1- أ-) من جهة لدينا : $-2 \prec u_0 \prec -1$

ومن جهة ثانية إذا كان $-2 \prec u_n \prec -1$ فإن $0 \prec u_n + 2 \prec 1$

يعني أن : $0 \prec (u_n + 2)^2 \prec 1$

يعني أن : $-2 \prec (u_n + 2)^2 - 2 \prec -1$

أي أن : $-2 \prec u_{n+1} \prec -1$

وبالتالي لكل n من $\mathbb{N}$ لدينا : $-2 \prec u_n \prec -1$

ب-) لكل n من $\mathbb{N}$ لدينا :

$$u_{n+1} - u_n = u_n^2 + 4u_n + 4 - 2 - u_n$$

$$= u_n^2 + 3u_n + 2$$

لندرس إشارة الحدودية $x^2 + 3x + 2$ فنحصل على النتيجة التالية:

x	$-\infty$		-2		-1		$+\infty$
$x^2 + 3x + 2$		$+$	0	$-$	0	$+$	

لكل x من $]-2,1[$ لدينا إذن $x^2 + 3x + 2 \prec 0$

بما أن $-2 \prec u_n \prec -1 \quad (\forall n \in \mathbb{N})$

فإن $u_n^2 + 3u_n + 2 \prec 0 \quad (\forall n \in \mathbb{N})$

أي أن: $u_{n+1} - u_n \prec 0 \quad (\forall n \in \mathbb{N})$

ومنه فالمتتالية تناقصية قطعا .

2- لدينا المتتالية (u_n) تناقصية ومصغورة بالعدد 2- إذن فهي متقاربة.

نضع: $\ell = \lim u_n$ حيث $\ell \in \mathbb{R}$

بما أن $u_{n+1} = (2 + u_n)^2 - 2$ لكل n من $\mathbb{N}$.

فإن ℓ تحقق المعادلة : $\ell = (2 + \ell)^2 - 2$

لدينا : $\ell = (2 + \ell)^2 - 2 \Leftrightarrow \ell^2 + 3\ell + 2 = 0$

$\Leftrightarrow \ell = -1$ أو $\ell = -2$

وبما أن $-2 \prec u_n \prec u_0 = -\frac{5}{4}$ (لأن (u_n) تناقصية)

فإن $-2 \leq \ell \leq -\frac{5}{4}$

يعني أن $\ell \neq -1$ (لأن $-1 \succ -\frac{5}{4}$)

أي أن : $\ell = -2$

إذن $\lim u_n = -2$