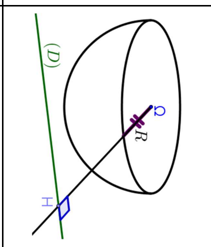
الفلكة (S)

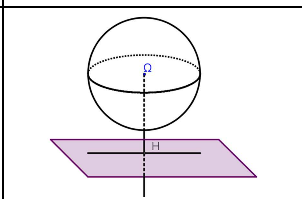
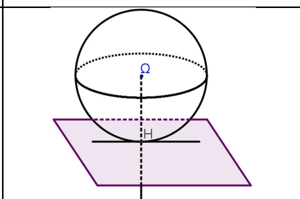
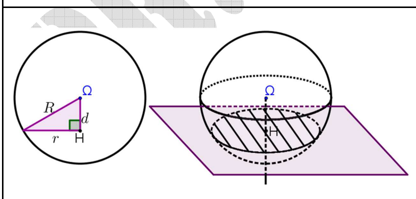


نصف الفلكة (S)



دائرة كبرى من (S)

الحالة	تمثيل	تعليق
$d<R$		➤ (S) و (D) يتقاطعان وفق نقطتين مختلفتين M و N. أي : $(S)\cap(D)=\{M;N\}$ ➤ نقول إن المستقيم (D) مخترق (S).
$d=R$		➤ (S) و (D) يتقاطعان وفق نقطة وحيدة H. أي : $(S)\cap(D)=\{H\}$ ➤ نقول إن المستقيم (D) مماس ل (S) في H.
$d>R$		➤ (S) و (D) لا يتقاطعان. أي : $(S)\cap(D)=\phi$ ➤ نقول إن المستقيم (D) خارج الفلكة (S).

الحالة	$d>R$	$d=R$	$d<R$
تمثيل			
تعليق	➤ (S) و $(\mathcal{P})$ لا يشتركان في أية نقطة من (E). أي : $(S)\cap(\mathcal{P})=\phi$ ➤ نقول إن المستوى $(\mathcal{P})$ خارج الفلكة (S).	➤ (S) و $(\mathcal{P})$ يشتركان في نقطة وحيدة H. أي : $(S)\cap(\mathcal{P})=\{H\}$ ➤ نقول إن المستوى $(\mathcal{P})$ مماس للفلكة (S) في H.	➤ (S) و $(\mathcal{P})$ يتقاطعان وفق دائرة $(\mathcal{C})$ مركزها H و شعاعها : $r=\sqrt{R^2-d^2}$ ➤ نقول إن المستوى $(\mathcal{P})$ قاطع ل (S) في دائرة. ➤ إذا كان $r=R$ فإن $(\mathcal{C})$ تسمى دائرة كبرى.

الجداء المتجهي
PRODUIT VECTORIEL

في كل ما يلي، الفضاء (E) منسوب إلى معلم $\mathfrak{R}(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$.

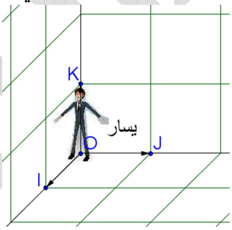
I - توجيه الفضاء :

1 – المعلم و الأساس الموجهان :

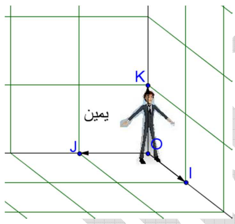
a – رجل أمبير :

نعتبر النقط I و J و K من الفضاء (E) بحيث : $\vec{\imath}=\overrightarrow{OI}$ و $\vec{\jmath}=\overrightarrow{OJ}$ و $\vec{k}=\overrightarrow{OK}$.

نعرف "رجل أمبير" برجل خيالي، رجلاه في O و رأسه في K و أمامه I أي :



النقطة J توجد على يسار رجل أمبير، نقول أن المعلم $\mathfrak{R}$ مباشر.



النقطة J توجد على يمين رجل أمبير، نقول أن المعلم $\mathfrak{R}$ غير مباشر.

b – أمثلة :

نفترض أن المعلم $\mathfrak{R}$ مباشر.

- الأساسين $(\vec{\jmath},\vec{k},\vec{\imath})$ و $(\vec{k},\vec{\imath},\vec{\jmath})$ أساسين مباشرين.
- الأساسين $(\vec{k},\vec{\jmath},\vec{\imath})$ و $(\vec{\jmath},\vec{\imath},\vec{k})$ أساسين غير مباشرين.

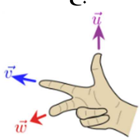
c – ملحوظات :

- المعلم $\mathfrak{R}(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ مباشر $\Leftrightarrow$ الأساس $(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ مباشر
- للتأكد من أن الأساس $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ مباشر نستعمل إحدى القواعد التالية

رجل أمبير

إزالة الغطاء (*Maxwell*)

الأصابع الثلاث



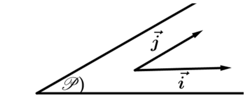
2 – توجيه مستوى في الفضاء :

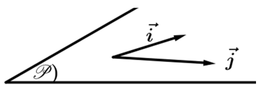
في كل ما يلي، المعلم $\mathfrak{R}(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ مباشر.

a – نشاط :

ليكن $(\mathcal{P})$ مستوى ضمن (E) موجه ب $\vec{\imath}$ و $\vec{\jmath}$.

أنشئ المتجهة $\vec{k}$ حسب كل حالة مما يلي :





b – نتيجة :

يتم توجيه المستوى $(\mathcal{P})$ بمتجهة منظمية عليه و بصفة عامة يوجه مستوى بمتجهة إتجاهها يخترق هذا المستوى.

II - الجداء المتجهي، تعريف و خاصيات :

1 – تعريف :

لتكن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهتين غير منعدمتين من الفضاء المتجهي $\mathcal{V}_3$ و A و B من الفضاء الموجه (E) بحيث : $\vec{u}=\overrightarrow{OA}$ و $\vec{v}=\overrightarrow{OB}$.

الجداء المتجهي للمتجهتين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ في هذا الترتيب هو المتجهة التي يرمز لها ب : $\vec{u}\wedge\vec{v}$ و المعرفة كما يلي :

- إذا كانت $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مستقيميتين فإن : $\vec{u}\wedge\vec{v}=\vec{0}$.
- إذا كانت $\vec{u}$ و $\vec{v}$ غير مستقيميتين :

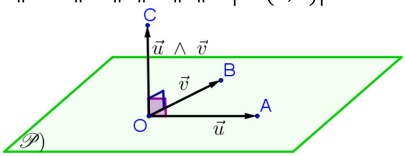
نضع : $\vec{u}\wedge\vec{v}=\vec{w}=\overrightarrow{OC}$

المتجهة $\vec{u}\wedge\vec{v}$ تحقق الشروط الآتية :

❖ $\vec{w}\perp\vec{v}$ و $\vec{w}\perp\vec{u}$ (أي $(OC)\perp(OAB)$)

❖ $(\vec{u};\vec{v};\vec{w})$ مباشر (ثلاثي الأوجه $(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OC})$ مباشر)

❖ $\|\vec{u}\wedge\vec{v}\|=\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times|\sin(\widehat{\vec{u};\vec{v}})|$



2 – حالات خاصة :

إذا كان $(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ أساسا متعامدا ممنظما مباشرا فإن :

$\vec{\imath}\wedge\vec{k}=-\vec{\jmath}$ $\qquad$ $\vec{k}\wedge\vec{\imath}=\vec{\jmath}$ $\qquad$ $\vec{\imath}\wedge\vec{\jmath}=\vec{k}$

$\vec{k}\wedge\vec{\jmath}=-\vec{\imath}$ $\qquad$ $\vec{\jmath}\wedge\vec{\imath}=-\vec{k}$ $\qquad$ $\vec{\jmath}\wedge\vec{k}=\vec{\imath}$

3 – خاصيات : التخالفية و الخطانية

لكل $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$ من الفضاء المتجهي $\mathcal{V}_3$ و λ من $\mathbb{R}$،

التخالفية :
- $\vec{u}\wedge\vec{v}=-(\vec{v}\wedge\vec{u})$

التنائية الخطية :
- $(\vec{u}+\vec{v})\wedge\vec{w}=\vec{u}\wedge\vec{w}+\vec{v}\wedge\vec{w}$
- $\vec{u}\wedge(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}\wedge\vec{v}+\vec{u}\wedge\vec{w}$
- $(\lambda\vec{u})\wedge\vec{v}=\lambda(\vec{u}\wedge\vec{v})=\vec{u}\wedge(\lambda\vec{v})$

4 – ملاحظة :

الجداء المتجهي ليس بالتبادلي و لا بالتجميعي.

5 – خاصيات مميزة : إستقامية و تعامد متجهتين

لكل $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهتين من الفضاء المتجهي $\mathcal{V}_3$،

- $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مستقيميتان $\Leftrightarrow$ $\vec{u}\wedge\vec{v}=\vec{0}$
- $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متعامدتان $\Leftrightarrow$ $\|\vec{u}\wedge\vec{v}\|=\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|$

III - تحليلية الجداء المتجهي :

في كل ما يلي، المعلم $\mathfrak{R}(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ متعامد و ممنظم و مباشر.

1 – مبرهنة :

لكل $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ و $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$ متجهتين من $\mathcal{V}_3$،

$$\vec{u}\wedge\vec{v}=\left(\begin{vmatrix}y & y'\\ z & z'\end{vmatrix};-\begin{vmatrix}x & x'\\ z & z'\end{vmatrix};\begin{vmatrix}x & x'\\ y & y'\end{vmatrix}\right)$$
$$=\begin{vmatrix}y & y'\\ z & z'\end{vmatrix}\vec{\imath}-\begin{vmatrix}x & x'\\ z & z'\end{vmatrix}\vec{\jmath}+\begin{vmatrix}x & x'\\ y & y'\end{vmatrix}\vec{k}$$

Série d'exercices : Produit vectoriel

Réf : www.naja7math.com + madariss.fr + Examens nationaux

L'espace (E) est munit d'un repaire orthonormé.

Exercice 01 :

Considérons les points $A\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix}0\\1\\3\end{pmatrix}$.

01. Calculer $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$.

02. En déduire une équation cartésienne de (ABC).

03. Calculer l'aire de ABC.

Exercice 02 :

Considérons dans (E) :

$(P) : x+y+z-1=0$ $\qquad$ $(P') : 2x-y-z=3$

01. Déterminer la position relative de (P) et (P').

02. Donner une représentation paramétrique de la droite (Δ) l'intersection de (P) et (P').

Exercice 03 :

Considérons les points $A\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix}$.

01. Calculer $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$.

02. En déduire que A, B et C ne sont pas alignés.

03. Calculer l'aire du parallélogramme construit à partir des points A, B et C.

04. Donner une représentation paramétrique de (AC).

05. Calculer la distance $d\coloneqq d\big(A,(BC)\big)$.

Exercice 04 : (*BAC* 2009 rattrapage)

Considérons $A\begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix}$, $(P) : 2x+y+2z-13=0$ et (S) la sphère de centre $\Omega\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ et de rayon $R=3$.

01. Montrer que $(S) : x^2+y^2+z^2-2x-2z-7=0$.

02. Vérifier que $A\in(S)$.

03. Calculer la distance $d\big(\Omega,(P)\big)$.

04. En déduire que (P) est tangent à (S) .

Soit (D) la droite passante par A et perponduculaire à (P).

05. Prouver que $\vec u\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$ est directrice à (D) et que $\overrightarrow{\Omega A}\wedge\vec u\begin{pmatrix}6\\-6\\-3\end{pmatrix}$.

06. Calculer : $\dfrac{\|\overrightarrow{\Omega A}\wedge\vec u\|}{\|\vec u\|}$

07. En déduire que (D) est tangent à (S) en A.

Exercice 05 : (*BAC* 2008 rattrapage)

Considérons :

$(P) : x+2y+z-1=0$

$(S) : x^2+y^2+z^2-4x-6y+2z+5=0$

01. Démontrer que $S\left(I\begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix};3\right)$.

02. Prouver que $d\big(I;(P)\big)=\sqrt{6}$.

03. En déduire que (P) coupe (S) en un cercle (C) dont on calculera son rayon r.

04. Donner une représentation paramétrique de (D) la droite passante par I et perpendiculaire à (P) .

05. Montrer que le centre de (C) est $H\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$.

2 – تطبيق :

نعتبر في الفضاء (E) النقط $A\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$ و $B\begin{pmatrix}2\\-4\\3\end{pmatrix}$ و $C\begin{pmatrix}-1\\8\\-9\end{pmatrix}$.

حدد مثلوث المتجهة $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ ثم أول النتيجة السابقة.

IV - بعض تطبيقات الجداء المتجهي :

1 – مساحة متوازي الأضلاع :

➢ مساحة متوازي الأضلاع $ABCD$ هي : $S_{ABCD}=\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AD}\|$

➢ إذا كانت A و B و C نقط غير مستقيمية فإن العدد $\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\|$ يمثل مساحة متوازي الأضلاع المنشأ إنطلاقا من القطعتين $[AB]$ و $[AC]$.

2 – مساحة مثلث :

مساحة المثلث ABC هي : $S_{ABC}=\frac{1}{2}\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\|$

3 – معادلة مستوى محدد بثلاث نقط غير مستقيمية :

a – نشاط :

نعتبر في الفضاء (E) النقط $A\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ و $B\begin{pmatrix}3\\0\\-3\end{pmatrix}$ و $C\begin{pmatrix}5\\2\\6\end{pmatrix}$.

01. أحسب مساحة المثلث ABC.

02. أحسب طول إرتفاع المثلث ABC المار من B.

03. حدد معادلة ديكارتية للمستوى (ABC).

4 – الوضع النسبي لمستويين :

a – ملخص :

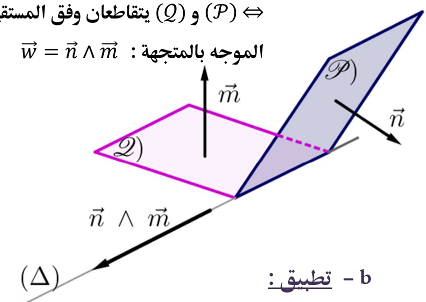
لتكن $\vec n$ و $\vec m$ متجهتين غير منعدمتان من $\mathcal{V}_3$ و منظميتان على التوالي على مستويين $(\mathcal{P})$ و $(\mathcal{Q})$.

➢ $\vec m$ و $\vec n$ مستقيميتان $\Leftrightarrow$ $\vec n\wedge\vec m=\vec 0$ $\Leftrightarrow$ $(\mathcal{P})\parallel(\mathcal{Q})$

➢ $\vec m$ و $\vec n$ غير مستقيميتان $\Leftrightarrow$ $\vec n\wedge\vec m\neq\vec 0$

$\Leftrightarrow$ $(\mathcal{P})$ و $(\mathcal{Q})$ يتقاطعان وفق المستقيم (Δ)

الموجه بالمتجهة : $\vec w=\vec n\wedge\vec m$



b – تطبيق :

التمرين 02 من سلسلة التمارين.

5 – مسافة نقطة عن مستقيم :

a – مبرهنة :

مسافة نقطة M عن المستقيم $D(A,\vec u)$ المار من A و الموجه ب $\vec u$ هي :

$$d\big(M;(D)\big)=\frac{\|\vec u\wedge\overrightarrow{AM}\|}{\|\vec u\|}$$

b – تطبيق :

أحسب $d\big(\Omega;(D)\big)$ علما أن : $\Omega\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}$ و $(D) : \begin{cases}x=1+t\\y=2t\\z=1-2t\end{cases};t\in\mathbb{R}$

التعداد
DÉNOMBREMENT

I - مجموعة منتهية، تسميات – خصائص – عمليات عليها :

1 – رئيسي مجموعة منتهية :

a – نشاط :

يدرس تلاميذ أحد الأقسام مادتي اللغة الفرنسية و الإنجليزية، فمنهم 28 يفضلون الإنجليزية و 20 يفضلون الفرنسية و 15 يفضلون الفرنسية و الإنجليزية. كم عدد تلاميذ هذا القسم؟

b – تعريف :

لتكن E مجموعة منتهية.

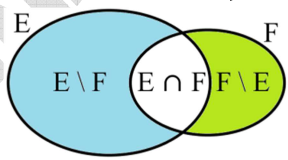
عدد عناصر المجموعة E يسمى رئيسي المجموعة E و يرمز له ب :

$Card(E)$ $\quad (Card(E) \in \mathbb{N})$

c – خاصيات :

لتكن E و F مجموعتين منتهيتين.

➤ إذا كانت $E = \phi$ فإن $Card(E) = 0$



➤ $Card(E \cup F) = Card(E) + Card(F) - Card(E \cap F)$

➤ $E \setminus F = \{x \in E : x \notin F\} = E \cap \overline{F}$

➤ $Card(E \setminus F) = Card(E) - Card(E \cap F)$

➤ $Card(F \setminus E) = Card(F) - Card(E \cap F)$

d – تطبيقات :

حدد $E \cup F$ و $E \cap F$ و $E \setminus F$ و $F \setminus E$ علما أن :

$E = \{5; -1; 3; 2\}$ و $F = \{3; -4; 9\}$

2 – الجداء الديكارتي :

لتكن E و F مجموعتين غير فارغتين و منتهيتين.

➤ المجموعة $E \times F = \{(x; y) : x \in E \text{ و } y \in F\}$ تسمى الجداء الديكارتي للمجموعتين E و F في هذا الترتيب.

➤ $Card(E \times F) = Card(E) \times Card(F)$

3 – مجموعة الأجزاء :

➤ المجموعة $\mathcal{P}(E) = \{A : A \subset E\}$ تسمى مجموعة أجزاء E.

➤ $Card(\mathcal{P}(E)) = 2^{Card(E)}$

4 – تطبيقات :

نضع : $F = \{3; -4; 9\}$ و $E = \{5; -1; 3; 2\}$

.01 حدد $E \times F$ ثم استنتج قيمة $Card(E \times F)$.

.02 حدد $\mathcal{P}(E)$ ثم استنتج قيمة $Card(\mathcal{P}(E))$.

.03 أحسب بطريقة أخرى قيمة $Card(E \times F)$ و $Card(\mathcal{P}(E))$.

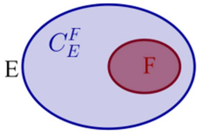
5 – التضمن – المتمم :

لتكن E و F مجموعتين منتهيتين بحيث : $F \subset E$.

➤ $A \subset E \Leftarrow Card(A) \le Card(E)$

➤ المجموعة $\{x \in E : x \notin F\}$ تسمى متمم F في E و يرمز لها ب :

$\overline{F}$ أو C_E^F أو $E \setminus F$ أو F^c أو ...



➤ $Card(C_E^F) = Card(\overline{F}) = Card(E) - Card(F)$

6 – تمرين :

يبلغ عدد تلاميذ إحدى الأقسام 40 تلميذا. أجرى أستاذ استطلاعا عن المواد المفضلة لتلاميذ هذا القسم فوجد أن 18 تلميذا يهتمون بمادة الرياضيات و 17 بمادة الفرنسية و 13 لا يهتمون بأي منهما.

أنشئ شكلا توضيحيا ثم أجب عن الأسئلة الآتية :

.01 ما هو عدد التلاميذ الذين لا يهتمون بمادة الرياضيات؟

.02 ما هو عدد التلاميذ الذين لا يهتمون بمادة الفرنسية؟

.03 ما هو عدد التلاميذ الذين يهتمون بمادة الرياضيات أو الفرنسية؟

.04 ما هو عدد التلاميذ الذين يهتمون بمادتي الرياضيات و الفرنسية؟

.05 ما هو عدد التلاميذ الذين يهتمون بالفرنسية و لا يهتمون بالرياضيات؟

.06 ما هو عدد التلاميذ الذين يهتمون بالرياضيات و لا يهتمون بالفرنسية؟

II - المبدأ العام للتعداد :

1 – نشاط : (شجرة الإختيارات)

نريد وضع ثلاث ملفات A و B و C في ثلاث قمطرات مرقمة 1 و 2 و 3 بحيث نضع في كل قمطر ملفا واحدا.

.01 بكم طريقة مختلفة يمكن وضع هذه الملفات؟

نعيد التجربة السابقة ب 100 ملف و 100 قمطر.

.02 بكم طريقة مختلفة يمكن وضع هذه الملفات؟

2 – المبدأ العام للتعداد :

إذا كانت الإختيارات C_1 و C_2 و ... و C_p تتم على التوالي ب n_1 و n_2 و ... و n_p كيفية مختلفة فإن عدد الكيفيات التي تتم بها هذه الإختيارات هو : $n_1 \times n_2 \times ... \times n_p$.

III - عدد الترتيبات بدون تكرار :

1 – نشاط :

في قاعة إنتظار إحدى العيادات الطبية، يوجد 10 مقاعد و 3 مرضى.

بكم طريقة مختلفة يمكن للمرضى الثلاث الجلوس؟

2 – عدد الترتيبات :

لتكن E مجموعة غير فارغة و منتهية و $n = Card(E)$ و $p \in \mathbb{N}^*$ بحيث $p \le n$.

➤ كل ترتيب ل p عنصر من E يسمى ترتيبة ل p عنصر من بين n عنصر من E.

➢ عدد هذه الترتيبات بدون تكرار هو :

$$A_n^p = n(n-1)(n-2)\ldots(n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!}$$

3 – تطبيق :

أحسب : A_7^3 $\quad A_5^1$ $\quad A_5^0$ $\quad A_4^4$

4 – ملحوظات :

➢ $\forall\, n \in \mathbb{N}, A_n^0 = 1$
➢ $\forall\, n \in \mathbb{N}^*, A_n^1 = n$

IV - عدد التبديلات :

في كل ما يلي، E و F مجموعتين غير فارغتين و منتهيتين

و $n = Card(E)$ و $p \in \mathbb{N}^*$ بحيث $p \le n$.

1 – نشاط :

إثنى عشر شخصا يجلسون حول طاولة يحيط بها فقط 12 كرسيا.

حدد عدد الحالات الممكنة لجلوس هؤلاء إن قرروا استبدال أماكنهم.

2 – عاملي عدد صحيح طبيعي :

ليكن n عددا صحيحا طبيعيا بحيث $1 \le n$.

العدد الصحيح الطبيعي $1 \times 2 \times \ldots \times n$ يسمى عاملي n و يرمز له ب $n!$

و نكتب : $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times n = n(n-1)(n-2)\ldots \times 1$

إصطلاحا $\quad 0! = 1$

3 – أمثلة :

أحسب : $4!$ $\quad 6!$ $\quad 7!$

4 – عدد التبديلات :

كل ترتيبة ل p عنصر من E من بين p عنصر منها تسمى تبديلة ل p عنصر من E و عدد هذه التبديلات هو :

$$A_p^p = p! = 1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times p$$

V - عدد الترتيبات بتكرار :

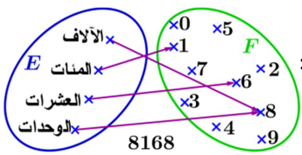
1 – نشاط :

يتكون القن السري (Code PIN) لشريحة الهاتف من أربعة أرقام.

حدد عدد الحلات الممكنة التي يمكن إدراجها كرقم سري.

2 – عدد التطبيقات :

عدد التطبيقات من E نحو F هو : $(Card(F))^{Card(E)}$



VI - عدد التأليفات :

1 – نشاط :

يريد مدرب فريق لكرة القدم تغيير ثلاثة لاعبين دفعة واحدة (في آن واحد) أثناء إحدى المباريات. نعلم أن عدد الإحتياطيين هو خمسة لاعبين.

01. ما هو عدد الإختيارات المتاحة للمدرب؟

من بين الإحتياطيين يوجد حارس مرمى.

02. ما هو عدد الإختيارات الممكنة للمدرب إذا اشتمل التغيير حارس المرمى؟

2 – عدد التأليفات :

➢ كل جزء F ضمن E مكون من p عنصر يسمى تأليفة ل p عنصر من E.

➢ عدد هذه التأليفات هو : $C_n^p = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$

3 – أمثلة :

أحسب : C_6^2 $\quad C_8^3$ $\quad C_9^0$ $\quad C_9^1$

4 – ملحوظات :

➢ $\forall\, n \in \mathbb{N}, C_n^0 = 1$
➢ $\forall\, n \in \mathbb{N}^*, C_n^1 = n$

5 – خاصيات الأعداد C_n^p :

لكل n و p من $\mathbb{N}$ بحيث $p \le n$،

01. $C_n^p = C_n^{n-p}$
02. $C_n^0 = C_n^n = 1$
03. $C_n^1 = C_n^{n-1} = n \qquad (n \neq 0)$
04. $C_n^p = C_{n-1}^p + C_{n-1}^{p-1} \qquad (p \neq 0)$

6 – الصيغة الحدانية :

➢ لكل n من $\mathbb{N}^*$ و لكل a و b من $\mathbb{R}^*$،

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \times a^{n-k} \times b^k$$

➢ الأعداد C_n^p تسمى المعاملات الحدانية.

7 – تطبيق :

01. حدد معامل $a^{35}b^{41}$ و معامل $a^{23}\, b^{53}$ في $(a+b)^{76}$.

02. أكتب العدد 2^n $(n \in \mathbb{N}^*)$ على شكل مجموع معاملات حدانية.

03. إستنتج كتابة للعدد 512 على شكل مجموع معاملات حدانية.

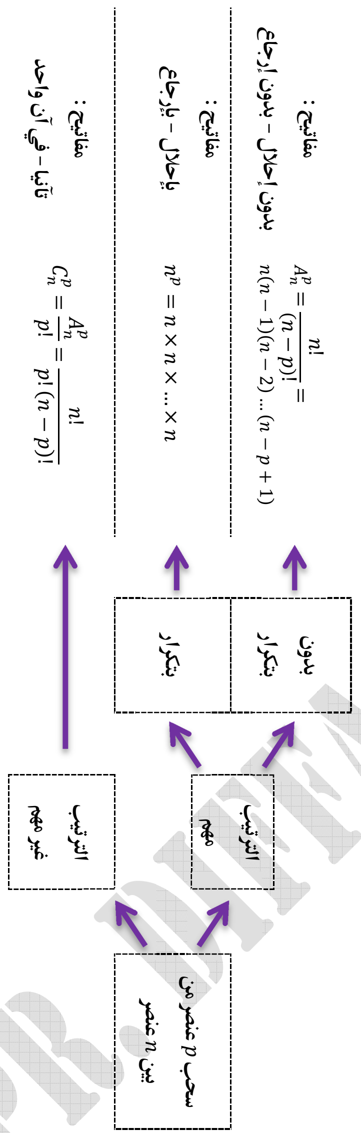
VII - تطبيقات :

1 – مصطلحات متداولة :

العناصر	تسمية	الحالات أو عددها
	قطعة نقدية *Pièce de money*	$F = Face =$ الوجه $P = Pile =$ الظهر
	كرة *Boule*	غالبا ما تكون ملونة أو مرقمة و دائما لا يمكن التمييز بينها باللمس
	نرد *Dé*	النرد هو مكعب ذو ستة أوجه مرقمة من 1 إلى 6 و دائما متجانس (أي غير مغشوش)
	بيدقة *Jeton*	قطعة من قطع لعبة "الداما *Dama*" –على سبيل المثال–

2 – أنواع السحبات :

نوع السحب	عدد الإمكانيات
نسحب تآنيا (في آن واحد) p عنصر من بين n عنصر (الترتيب ليس مهما)	$p \leq n, \quad C_n^p$ $C_n^p = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}$
نسحب بالتتابع و بإحلال (إرجاع العنصر المسحوب إلى المجموعة) p عنصر من بين n عنصر (الترتيب مهم)	$p \leq n, \quad n^p$ $n^p = \underbrace{n \times n \times \ldots \times n}_{p \text{ مرة}}$
نسحب بالتتابع و بدون إحلال (عدم إرجاع العنصر المسحوب إلى المجموعة) p عنصر من بين n عنصر (الترتيب مهم)	$p \leq n, \quad A_n^p$ $A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!} = n(n-1)(n-2)\ldots(n-p+1)$



3 – تطبيقات :

a – تمرين 1 :

يحتوي كيس على 8 كرات : 5 بيضاء و 3 سوداء. نسحب ثلاث كرات بالتتابع و بدون إحلال من هذا الكيس.

01. أحسب عدد إمكانيات هذا السحب.

02. أحسب عدد الإمكانيات التي تكون فيها الكرات الثلاث كلها بيضاء.

03. أحسب عدد الإمكانيات التي تكون فيها الكرات الثلاث من نفس اللون.

b – تمرين 2 :

يحتوي صندوق على أربع بيدقات تحمل كل واحدة منها العدد 5 و ست بيدقات تحمل كل واحدة منها العدد 10. نسحب عشوائيا و تآنيا ثلاث بيدقات من الصندوق.

01. تحقق من أن عدد الإمكانيات هو 120.

02. أحسب عدد إمكانيات كل من الأحداث التالية :

- A : "الحصول على ثلاث بيدقات تحمل كل منها العدد 5"
- B : "الحصول على بيدقة تحمل العدد 5 و بيدقتين تحملان العدد 10"
- C : "الحصول على 3 بيدقات تحمل أعدادا مجموعها 20"
- D : "الحصول على 3 بيدقات تحمل أعدادا مجموعها على الأقل 20"

c – تمرين 3 :

يحتوي كيس على 5 كرات بيضاء و 3 حمراء. نسحب بالتتابع و بإحلال كرتين من الكيس.

01. حدد عدد السحبات الممكنة.

02. أحسب عدد السحبات التي تكون فيها الكرات المسحوبة مختلفة اللون.

حساب الإحتمالات
CALCUL DES PROBABILITÉS

عبد الله الدفاع

I - التجارب العشوائية - مصطلحات و تعاريف :

1 - تمهيد :

نعتبر التجربة : "رمي قطعة نقدية ثلاث مرات متتابعة"

.01 كون شجرة الإختيارات.

.02 حدد Ω مجموعة كل النتائج الممكنة ثم أحسب $Card(\Omega)$.

.03 حدد الجزء من Ω الذي عناصره تحقق :

"ظهور الوجه مرتين على الأقل"

2 - مصطلحات و تعاريف :

a - مصطلحات :

تعريف	مثال
مجموعة كل النتائج الممكنة (المحتملة) خلال تجربة عشوائية تسمى كون الإمكانيات و غالبا ما نرمز لها ب Ω. (Ω غير فارغة و منتهية)	التجربة العشوائية : رمي قطعة نقدية مرتين متتاليتين. كون إمكانيات هذه التجربة : $\Omega = \{FF;FP;PF;PP\}$
كل عنصر من Ω يسمى إمكانية.	FF و PF هما إمكانيتين.
كل جزء من Ω يسمى حدثا.	$\{FF;FP;PF\}$ هو حدث.
كل حدث مكون من عنصر واحد (أحادية) يسمى حدثا إبتدائيا.	$\{FP\}$ هو حدث إبتدائي. $\{PP\}$ هو حدث إبتدائي.
الحدث Ω (لأن $\Omega \subset \Omega$) يسمى الحدث الأكيد.	
الحدث ϕ (لأن $\phi \subset \Omega$) يسمى الحدث المستحيل.	
$\mathcal{P}(\Omega)$ يمثل مجموعة جميع الأحداث الممكنة.	

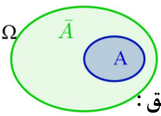
$$\mathcal{P}(\Omega) = \left\{ \begin{array}{c} \phi;\{FF\};\{FP\};\{PF\};\{PP\};\{FF,FP\};\{FF,PF\}; \\ \{FF,PP\};\{FP,PF\};\{FP,PP\};\{PF,PP\};\{FF,FP,PF\}; \\ \{FF,FP,PP\};\{FF,PF,PP\};\{FP,PF,PP\};\Omega \end{array} \right\}$$

b - إنسجام حدثين :

ليكن A و B حدثين من نفس التجربة العشوائية.

A و B غير منسجمان (أو منفصلان) $\Leftrightarrow$ $A \cap B = \phi$

c - الحدث المضاد :



ليكن A حدثا من تجربة عشوائية كون إمكانياتها Ω.

نسمي الحدث المضاد للحدث A الحدث $\overline{A}$ الذي يحقق :

$A \cap \overline{A} = \phi$ و $A \cup \overline{A} = \Omega$

d - العمليات على الأحداث :

الترميز	تعريف
$A \subset B$	تَحَقُّقُ A $\Rightarrow$ تَحَقُّقُ B
$A \cup B$	$A \cup B$ متحقق $\Leftrightarrow$ A أو B متحقق
$A \cap B$	$A \cap B$ متحقق $\Leftrightarrow$ A و B متحققين في آن واحد
$B \backslash A$	$B \backslash A$ متحقق $\Leftrightarrow$ B متحقق و A غير متحقق
$A \cap B = \phi$	الحدثان A و B غير منسجمان (منفصلان)
$\overline{A} = C_{\Omega}^{A} = A^{c}$	$\overline{A}$ متحقق $\Leftrightarrow$ A غير متحقق

e - تطبيق :

نرمي نردا وجوهه مرقمة من 1 إلى 6.

.01 حدد كون الإمكانيات Ω ثم الأحداث التالية :

- A : "الحصول على رقم قابل للقسمة على 5"
- B : "الحصول على رقم قابل للقسمة على 3"
- $C =: \overline{B}$

.02 هل الأحداث A و B و C منسجمة مثنى مثنى؟

f - خاصيات :

لكل A و B و C أحداث من نفس التجربة العشوائية.

المطابقة : Idempotence $A \cap A = A$; $A \cup A = A$	التبادلية : Commutativité $A \cup B = B \cup A$; $A \cap B = B \cap A$
السيطرة : Domination $A \cap \phi = \phi$; $A \cup \Omega = \Omega$	التوزيعية : Distributivité $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
Absorption الإمتصاص $A \cap (A \cup B) = A$ $A \cup (A \cap B) = A$	العنصر المحايد : Identité $A \cup \phi = A$; $A \cap \Omega = A$
قانوني Morgan $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$	التجميعية : Associativité $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
$\overline{\overline{A}} = A$ $A \cup (\overline{A} \cap B) = A \cup B$	المتمم : Complémentaire $A \cup \overline{A} = \Omega$; $A \cap \overline{A} = \phi$

II - الفضاءات الإحتمالية المنتهية :

في كل ما يلي، Ω مجموعة غير فارغة و منتهية.

1 - نشاط : محاكاة نرد باستعمال الحاسوب

نرمي في الهواء نردا غير مغشوش وجوهه مرقمة من 1 إلى 6 و نهتم بعد إستقراره على سطح أرض مستوية بوجهه العلوي.

.01 حدد كون إمكانيات هذه التجربة.

نعيد التجربة السابقة 20 مرة ثم بإستعمال الحاسوب نحاكيها عددا من المرات.

.02 إملأ الجداول التالية :

- بعد إعادة التجربة 20 مرة :

الوجه i	1	2	3	4	5	6
عدد المرات التي ظهر فيها الوجه i						
تردد الوجه i						

- بعد إعادة التجربة 200 مرة :

الوجه i	1	2	3	4	5	6
عدد المرات التي ظهر فيها الوجه i						
تردد الوجه i						

➢ بعد إعادة التجربة 1000 مرة :

الوجه i	1	2	3	4	5	6
عدد المرات التي ظهر فيها الوجه i						
تردد الوجه i						

.03 لاحظ قيم الترددات في الجدول الأخير. ماذا تستنتج؟

2 – إستقرار تردد حدث عشوائي :

بعد إعادة تجربة عشوائية عددا كبيرا من المرات يستقر تردد حدث A حول قيمة من المجال $[0\,;1]$ تسمى إحتمال الحدث A ويرمز له ب $p(A)$.

3 – تعريف :

➢ نسمي إحتمال معرف على $\mathcal{P}(\Omega)$ كل تطبيق $p : \begin{matrix} \mathcal{P}(\Omega) \to [0\,;1] \\ A \to p(A) \end{matrix}$ بحيث :

➢ $p(\Omega) = 1$

➢ $A \cap B = \phi \quad \Rightarrow \quad p(A \cup B) = p(A) + p(B)$

➢ القيمة $p(A)$ تسمى إحتمال الحدث A.

➢ المثلوث $(\Omega; \mathcal{P}(\Omega); p)$ [باختصار $(\Omega; p)$] يسمى فضاء إحتماليا منتهيا.

4 – خاصيات :

➢ $p(\phi) = 0 \quad ; \quad p(\Omega) = 1$

أيًّا كان الحدثان A و B ضمن Ω،

➢ $0 \leq p(A) \leq 1$

➢ $p(\bar{A}) = 1 - p(A)$

➢ $A \subset B \quad \Rightarrow \quad p(A) \leq p(B)$

➢ $p(B \backslash A) = p(B) - p(A \cap B)$

➢ $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$

5 – الإحتمال المنتظم :

نعتبر $\Omega = \{E_1; E_2; \dots; E_n\}$ حيث $n \in \mathbb{N}^*$ كون إمكانيات تجربة عشوائية.

(إمكانية $= E =$ Epreuve)

➢ $p(\{E_1\}) + p(\{E_2\}) + \cdots + p(\{E_n\}) = 1$

➢ إذا كانت كل الأحداث الإبتدائية $\{E_k\}_{1 \leq k \leq n}$ متساوية الإحتمال

يعني : $p(\{E_1\}) = p(\{E_2\}) = \cdots = p(\{E_n\})$ فإن الإحتمال p هو إحتمال منتظم و لدينا :

$\forall\, k \in \{1\,;2\,;\dots;n\}, \qquad p(\{E_k\}) = \frac{1}{Card(\Omega)} = \frac{1}{n}$

➢ لكل حدث A، $p(A) = \frac{Card(A)}{card(\Omega)}$

6 – تطبيقات :

a – تطبيق (1) :

ليكن p إحتمالا على كون الإمكانيات $\Omega = \{a; b; c\}$ ، بحيث :

$p(\{a; c\}) = \frac{1}{3}$ و $p(\{a; b\}) = \frac{4}{5}$

.01 أحسب : $p(\{a\})$ و $p(\{b\})$ و $p(\{c\})$

.02 هل الإحتمال p منتظم؟

b – تطبيق (2) :

نتوفر على صندوقين V_1 و V_2، كل واحد منهما يحتوي على 5 كرات مرقمة من 1 إلى 5. نسحب في آن واحد و بكيفية عشوائية كرتين من V_1 و كرة واحدة من V_2. أحسب إحتمال الأحداث التالية :

A : "الحصول على رقمين فرديين ورقم زوجي"

B : "الحصول على ثلاثة أرقام زوجية"

C : "الحصول على ثلاثة أرقام مجموعها عدد زوجي"

III - الإحتمال الشرطي :

1 – تمهيد :

نعتبر التجربة : "رمي قطعة نقدية ثلاث مرات متتابعة"

.01 حدد إحتمال الأحداث التالية :

➢ A : "ظهور الوجه مرة واحدة على الأكثر"

➢ B : "ظهور الظهر في الرمية الثانية"

➢ C : "ظهور الوجه مرة واحدة على الأكثر علما أن في الرمية الثانية حصلنا على الظهر"

.02 أحسب $\frac{p(A\cap B)}{p(B)}$. ماذا تستنتج؟

2 – الإحتمال الشرطي :

ليكن A حدثا ضمن Ω بحيث $p(A) \neq 0$.

إحتمال الحدث B علما أن A محقق هو : $p_A(B) = p\left(B/_A\right) = \frac{p(A\cap B)}{p(A)}$

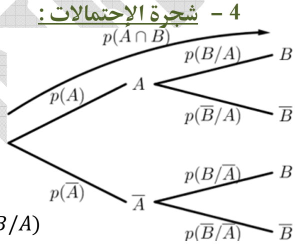
3 – صيغة الإحتمالات المركبة :

➢ صيغة الإحتمالات المركبة هي :

$p(A \cap B) = p(A) \times p\left(B/_A\right) = p(B) \times p\left(A/_B\right)$

➢ $p(B/A) = \frac{p(B) \times p\left(A/_B\right)}{p(A)}$

4 – شجرة الإحتمالات :



➢ $p(A) + p(\bar{A}) = 1$

➢ $p(B/A) + p(\bar{B}/A) = 1$

➢ $p(B/\bar{A}) + p(\bar{B}/\bar{A}) = 1$

➢ $p(A \cap B) = p(A) \times p(B/A)$

5 – تطبيقات :

a – تطبيق 1 :

نعتبر كيسين U_1 و U_2 و حقيبة يدوية C بحيث :

➢ U_1 يحتوي على كرة بيضاء و ثلاث سوداء.

➢ U_2 يحتوي على كرتين بيضاوين و كرتين سوداوين.

➢ C تحتوي على ثلاث كرات بيضاء و كرة سوداء.

➢ $p(\{U_1\}) = p(\{U_2\})$ و $p(\{C\}) = \frac{1}{2}$ =: إحتمال إختيار الحقيبة.

نختار عشوائيا من U_1 أو U_2 أو C ثم نسحب منه كرة واحدة.

أحسب إحتمال A : " الحصول على كرة بيضاء"

b – **تطبيق 2 :**

يراهن طفلان بقطعتين نقديتين إحداهما فقط مغشوشة بحيث $p(\{P\}) = \frac{2}{3}$

.01 أحسب إحتمال الحصول على الوجه مرتين.

.02 أحسب إحتمال الحصول على الظهر P مرة واحدة على الأكثر.

6 – استقلالية حدثين :

ليكن $(\Omega;p)$ فضاءا إحتماليا منتهيا و A و B حدثين ضمن Ω.

نقول إن الحدثين A و B مستقلان إذا و فقط إذا، لم يؤثر تحقق حدث منهما على تحقق الآخر و بتعبير رياضياتي،

الحدثان A و B مستقلان $\Leftrightarrow$ $p(A\cap B) = p(A)\times p(B)$

$\Leftrightarrow \quad p(B/A) = p(B) \quad (p(A)\neq 0)$

$\Leftrightarrow \quad p(A/B) = p(A) \quad (p(B)\neq 0)$

7 – تطبيق :

نرمي نردا متجانسا مرة واحدة، و نعتبر الحدثين :

A : "الحصول على رقم زوجي" B : "الحصول على رقم أصغر من 4"

هل الحدثان A و B منفصلان و هل هما مستقلان؟

8 – تنبيه !

يجب عدم الخلط بين حدثين غير منسجمان (أي منفصلان $A\cap B = \phi$) و حدثين مستقلان (أي $p(A\cap B) = p(A)\times p(B)$).

IV - الإختبارات المتكررة :

1 – الإختبارات المستقلة :

يمكن لتجربة عشوائية أن تكون مكونة من إختبار واحد أو من عدة إختبارات، نقول إن هذه الإختبارات مستقلة إذا كانت نتائج إحداها لا تؤثر على الباقي.

2 – أمثلة :

- إذا رمينا قطعة نقدية عدة مرات فإن الإختبارات تكون مستقلة.
- السحب بتتابع و بإحلال يشكل إختبارات مستقلة.
- إذا رمينا نفس النرد عدة مرات تكون الإختبارات مستقلة.

3 – حالة خاصة :

إذا كانت تجربة عشوائية تتكرر في نفس الظروف فإن الإختبارات تكون مستقلة.

4 – مبرهنة :

ليكن $(\Omega;p)$ فضاءا إحتماليا منتهيا و A حدثا ضمن Ω و $p = p(A)$.

إذا أعيدت نفس التجربة العشوائية m مرة $(m\in\mathbb{N}^*)$ متتابعة فإن إحتمال تحقق الحدث A، k مرة بالضبط $(k\in\{0;1;2;\dots;m\})$ هو :

$$p(\text{الحصول على الحدث } A\text{، } k \text{ مرة بالضبط}) = C_m^k\, p^k\,(1-p)^{m-k}$$

5 – تطبيق :

نسحب كرتين بالتتابع و بإحلال من صندوق يحتوي على ثلاث كرات سوداء و أربعة بيضاء.

.01 أحسب إحتمال الحدث "سحب كرتين بيضاوين من الصندوق".

نعيد التجربة السابقة خمس مرات مع إرجاع الكرات المسحوبة في كل تجربة.

.02 أحسب إحتمال سحب بالضبط 6 كرات بيضاء مثنى مثنى.

V - المتغير العشوائي :

1 – نشاط :

يحتوي كيس A على ثلاث كرات حمراء و كرتين زرقاوين، ويحتوي كيس B على خمس كرات حمراء و ثلاث كرات زرقاء. نسحب عشوائيا و آنيا كرتين من الكيس A ثم نسحب عشوائيا كرة واحدة من الكيس B.

.01 تحقق من أن عدد الإمكانيات هو 80.

ليكن X المتغير العشوائي الذي يربط كل إمكانية بعدد الكرات الحمراء المسحوبة من الكيسين معا.

.02 حدد القيم التي يأخذها X.

.03 أحسب إحتمال كل من الأحداث التالية :

$\{X=0\} \qquad \{X=1\} \qquad \{X=2\} \qquad \{X=3\}$

.04 لخص ما سبق في جدول.

2 – تعاريف :

ليكن $(\Omega;p)$ فضاءا إحتماليا منتهيا.

- كل تطبيق X من Ω نحو $\mathbb{R}$ $\left(X : \begin{array}{l}\Omega\to\mathbb{R}\\ \omega\to X(\omega)\end{array}\right)$ يسمى متغيرا عشوائيا على Ω.
- المجموعة $X(\Omega) = \{x_1;x_2;\dots;x_m\}$ $(m\in\mathbb{N}^*)$ تسمى مجموعة القيم التي يأخذها X.

في كل ما يلي نعتبر p_k احتمال الحدث $\{X = x_k\}$ أي :

$$\forall\, k\in\{1;2;3;\dots;m\},\quad p_k = p(\{X=x_k\}) = p(\{\omega\in\Omega : X(\omega) = x_k\})$$

a – **قانون إحتمال متغير عشوائي :**

قانون إحتمال متغير عشوائي هو :

x_k	x_1	x_2	x_3	$\dots$	x_m
$p(\{X=x_k\})$	p_1	p_2	p_3	$\dots$	p_m

$$\sum_{k=1}^{m} p(\{X=x_k\}) = p_1+p_2+p_3+\dots+p_m = 1$$

b – **الأمل الرياضي لمتغير عشوائي :**

الأمل الرياضي للمتغير العشوائي X هو :

$$E(X) = \sum_{k=1}^{m} p_k x_k = p_1x_1 + p_2x_2 + \dots + p_m x_m$$

c – مغايرة متغير عشوائي : (صيغة 1)

مغايرة المتغير العشوائي X هو العدد الحقيقي الموجب :

$$v(X) = \sum_{k=1}^{m} p_k\,(x_k - E(X))^2 \qquad = E\left((X - E(X))^2\right)$$

$$= p_1\,(x_1 - E(X))^2 + p_2\,(x_2 - E(X))^2 + \cdots + p_m\,(x_m - E(X))^2$$

d – مغايرة متغير عشوائي : (صيغة 2)

مغايرة المتغير العشوائي X هو العدد الحقيقي الموجب $v(X)$:

$$v(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

بحيث : $E(X^2) = p_1(x_1)^2 + p_2(x_2)^2 + \cdots + p_m(x_m)^2$

e – الإنحراف الطرازي لمتغير عشوائي :

الإنحراف الطرازي للمتغير العشوائي X هو العدد الحقيقي الموجب :

$$\sigma(X) = \sqrt{v(X)}$$

f – دالة التجزيئ لمتغير عشوائي :

التطبيق $\mathcal{F}$ المعرف من $\mathbb{R}$ نحو $[0\,;1]$ بحيث :

$\forall\, x \in \mathbb{R}, \mathcal{F}(x) = p(\{X < x\})$ يسمى دالة التجزيئ للمتغير العشوائي X.

g – تطبيق :

نعتبر المتغير العشوائي X الذي يخضع لقانون الإحتمال التالي :

x_k	-4	-1	0	1	2	5
$p(\{X = x_k\})$	$\frac{12}{33}$	$\frac{7}{33}$	$\frac{3}{33}$	$\frac{2}{33}$	$\frac{4}{33}$	$\frac{5}{33}$

➢ للتحقق من صحة قانون X : مجموع أعداد السطر الثاني = 1

$$\frac{12}{33} + \frac{7}{33} + \frac{3}{33} + \frac{2}{33} + \frac{4}{33} + \frac{5}{33} = 1$$

➢ حساب الأمل الرياضي :

لدينا $E(X) = \sum_{k=1}^{n} p_k x_k = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \cdots + p_n x_n$

$$= \frac{12}{33}\times(-4) + \frac{7}{33}\times(-1) + \frac{3}{33}\times(0) + \frac{2}{33}\times(1) + \frac{4}{33}\times(2) + \frac{5}{33}\times(5)$$

إذن $E(X) = -\frac{20}{33}$

➢ حساب مغايرة X :

نذكر : $\begin{cases} v(X) = E(X^2) - (E(X))^2 \\ E(X^2) = p_1(x_1)^2 + p_2(x_2)^2 + \cdots + p_n(x_n)^2 \end{cases}$

لدينا $E(X^2) = p_1(x_1)^2 + p_2(x_2)^2 + \cdots + p_n(x_n)^2$

$$= \frac{12}{33}\times(-4)^2 + \frac{7}{33}\times(-1)^2 + \frac{3}{33}\times(0)^2 + \frac{2}{33}\times(1)^2 + \frac{4}{33}\times(2)^2 + \frac{5}{33}\times(5)^2$$

إذ ن $E(X^2) = \frac{342}{33}$

و بالتالي $v(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{342}{33} - \left(-\frac{20}{33}\right)^2 = \frac{10886}{1089} \simeq 10$

➢ الإنحراف الطرازي هو: $\sigma(X) = \sqrt{v(X)} = \sqrt{\frac{10886}{1089}} \simeq 3.16$

➢ دالة التجزيئ $\mathcal{F}$ للمتغير العشوائي X :

❖ إذا كان $x \in]-\infty;\ -4]$ فإن : $\mathcal{F}(x) = p(\{X < x\}) = 0$

❖ إذا كان $x \in]-4\,;\ -1]$ فإن : $\mathcal{F}(x) = p(\{X < x\})$

$$= p(\{X = -4\}) = \frac{12}{33}$$

❖ إذا كان $x \in]-1\,;0]$ فإن : $\mathcal{F}(x) = p(\{X < x\})$

$$= p(\{X = -4\}) + p(\{X = -1\})$$
$$= \frac{12}{33} + \frac{7}{33} = \frac{19}{33}$$

❖ إذا كان $x \in]0\,;1]$ فإن : $\mathcal{F}(x) = p(\{X < x\})$

$$= p(\{X = -4\}) + p(\{X = -1\}) + p(\{X = 0\})$$
$$= \frac{19}{33} + \frac{3}{33} = \frac{22}{33}$$

❖ إذا كان $x \in]1; 2]$ فإن : $\mathcal{F}(x) = p(\{X < x\})$

$$= p(X = -4) + p(X = -1) + p(X = 0) + p(X = 1)$$
$$= \frac{22}{33} + \frac{2}{33} = \frac{24}{33}$$

❖ إذا كان $x \in]2; 5]$ فإن : $\mathcal{F}(x) = p(\{X < x\})$

$$= p(X = -4) + p(X = -1) + p(X = 0) + p(X = 1) + p(X = 2)$$
$$= \frac{24}{33} + \frac{4}{33} = \frac{28}{33}$$

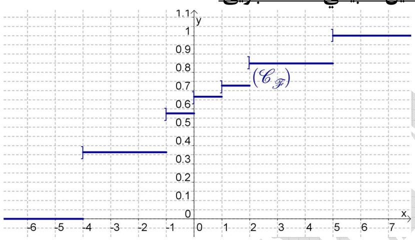
❖ إذا كان $x \in]5; +\infty[$ فإن : $\mathcal{F}(x) = p(\{X < x\})$

$$= p(X = -4) + p(X = -1) + p(X = 0) + p(X = 1) + p(X = 2) + p(X = 5)$$
$$= \frac{28}{33} + \frac{5}{33} = 1$$

❖ خلاصة :

$$\mathcal{F}(x) = \begin{cases} 0 \ \ si\ x \in]-\infty;\ -4] \\ \frac{12}{33}\ \ si\ x \in]-4\,;\ -1] \\ \frac{19}{33}\ \ si\ x \in]-1\,;0] \\ \frac{22}{33}\ \ si\ x \in]0;1] \\ \frac{24}{33}\ \ si\ x \in]1;2] \\ \frac{28}{33}\ \ si\ x \in]2;5] \\ 1\ \ si\ x \in]5;+\infty[\end{cases}$$

➢ التمثيل المبياني لدالة التجزيئ $\mathcal{F}$:



h – التوزيع الحداني :

ليكن $(\Omega; p)$ فضاءا إحتماليا منتهيا و A حدثا ضمن Ω من تجربة عشوائية و $p = p(A)$.

نعيد هذه التجربة m مرة $(m \in \mathbb{N}^*)$ و نعتبر X المتغير العشوائي الذي يربط كل نتيجة بعدد المرات التي يتحقق فيها الحدث A.

➢ إحتمال تحقق الحدث A، k مرة بالضبط $(k \in \{0; 1; \dots;\ m\})$ هو :

$$\forall\ k \in \{0; 1; \dots; m\}, p(\{X = k\}) = C_m^k\, p^k\,(1-p)^{m-k}$$

➢ $v(X) = m \times p \times (1-p)$ و $E(X) = m \times p$

➢ العددان m و p يسميان وسيطا المتغير العشوائي X.

3 – تمرين :

يحتوي كيس V_1 على ثلاث كرات خضراء و كرتين حمراوين و يحتوي كيس V_2 على ثلاث كرات حمراء و كرتين خضراوين.

نسحب كرة واحدة من V_1 و نسحب تآنيا كرتين من V_2، و ليكن X المتغير العشوائي المرتبط بعدد الكرات الحمراء المحصل عليها.

.01 إعط قانون احتمال X.

.02 أحسب $E(X)$ و $v(X)$ و $\sigma(X)$.

.03 عرف ثم مثل دالة التجزيئ للمتغير العشوائي X.

سلسلة تمارين : حساب الإحتمالات
CALCUL DES PROBABILITÉS

Réf : http://sefroumaths.voila.net + ...

التمرين 1 :

نرمي نردين وجوه كل واحد منهما مرقم من 1 إلى 6 و غير مغشوشين.

أحسب إحتمال الحصول على :

.01 رقمين متساويين.

.02 رقمين مختلفين.

.03 رقمين مجموعهما زوجي.

.04 رقمين مجموعهما أصغر من أو يساوي 6.

التمرين 2 :

صندوق يحتوي على خمس كرات بيضاء تحمل الأرقام 1 ;2 ;3 ;4 ;5 و ثلاث كرات سوداء تحمل الأرقام 1 ;2 ;3 و كرتان حمراوان تحملان الرقم 1 ;2.

نسحب تآنيا و عشوائيا ثلاث كرات من الصندوق.

أحسب إحتمال الحصول على :

.01 ثلاث كرات بيضاء.

.02 ثلاث كرات من نفس اللون.

.03 كرة واحدة بالضبط تحمل رقما فرديا.

.04 كرة واحدة على الأقل تحمل رقما زوجيا.

.05 كرة واحدة على الأكثر بيضاء.

.06 ثلاث كرات تحمل أرقاما مجموعها زوجي.

.07 ثلاث كرات من نفس اللون و تحمل أرقاما مجموعها فردي.

.08 ثلاث كرات مختلفة الألوان مثنى مثنى.

.09 لونين بالضبط.

التمرين 3 :

صندوق يحتوي على أربع بيدقات حمراء و ثلاث بيضاء و بيدقتين سوداوين. نسحب بالتتابع و بدون إحلال ثلاث بيدقات من الصندوق.

أحسب إحتمال الحصول على :

.01 ثلاث بيدقات بيضاء.

.02 بيدقة بيضاء بالضبط.

.03 بيدقة بيضاء على الأقل.

.04 ثلاث بيدقات من نفس اللون.

التمرين 4 :

صندوق يحتوي على ست كرات حمراء تحمل الأرقام 0 ;0 ;1 ;1 ;1 ;1 و ثمان كرات بيضاء 0 ;0 ;1 ;1 ;1 ;1 ;1 ;1.

نسحب بتتابع و بإحلال كرتين من الصندوق.

.01 إذا كانت الكرتان المسحوبتان تحملان الرقم 1، فما هو الإحتمال لكي تكونا بيضاوين؟

.02 أحسب إحتمال الحصول على كرتين تحملان نفس اللون علما أنهما تحملان الرقم 1.

التمرين 5 :

نعتبر تلميذين x و y إجتازا إختبارا.

نفترض أن إحتمال نجاح x هو $\frac{1}{3}$ و أن إحتمال نجاح y هو $\frac{2}{5}$.

أحسب إحتمال :

.01 نجاح التلميذين معا.

.02 نجاح التلميذ x فقط.

.03 نجاح تلميذ واحد فقط.

.04 نجاح تلميذ واحد على الأقل.

التمرين 6 :

صندوق يحتوي على ثلاث كرات بيضاء و أربع حمراء و كرتين سوداوين.

نسحب تآنيا من الصندوق ثلاث كرات و نعيد هذه التجربة ست مرات مع إرجاع الكرات بعد كل تجربة.

ما هو إحتمال الحصول على ثلاث كرات من نفس اللون أربع مرات بالضبط؟

التمرين 7 :

يحتوي كيس U_1 على خمس بيدقات : ثلاث تحمل الرقم 2 و بيدقتان تحملان الرقم 3 و يحتوي كيس U_2 على خمس بيدقات : ثلاث بيدقات بيضاء و بيدقتين حمراوين.

نسحب عشوائيا بيدقة واحدة من الكيس U_1 و نسجل رقمها ثم نسحب و في آن واحد n بيدقة من الكيس U_2 حيث n هو الرقم الذي تحمله البيدقة المسحوبة من الكيس U_1.

ليكن X المتغير العشوائي الذي يساوي عدد البيدقات الحمراء المسحوبة.

.01 حدد قانون إحتمال المتغير العشوائي X.

.02 أحسب $E(X)$ و $v(X)$ و $\sigma(X)$.

.03 عرف ثم مثل دالة التجزيئ للمتغير X.

VALEURS COMPARATIFS : قيم للمقارنة

<table>
<tr><td>$1^{ère}$ Question</td><td>$2^{ème}$ Question</td><td>$3^{ème}$ Question</td><td>$4^{ème}$ Question</td><td></td></tr>
<tr><td>$\frac{1}{6}$</td><td>$\frac{5}{6}$</td><td>$\frac{1}{2}$</td><td>$\frac{15}{36}$</td><td>.01</td></tr>
<tr><td>$\frac{1}{12}$</td><td>$\frac{11}{120}$</td><td>$\frac{3}{10}$</td><td>$\frac{5}{6}$</td><td>$\frac{1}{2}$</td><td>$\frac{8}{15}$</td><td>$\frac{1}{30}$</td><td>$\frac{1}{4}$</td><td>$\frac{79}{120}$</td><td>.02</td></tr>
<tr><td>$\frac{1}{84}$</td><td>$\frac{15}{28}$</td><td>$\frac{16}{21}$</td><td>$\frac{5}{84}$</td><td>.03</td></tr>
<tr><td>$\frac{25}{81}$</td><td>$\frac{41}{81}$</td><td></td><td></td><td>.04</td></tr>
<tr><td>$\frac{2}{15}$</td><td>$\frac{1}{5}$</td><td>$\frac{7}{15}$</td><td>$\frac{3}{5}$</td><td>.05</td></tr>
<tr><td colspan="2">$C_6^4 \times \left(\frac{5}{84}\right)^4 \times \left(\frac{79}{84}\right)^2$</td><td></td><td></td><td>.06</td></tr>
<tr><td>$\frac{11}{50};\frac{30}{50};\frac{9}{50}$</td><td>$E(X) = \frac{24}{25}$</td><td>$v(X) = \frac{249}{625}$</td><td>$\sigma(X) = \sqrt{\frac{249}{625}}$</td><td>.07</td></tr>
</table>

بعض المراجع

- موقع الأستاذ محمد مستولي : http://arabmaths.ift.fr
- موقع الأستاذ حميد بوعيون : http://sefroumaths.voila.net
- موقع مؤسسة التميز : http://www.l9adi.com
- موقع الأستاذ سمير لخريسي: http://naja7math.com
- موقع مدارس : http://www.madariss.fr
- موقع مواضيع الإمتحانات الإشهادية : http://cnee.men.gov.ma
- موقع الأستاذ جيل كوستاتيني : http://www.bacamaths.net
- موقع الأستاذ باسكال براشيت : http://www.xm1math.net
- موقع جون–لويس روجيت : http://maths-france.fr
- سلسلة تمارين ديما ديما.
- سلسلة تمارين باك.
- كتاب الرياضيات طبعة برلين رقم الإيداع 4146 سنة 1978 بفرنسا.
- كتاب التحليل للسنة الأولى من السلك الأول شعبة الرياضيات – السملالية مراكش –