

## تمارين خاصة بمستوى الثانية من سلك البكالوريا شعبة العلوم الرياضية

### البنىات الجبرية

نزود  $IR^2$  بقانون تركيب الداخلي المعرف بما يلي:  $\forall (x, y, a, b) \in IR^4 \quad (x, y) * (a, b) = (x + a, ye^a + be^{-x})$

(1) احسب:  $(2, 1) * (1, 0)$  ثم  $(1, 0) * (2, 1)$ . ماذا تستنتج؟

(2) أثبت أن القانون  $*$  تجميعي في  $IR^2$ .

(3) أثبت أن القانون  $*$  يقبل عنصرا محايدا في  $IR^2$ .

(4) بين أن جميع عناصر  $IR^2$  تقبل مماثلا في  $(IR^2, *)$

(5) استنتج بنية  $(IR^2, *)$ .

نذكر أن  $(M_2(IR), +, \times)$  حلقة واحدة.

نضع:  $E = \left\{ M_a = \begin{pmatrix} e^a & 0 \\ ae^a & e^a \end{pmatrix}, a \in \square \right\}$  ونعتبر التطبيق  $f$  من  $\square$  نحو  $E$  المعرف بما يلي:  $\forall a \in \square, f(a) = M_a$

1.أ. بين أن  $E$  جزء مستقر من  $(M_2(IR), \times)$ .

ب. بين أن  $f$  تشاكل تقابلي من  $(\square, +)$  نحو  $(E, \times)$ .

ج. استنتج بنية  $(E, \times)$ .

2. نضع  $(M_a)^0 = I$  و  $(M_a)^1 = M_a$  و  $(M_a)^{n+1} = M_a^n \times M_a$  و  $\forall n \in IN, (M_a)^{n+1} = M_a^n \times M_a$  و  $(M_a)^p = (M_a^{-1})^{-p}$  و  $\forall p \in \square_*, (M_a)^p = (M_a^{-1})^{-p}$

أ. بين أن:  $(M_a)^p = M_{ap}$  و  $\forall p \in \square$

ب. ناقش حسب قيم  $n$  حلول المعادلة:  $(M_x)^n \times M_5 = M_{5n}$  (حيث  $x \in \square$  هو المجهول).

نعتبر المصفوفة:  $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$  و المصفوفة  $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

(1) أحسب  $A^2 - 3A + 2I$  ثم استنتج أن  $A$  تقبل مقلوبا في  $(M_2(IR), \times)$  يتم تحديده.

(2) نعتبر  $E$  مجموعة المصفوفات من نوع:  $M_a = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} a + \frac{1}{a} & a - \frac{1}{a} \\ a & \frac{1}{a} \end{pmatrix}$  حيث  $a \in IR^*$

نضع  $K = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$  ;  $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

(أ) أحسب  $J^2$  ;  $K^2$  ,  $JK$  ,  $KJ$ .

(ب) أحسب  $M_a$  بدلالة  $J$  و  $K$

(ج) بين أن  $E$  جزء مستقر من  $(M_2(IR), \times)$

(3) نعتبر التطبيق  $f$  من  $IR^*$  نحو  $E$  المعرف بما يلي:  $f(a) = M_a$

(أ) بين أن  $f$  تشاكل تقابلي من  $(IR^*, \times)$  نحو  $(E, \times)$

(ب) استنتج بنية  $(E; \times)$  ثم حدد مقلوب  $M_a$  في  $(E; \times)$

5 لكل زوج  $(x, y)$  من المجموعة  $\mathbb{R}^2$  نضع:  $x \perp y = x\sqrt{1+y^2} + y\sqrt{1+x^2}$   
 (1- أ) تحقق من أن  $\perp$  قانون تركيب داخلي في  $\mathbb{R}$ .

(ب) تحقق من أن لكل زوج  $(x, y)$  من المجموعة  $\mathbb{R}^2$ :  $\sqrt{1+x^2}\sqrt{1+y^2} + xy = \sqrt{1+(x \perp y)^2}$   
 1 (2) أ) بين أن التطبيق  $u$  المعرف من  $\mathbb{R}$  نحو  $\mathbb{R}$  بما يلي:  $u(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$  تقابل من  $\mathbb{R}$  نحو  $\mathbb{R}$  وحدد  $u^{-1}$ .  
 (ب) باستعمال التطبيق  $u$  أو  $u^{-1}$  بين أن:  $(\mathbb{R}; \perp)$  زمرة تبادلية.

(ج) حدد العنصر المحايد للزمرة  $(\mathbb{R}; \perp)$  ومماثل عنصر  $x$  من المجموعة  $\mathbb{R}$  بالنسبة للقانون  $\perp$ .  
 (3) نضع لكل  $x \in \mathbb{R}$  و لكل عدد عدد صحيح طبيعي  $n \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$ :  $x^{[0]} = 0$  و  $x^{[1]} = x$  و  

$$x^{[n]} = \underbrace{x \perp x \perp \dots \perp x}_{n \text{ مرة}}$$
  
 احسب  $x^{[n]}$  بدلالة  $x$  و  $n$ .

نذكر أن  $(M_3(\mathbb{R}), +, \cdot)$  حلقة واحدة.

نعتبر المجموعة  $G = \{M_\theta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} / \theta \in \mathbb{R}\}$ .

(1) بين أن  $G$  جزء مستقر بالنسبة لضرب المصفوفات في  $M_3(\mathbb{R})$ .

(2) نعتبر المجموعة:  $U = \{z \in \mathbb{C} / |z| = 1\}$ .

بين أن  $(U, \cdot)$  زمرة جزئية للزمرة  $(\mathbb{C}^*, \cdot)$ .

(3) نعتبر التطبيق  $\phi$  المعرف من  $U$  نحو  $G$  بحيث:  $\phi(e^{i\theta}) = M_\theta$ .

(أ) بين أن  $\phi$  تشاكل تقابلي من  $(U, \cdot)$  نحو  $(G, \cdot)$ .

(ب) استنتج أن  $(G, \cdot)$  زمرة تبادلية.

(4) احسب  $(M_\theta)^{-1}$  و  $(M_\theta)^n$  حيث  $n$  عدد صحيح طبيعي غير منعدم.

A- نعتبر المجموعة  $G = \mathbb{Q} - \{\sqrt{3}\}$ .

لكل  $a$  و  $b$  من  $G$  نضع:  $a * b = a + b - \frac{ab}{\sqrt{3}}$ .

(1) تحقق من أن  $\forall (a, b) \in G^2$   $a * b = \sqrt{3} - \sqrt{3}(\frac{a}{\sqrt{3}} - 1)(\frac{b}{\sqrt{3}} - 1)$ .

(2) بين أن  $(G, *)$  زمرة تبادلية.

B- نعتبر المجموعة  $\Gamma = \left\{ M(a) = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 2\sqrt{3} - a & a \\ a & 2\sqrt{3} - a \end{pmatrix} / a \in G \right\}$ .

و المصفوفتين  $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  و  $J = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

(1) أ- تحقق من أن  $J^2 = -2J$  و أن  $\forall a \in G, M(a) = I + \frac{a}{2\sqrt{3}} J$ .

ب- بين أن المجموعة  $\Gamma$  جزء مستقر من  $(M_2(\mathbb{Q}), \cdot)$ .

(2) نعتبر التطبيق  
 $f: G \rightarrow \Gamma$   
 $a \mapsto M(a)$

أ- بين أن  $f$  تشا كل تقابلي من  $(G, *)$  نحو  $(\Gamma, \times)$ .  
 ب- استنتج بنية  $(\Gamma, \times)$ .

نعتبر المصفوفات الآتية :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \text{ و } I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ و } O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(1) أ) تحقق أن :  $(A+3I) \times (A-I) = 0$

ب) استنتج  $A^2$  بدلالة  $A$  و  $I$

(2) نعتبر المجموعة  $E = \{M(a, b) \in M_3(\square) / M(a, b) = aI + bA, a \in \square, b \in \square\}$

أ) بين أن :  $(E, +, \cdot)$  فضاء متجهي حقيقي

ب) بين أن الأسرة  $(I, A)$  أساس للفضاء المتجهي  $(E, +, \cdot)$

(3) أ) بين أن  $E$  جزء مستقر من  $(M_3(\square), \times)$

ب) بين أن :  $(E, +, \times)$  حلقة واحدة وتبادلية . هل هي كاملة؟

(4) حدد العناصر التي تقبل مقلوبا في  $(E, \times)$  محددا مقلوبا.

نعتبر في  $M_2(\mathbb{R})$  المصفوفتين :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ و } J = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{3\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

و المجموعة :

$$E = \left\{ M(a, b) = \begin{pmatrix} a + \frac{\sqrt{2}}{2}b & -\frac{\sqrt{2}}{2}b \\ \frac{3\sqrt{2}}{2}b & a - \frac{\sqrt{2}}{2}b \end{pmatrix} / (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

1- أ- بين أن  $(E, +, \cdot)$  فضاء متجهي حقيقي .

ب- بين أن الأسرة  $(I, J)$  أساس في الفضاء المتجهي  $(E, +, \cdot)$

2- نعتبر التطبيق :  $\square^* \rightarrow E^*$  :  $h$  حيث :  $E^* = E - \{M(a, b)\}$

$$a + ib \mapsto M(a, b)$$

أ- تحقق من أن  $J^2 = -I$

ب- استنتج أن  $E$  جزء مستقر في  $(M_2(\mathbb{R}), \times)$

ج- بين أن  $h$  تشاكل تقابلي من  $(\square^*, \times)$  نحو  $(E^*, \times)$

د- استنتج بنية  $(E^*, \times)$

3- حدد في  $E$  المصفوفة  $X$  حيث  $X^3 = J$

نعتبر المصفوفتين :

$$I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ و } J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(1) احسب  $J^2$  بدلالة  $I$  و  $J$

(2) بين أن  $(I, J)$  أسرة حرة في  $(M_3(\square), +, \cdot)$

$$(3) \text{ نعتبر المجموعة : } F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix} / (a, b) \in \mathbb{Q}^2 \right\}$$

(أ) بين أن  $F$  فضاء متجهي جزئي من  $(M_3(\mathbb{Q}), +, \cdot)$

(ب) تحقق أن  $I \in F$  و  $J \in F$

(ج) استنتج أساسا للفضاء المتجهي  $(F, +, \cdot)$

(4) (أ) بين أن  $(F, +, \times)$  حلقة واحدة.

(ب) بين أن  $J$  تقبل مقلوبا في  $F$  ثم حدد  $J^{-1}$  (يمكنك استعمال السؤال 1)

نذكر أن  $(M_2(\mathbb{R}), +, \times)$  حلقة واحدة و  $(M_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$  فضاء متجهي حقيقي و  $(C, +, \times)$  جسم تبادلي .

$$\text{نضع : } E = \left\{ M(a, b) = \begin{pmatrix} a & b \\ -2b & a+2b \end{pmatrix} / (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\} \text{ و } I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ و } J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

(1) أ - بين أن  $(E, +, \cdot)$  فضاء متجهي جزئي من الفضاء المتجهي الحقيقي  $(M_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$  .

ب - بين أن الأسرة  $(I, J)$  أساس في الفضاء المتجهي الحقيقي  $(E, +, \cdot)$  .

$$(2) \text{ نعتبر التطبيق : } f: C \rightarrow E \\ a+ib \mapsto M(a-b, b)$$

أ - بين أن  $E$  جزء مستقر من  $(M_2(\mathbb{R}), \times)$

ب - بين أن  $f$  تشاكل تقابلي من  $(\mathbb{C}, \times)$  نحو  $(E, \times)$  .

(3) بين أن  $(E, +, \times)$  حلقة واحدة .

(4) أ - حل في المجموعة  $\mathbb{Q}$  المعادلة :  $z^3 = 2 - 2i$  واكتب حلولها على الشكل الجبري .

ب - استنتج في المجموعة  $E$  حلول المعادلة :  $M^3 - 4I + 2J = 0$

لتكن  $E$  مجموعة الدوال العددية  $f_{(a,b)}$  بحيث  $\forall x \in \mathbb{R} : f_{(a,b)}(x) = (ax+b)e^{2x}$

(1) أ - بين أن  $(E, +, \cdot)$  فضاء متجهي حقيقي.

ب - نضع  $B = (f_{(1,0)}, f_{(0,1)})$  بحيث  $f_{(0,1)}(x) = e^{2x}$  و  $f_{(1,0)}(x) = xe^{2x}$  .

بين أن  $B$  أساس للفضاء المتجهي  $E$  .

(2) نزود المجموعة  $E$  بقانون تركيب داخلي معرف كما يلي:  $f_{(a,b)} T f_{(c,d)} = f_{(ac-bd, bc+ad)}$  لكل  $f_{(a,b)}$  و  $f_{(c,d)}$  من  $E$

نعتبر التطبيق  $\phi: \mathbb{Q}^* \rightarrow E^*$  بحيث  $\phi(z) = f_{(a,b)}$  مع  $z = a + ib$  مع  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$

أ - بين أن  $\phi$  تشاكل تقابلي من  $(\mathbb{Q}^*, \times)$  نحو  $(E^*, T)$

ب - استنتج بنية  $(E^*, T)$  .

ج - بين أن  $(E, +, T)$  جسم تبادلي.

د - حل في  $E$  المعادلة  $f_{(a,b)} T f_{(a,b)} T \dots T f_{(a,b)} = f_2$

n مرة

$M_3(\mathbb{Q})$  هي مجموعة المصفوفات المربعة من الرتبة 3 .

نذكر أن  $(\mathcal{M}_3(\square), +, \times)$  حلقة واحدة وحدتها  $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  وأن  $(\mathcal{M}_3(\square), +, \cdot)$  فضاء متجهي حقيقي .

لتكن  $E$  مجموعة المصفوفات  $M(a, b, c) = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & a+c & b \\ c & b & a \end{pmatrix}$  حيث  $a$  و  $b$  و  $c$  أعداد حقيقية

$$K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{و} \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ونعتبر المصفوفتين}$$

(1) بين أن  $(E, +, \cdot)$  فضاء متجهي حقيقي

(2) بين أن  $(I, J, K)$  أساس للفضاء المتجهي الحقيقي  $(E, +, \cdot)$

(3) أ- تحقق أن  $J^2 = I + K$  وأن  $K^2 = I$  وأن  $JK = KJ = J$

ب- استنتج أن  $E$  جزء مستقر من  $(\mathcal{M}_3(\square), \times)$

ج- بين أن  $(E, +, \times)$  حلقة تبادلية وواحدة

(4) هل  $(E, +, \times)$  جسم ؟ ( يمكنك استعمال (3) أ- )

$$(5) \text{ نضع } X = \frac{1}{\sqrt{2}} J$$

أ- بين أن  $X^2 = \frac{1}{2}(I + K)$  ثم أن  $X^3 = X$

ب- استنتج أن لكل  $n$  من  $\mathbb{N}^*$   $X^{2n-1} = X$

$$E = \left\{ M(a, b, c) = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & a+c & b \\ c & b & a \end{pmatrix} / (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$$

(1)- أ- بين أن  $(E, +, \cdot)$  فضاء متجهي حقيقي .

ب- نضع :  $I = M(1, 0, 0)$  و  $J = M(0, 1, 0)$  و  $K = M(0, 0, 1)$

← بين أن الأسرة  $B = (I, J, K)$  أساس للفضاء المتجهي  $E$  و حدد  $\dim(E)$  .

(2)- أ- أحسب  $J^2$  و  $K^2$  و  $J \times K$  و  $K \times J$  .

ب- بين أن  $E$  جزء مستقر في  $(\mathcal{M}_3(\square), \times)$  .

(3)- بين أن  $(E, +, \times)$  حلقة واحدة ، هل هي تبادلية ؟ هل هي حلقة كاملة ؟

(4)- نعتبر المصفوفة  $P = M(1, 0, -3)$  .

أ- أحسب  $P^2$  و حدد علاقة بين  $P^2$  و  $P$  و  $I$  ( حيث  $I$  هي المصفوفة الوحدة ) .

ب- بين أن المصفوفة  $P$  تقبل مقلوبا  $P^{-1}$  ينبغي تحديده .

نذكر بأن  $(M_3(\mathbb{R}); +, \times)$  حلقة واحدة.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ و } I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ نعتبر المصفوفتين}$$

$$A^2 = A + 2I \text{ أ- تحقق من أن:}$$

ب- استنتج أن  $A$  تقبل مقلوبا في  $M_3(\mathbb{R})$  ثم حدد  $A^{-1}$

$$(2) \text{ لتكن } E \text{ مجموعة المصفوفات } M(a; b) \text{ حيث: } M(a; b) = aI + bA \text{ و } (a; b) \in \mathbb{R}^2$$

أ- بين أن  $E$  جزء مستقر في  $(M_3(\mathbb{R}); +, \times)$

ب- بين أن  $(E; +, \times)$  حلقة تبادلية و واحد.

(3) نعرّف في  $\mathbb{R}^2$  قانوني التركيب الداخليين  $+$  و  $*$  كالتالي:

$$\forall (a; b) \in \mathbb{R}^2 ; \forall (c; d) \in \mathbb{R}^2$$

$$(a; b) + (c; d) = (a + c; b + d)$$

$$(a; b) * (c; d) = (ac + 2bd; ad + bc + bd)$$

أ- احسب:  $(1; 1) * (2; -1)$

$$h: \begin{cases} E \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ M(a, b) \rightarrow (a, b) \end{cases} \text{ ب- نعتبر التطبيق:}$$

بين أن  $h$  تشاكل تقابلي من  $(E; +)$  نحو  $(M_3(\mathbb{R}); +)$  و من  $(E; \times)$  نحو  $(\mathbb{R}^2; *)$

ج- بين أن القانون  $*$  توزيعي بالنسبة للقانون  $+$  في  $\mathbb{R}^2$  ثم استنتج بنية  $(\mathbb{R}^2; +, *)$

د- هل  $(\mathbb{R}^2; +, *)$  جسم ؟ علل جوابك

نذكر أن  $(M_2(\mathbb{C}), +, \cdot)$  فضاء متجهي حقيقي و  $(M_2(\mathbb{C}), +, \cdot)$  حلقة واحدة وحدتها

$$M_2(\mathbb{C}) \text{ هي المصفوفة المنعدمة في } O_2. I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

نعتبر في  $M_2(\mathbb{C})$  المصفوفة التالية:  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$  ولتكن  $E$  المجموعة التالية:

$$E = \left\{ xI + yA / (x, y) \in \mathbb{C}^2 \right\}$$

$$(1) \text{ أ- تحقق أن: } A^2 = -A - I$$

ب- بين أن  $A$  تقبل مقلوبا  $A^{-1}$  في  $M_2(\mathbb{C})$  و حدده.

(2) أثبت أن  $(A, I)$  أسرة حرة في  $(M_2(\mathbb{C}), +, \cdot)$ .

(3) بين أن  $(E, +, \cdot)$  فضاء متجهي حقيقي من  $M_2(\mathbb{C})$  و حدد بعده.

(4) نعتبر التطبيق  $f$  المعروف من  $\mathbb{C}$  نحو  $E$  بمايلي:

$$f(x + jy) = xI + yA \quad \forall (x, y) \in \mathbb{C}^2 \quad \left( j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

أ- بين أن  $f$  تشاكل تقابلي من  $(\mathbb{C}, \times)$  نحو  $(E, \times)$ .

ب- بين أن  $(E, +, \cdot)$  جسم تبادلي.

ج- حل في  $E$  المعادلة:  $X^2 - (A + 2I)X + 2A = O_2$ .

$$\text{لكل } (a, b) \text{ من } \mathbb{C}^2 \text{ نعتبر المصفوفة } M(a, b) = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a - b \end{pmatrix} \text{ من } M_2(\mathbb{C})$$

نعتبر المجموعة :  $E = \{M(a,b)/(a,b) \in \mathbb{R}^2\}$

- 1- بين أن  $E$  جزء مستقر من  $(M_2(\mathbb{R}), +, \times)$ .
- 2- بين أن  $(E, +, \times)$  حلقة تبادلية واحدة.
- 3- أ- بين أن لكل  $x$  و  $y$  من  $\mathbb{R}$  لدينا:  $x^2 - xy + y^2 = 0 \Leftrightarrow x = y = 0$   
 ب- حدد العناصر  $M(a,b)$  من  $E$  التي تقبل مقلوبا في الحلقة  $(E, +, \times)$ .  
 ج- استنتج أن  $(E, +, \times)$  جسم تبادلي.
- 4- بين أن  $(E, +, \times)$  فضاء متجهي حقيقي بعده 2.

نذكر أن  $(M_2(\mathbb{R}), +, \times)$  حلقة واحدة وحدتها  $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  و  $(M_2(\mathbb{R}), +, \bullet)$  فضاء متجهي حقيقي .

نعتبر المصفوفة  $A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} \\ \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{7}{4} \end{pmatrix}$

(1) بين أن:  $A^2 - 3A + 2I_2 = O$  حيث:  $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(2) لتكن  $E$  المجموعة :  $E = \{xA + yI_2 / (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$

- (أ) بين أن  $E$  زمرة جزئية من  $(M_2(\mathbb{R}), +)$
- (ب) بين أن  $E$  جزء مستقر من  $(M_2(\mathbb{R}), \times)$
- (ج) بين أن  $(E, +, \times)$  حلقة واحدة وتبادلية
- (د) احسب  $\det(A - I_2)$

(3) هل  $(E, +, \times)$  جسم ؟ علل جوابك

(4) (أ) بين أن  $(E, +, \bullet)$  فضاء متجهي حقيقي

(ب) بين أن  $B = (I_2, A)$  أساس للفضاء المتجهي الحقيقي  $(E, +, \bullet)$

(ج) حدد زوج إحداثياتي  $A^{-1}$  بالنسبة للأساس  $B$  ثم استنتج أن  $B' = (A, A^{-1})$  أساسا للفضاء المتجهي  $(E, +, \bullet)$

(5) حدد زوج إحداثياتي  $I_2$  بالنسبة للأساس  $B'$

### تمارين حول الأعداد العقدية

نعتبر المعادلة :  $z^n = (iz + 2i)^n, n \in \mathbb{N}^*, z \in \mathbb{C}$

(1) أ- حدد الشكل المثلثي للعددين  $z_1$  و  $z_2$  حلي المعادلة  $(E_2)$  ( $\text{Im } z_1 > 0$ )

ب- نضع :  $u_p = z_1^p + z_2^p, \forall p \in \mathbb{N}$  بين أن:  $u_p = 2\sqrt{2}^p \cos \frac{3p\pi}{4}$

ج- استنتج قيم  $p$  التي من أجلها يكون:  $u_p = (\sqrt{2})^{p+1}$

(2) في المستوى العقدي المنسوب إلى م.م.م.  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ . نعتبر النقطتين  $A_{(-2)}$  و  $M_{(z)}$  حيث  $z \in \mathbb{C}$ .

أ- بين أنه إذا كان  $z$  حلا للمعادلة  $(E_n)$  فإن  $OM = AM$ .

ب- استنتج أن كل حلول المعادلة  $(E_n)$  تكتب على شكل  $-1 + \lambda i, \lambda \in \mathbb{C}$ .

(3) أ- حل في  $\mathbb{C}$  المعادلة  $(E_n)$ .

ب- بين أن حلول  $(E_n)$  تكتب على شكل  $z_k = -1 + i \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{4}\right)$   $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$

نعتبر في  $\square$  مجموعة الأعداد العقدية المعادلة التالية :  $\frac{1}{2}z^3 - (1+i)z^2 + 2(1+i)z - 4i = 0$  : (E).

(1) أ) بين أن المعادلة (E) تقبل حلا تخيليا صرفا  $z_0$  يجب حديده.

ب) حل في  $\square$  المعادلة (E)

(2) في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم  $(O, \vec{u}, \vec{v})$  نعتبر النقط التالية:  $A(1+i\sqrt{3})$  ,  $B(1-i\sqrt{3})$  ,  $C(2i)$  أ) بين أن:  $OA = OB$

ب) حدد لحق النقطة D منتصف القطعة  $[AC]$  وحدد قياسا للزاوية  $(\vec{u}; OD)$

ج) استنتج القيم المضبوطة للعدد  $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$  ,  $\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$

د) لتكن  $O'$  صورة  $O$  بالدوران  $R_1$  الذي مركزه  $A$  وزاويته  $-\frac{\pi}{2}$  و  $B'$  صورة  $B$  بالدوران  $R_2$  الذي مركزه

$A$  وزاويته  $\frac{\pi}{2}$ . حدد لحقي  $O'$  ,  $B'$

هـ) لتكن I منتصف القطعة  $[OB]$  بين أن  $(AI)$  ارتفاع في المثلث  $AO'B'$

ليكن  $a$  عددا عقدياً حيث  $a \neq i$ ؛ نعتبر  $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$  , و  $\bar{j}$  مرافقه

نعتبر الحدودية  $P$  المعرفة بما يلي :  $(\forall z \in \mathbb{C}) : P(z) = z^2 + (a-i)z + (a-i)^2$

(1) أ- تحقق أن :  $P(z) = [z - (a-i)j] \times [z - (a-i)\bar{j}]$

ب- حل في  $\square$  المعادلة :  $P(z) = 0$

(2) في المستوى العقدي المنسوب إلى  $M$ ، نعتبر النقط  $A$  و  $B$  و  $C$  التي ألحاقها  $z_A = i - a$  و  $z_B = (a-i)j$

و  $z_C = (a-i)\bar{j}$  على التوالي . نعتبر الدوران الذي مركزه  $A$  ويحول النقطة  $B$  إلى  $C$  .

أ- حدد زاوية هذا الدوران  $r$  .

ب- إعط الكتابة العقدية للدوران  $r$  .

(3) نفترض أن  $a = 1$

أ- حدد الشكل المثلثي للأعداد العقدية  $z_A, z_B, z_C$  .

ب- حدد  $d$  لحق النقطة  $D$  بحيث يكون الرباعي  $ABDC$  متوازي الأضلاع

ج- بين أن  $(AD) \perp (BC)$  واستنتج طبيعة الرباعي  $ABDC$

نعتبر المعادلة التالية في  $\square$  ,  $(E); 2z^2(1 - \cos(2\theta)) - 2z \sin(2\theta) + 1 = 0$  . حيث  $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right] \cup \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

(1) حدد  $z_1$  و  $z_2$  حلي المعادلة (E)

(2) أكتب على الشكل المثلثي العددين  $z_1$  و  $z_2$  ( ناقش حسب قيم  $\theta$  ).

(3) نعتبر النقط  $A\left(\frac{e^{-i\theta}}{2 \sin \theta}\right), B\left(\frac{e^{i\theta}}{2 \sin \theta}\right), I\left(\frac{1}{2 \sin \theta}\right)$

أ- حدد المجموعة  $\Sigma$  للأعداد الحقيقية  $\theta$  من  $\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right] \cup \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  بحيث يكون المثلث  $OAB$  متساوي الساقين

و قائم الزاوية في  $O$  .

ب- أعط التمثيل العقدي للدوران الذي مركزه  $I$  ويحول  $A$  إلى  $B$  .

نعتبر في المجموعة  $\square$  الحدودية :  $P(z) = z^3 - z^2 - (5 + 4i)z + 21 - 12i$

(1) حل في المجموعة  $\square$  المعادلة  $P(z) = 0$  علماً أن لها حلاً حقيقياً .

2) المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر  $(O; \vec{u}; \vec{v})$  .

لتكن  $A$  و  $B$  و  $I$  النقط التي الحاقها على التوالي :  $z_A = 3+2i$  و  $z_B = -3$  و  $z_I = 1-2i$

أ - احسب :  $Z = \frac{z_I - z_A}{z_I - z_B}$  واستنتج طبيعة المثلث  $IAB$  .

ب -  $z_c$  لحق النقطة  $C$  صورة النقطة  $I$  بالتحاكي التي مركزه  $A$  ونسبته 2 .

ج - لتكن النقطة  $D$  مرجح النظمة المترنة  $\{(A;1);(B;-1);(C;1)\}$  . حدد لحق النقطة  $D$  .

د - بين أن الرباعي  $ABCD$  مربع .

3) حدد  $(\Gamma)$  مجموعة النقط  $M$  التي لحقها  $z$  بحيث :  $\|\vec{MA} - \vec{MB} + \vec{MC}\| = \frac{1}{2} \|\vec{MA} + \vec{MC}\|$  وأنشئها .

4) حدد  $(C)$  مجموعة النقط  $M$  التي لحقها  $z$  بحيث :  $\|\vec{MA} - \vec{MB} + \vec{MC}\| = 4\sqrt{5}$  وأنشئها .

A) نعتبر في المجموعة  $\square$  المعادلة :  $z^3 - (i\sqrt{2})z^2 + z(-1+i\sqrt{3}) + \sqrt{6} + (\sqrt{2})i = 0$  (E)

1) بين أن المعادلة  $E$  تقبل حلا تحليليا صرفا تحده و أن :  $(E) \Leftrightarrow (z - z_0)(z^2 - 1 + i\sqrt{3}) = 0$

2) حل في  $\square$  المعادلة  $E$  .

3) بين أن النقط  $M_0$  و  $M_1$  و  $M_2$  صور الحلول  $z_0$  و  $z_1$  و  $z_2$  للمعادلة (E) ،

في المستوى العقدي ، هي رؤوس مثلث قائم الزاوية ، و تنتمي إلى دائرة مركزها أصل المعلم .

B) 1-أ. حل في  $\square$  المعادلة :  $z^3 = 1$

ب. نعتبر العدد العقدي :  $j = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}$

ج) تحقق أن :  $1 + j + j^2 = 0$  و أن  $-j^2 = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}$  .

2) - نعتبر الدوران  $R$  الذي مركزه النقط  $C$  ذات اللق  $c$  و زاويته  $\frac{\pi}{3}$  و الذي يربط كل نقطة  $M$  لحقها  $z$  بالنقطة  $M'$  التي لحقها  $z'$  .

أ-بين أن  $z' = -j^2 z - jc$

ب- لتكن  $A$  و  $B$  نقطتين من المستوى العقدي لحقهما على التوالي  $a$  و  $b$  . بين أن المثلث  $ABC$  متساوي الأضلاع إذا و فقط إذا كان :

$$a + bj^2 + cj = 0 \text{ أو } a + bj + cj^2 = 0$$

3) حدد مجموعة النقط  $M$  التي لحقها  $z$  ، من المستوى العقدي ، بحيث تكون النقط  $M(z)$  و  $P(z-1)$  و  $Q(z^2)$  مستقيمية .

المستوى العقدي منسوب الى معلم متعامد ممنظم مباشر  $(O, \vec{u}, \vec{v})$  و  $m$  عدد عقدي .

1) نعتبر في  $\square$  المعادلة :  $(E) : z^2 - (m - i \bar{m} + 1 - i)z - i|m - i|^2 = 0$

أ- تحقق أن مميز المعادلة هو :  $\Delta = (m + i \bar{m} - 1 - i)^2$

ب- حل في  $\square$  المعادلة (E) .

ج- بين أن  $m$  ليس حلا للمعادلة (E)

2) في كل مايلي نفترض أن  $m \neq i$  ونضع :  $z_1 = m - i$  و  $z_2 = 1 - i\bar{m}$

نعتبر في المستوى العقدي النقطتين  $A(z_1)$  و  $B(z_2)$

أ- بين أن  $A \neq O$  و  $B \neq O$  وأن  $OB = OA$

ب- حدد مجموعة النقط  $M(m)$  بحيث يكون  $(OA) \perp (OB)$

ج- حدد مجموعة النقط  $M(m)$  تكون النقط  $O$  و  $A$  و  $B$  مستقيمية.

د- حدد القياس الرئيسي للزاوية الموجهة  $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$  في الحالة  $m = e^{i\frac{\pi}{3}}$

المستوى العقدي منسوب الى معلم متعامد ممنظم  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ .

نعتبر التطبيق  $g$  المعروف من  $\mathbb{C} \setminus \{i\}$  الى  $\mathbb{C}$  بحيث  $g(z) = \frac{iz}{z-i}$

(1) حل في المجموعة  $\mathbb{C}$  المعادلة  $g(z) = \frac{i}{z}$ .

(2) أ- بين أن :  $(\forall z \in \mathbb{C} - \{i\}) (g(z) \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow |z|^2 = \text{Im}(z))$

ب- استنتج مجموعة النقط  $M(z)$  بحيث  $g(z)$  تخيلي صرف.

(3) أ- بين أن المجموعة  $C = \{M(z) : |g(z) - i| = 2\}$  هي دائرة ينبغي تحديد مركزها و شعاعها .

ب- بين أن المجموعة  $D = \left\{ M(z) : \arg(g(z) - i) \equiv \frac{\pi}{3} \right\}$  هي نصف مستقيم محروم من النقطة  $A(i)$ .

ج- حدد تقاطع المجموعتين  $C$  و  $D$ .

(4) نضع  $z = e^{i\theta}$  حيث  $\theta \in [0, \pi[$ . حدد بدلالة  $\theta$  معيار و عمدة العدد العقدي  $g(z)$ .

المستوى العقدي منسوب لمعلم متعامد ممنظم و مباشر  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ .

نضع :  $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$  و نعتبر النقط  $A$  و  $B$  و  $C$  التي ألقاها على التوالي  $a = 8$  و  $b = 6j$  و  $c = 8j^2$ .

لتكن  $A'$  صورة  $B$  بالدوران  $r_1$  الذي مركزه  $C$  وزاويته  $\frac{\pi}{3}$  و  $B'$  صورة  $C$  بالدوران  $r_2$  الذي مركزه  $A$  وزاويته  $\frac{\pi}{3}$

و  $C'$  صورة  $A$  بالدوران  $r_3$  الذي مركزه  $B$  وزاويته  $\frac{\pi}{3}$ .

(1)- أنشئ النقط  $A, B, C, A', B', C'$  في المعلم  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ .

(2)- نضع :  $a', b', c'$  ألقاق  $A', B', C'$  على التوالي .

أ- بين أن  $a'$  عددا حقيقيا .

ب- بين أن :  $b' = e^{-i\frac{\pi}{3}}$  و إستنتج أن  $O \in (BB')$ .

ج- بين أن :  $c' = 7 + 7i\sqrt{3}$ .

د- بين أن المستقيمت  $(AA')$  و  $(BB')$  و  $(CC')$  تتلاقى في النقطة  $O$ .

(3)- أ- أحسب المسافة  $OA + OB + OC$ .

ب- بين أن :  $j^3 = 1$  و  $1 + j + j^2 = 0$ .

ج- نعتبر نقطة  $M$  لحقها  $z$  في المستوى العقدي  $(P)$ .

إستنتج أن :  $|(a-z) + (b-z)j^2 + (c-z)j| = |a + bj^2 + cj| = 22$ .

د- أثبت أن المسافة  $MA + MB + MC$  دنوية عندما يكون  $M = O$ .

المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ .

نعتبر في المجموعة  $\square$  الحدودية:  $P(z) = z^3 - z^2 - (5 + 4i)z + 21 - 12i$

(1) حل في المجموعة  $\square$  المعادلة  $P(z) = 0$  علما أن لها حلا حقيقيا.

(2) المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر  $(O; \vec{u}; \vec{v})$ .

لتكن  $A$  و  $B$  و  $I$  النقطة التي أحاقها على التوالي:  $z_A = 3 + 2i$  و  $z_B = -3$  و  $z_I = 1 - 2i$

أ- احسب:  $Z = \frac{z_I - z_A}{z_I - z_B}$  واستنتج طبيعة المثلث  $IAB$ .

ب-  $z_C$  لحق النقطة  $C$  صورة النقطة  $I$  بالتحاكي التي مركزه  $A$  ونسبته 2.

ج- لتكن النقطة  $D$  مرجح النظمة المتزنة  $\{(A;1); (B;-1); (C;1)\}$ . حدد لحق النقطة  $D$ .

د- بين أن الرباعي  $ABCD$  مربع.

(3) حدد  $(\Gamma)$  مجموعة النقط  $M$  التي لحقها  $z$  بحيث:  $\|\vec{MA} - \vec{MB} + \vec{MC}\| = \frac{1}{2} \|\vec{MA} + \vec{MC}\|$  وأنشئها.

(4) حدد  $(C)$  مجموعة النقط  $M$  التي لحقها  $z$  بحيث:  $\|\vec{MA} - \vec{MB} + \vec{MC}\| = 4\sqrt{5}$  وأنشئها.

ليكن  $a$  عددا عقديا غير منعدم.

نعتبر في المجموعة  $\square$  المعادلة التالية:  $(E_a): z^3 + (3 - a^2)z + 2i(1 + a^2) = 0$

(1) أ- تحقق من أن العدد  $z_0 = 2i$  حل للمعادلة  $(E_a)$

ب- حدد الحلين الآخرين  $z_1$  و  $z_2$  بحيث  $z_1 - z_2 = 2a$

(2) نعتبر فيما يلي النقط  $M_0(z_0)$ ؛  $M_1(z_1)$  و  $M_2(z_2)$

نفترض في هذه الفقرة أن:  $|a| = 1$  وليكن  $I$  منتصف القطعة  $[M_1M_2]$

أ- بين أن المسافة  $M_1M_2$  والنقطة  $I$  غير مرتبطان بالعدد  $a$

ب- استنتج أن  $M_1$  و  $M_2$  تنتميان إلى دائرة ثابتة  $(C)$  عندما يتغير  $a$  في  $\square^*$

ج- لتكن  $A$  النقطة التي لحقها  $a$ . حدد قيم  $a$  التي تكون من أجلها النقط  $A$ ؛  $M_1$  و  $M_2$  مستقيمة.

(3) أ- بين أن:  $a \in \mathbb{R} \Leftrightarrow M_1M_0 = M_0M_2$

ب- حدد قيمة العدد  $a$  علماً أن  $M_2$  هي صورة  $M_1$  بالدوران  $R$  الذي مركزه  $M_0$  وزاويته  $\frac{\pi}{2}$

I- نعتبر في  $\square$  المعادلة:  $(E_a): 2z^2 + a(1-i)z + a^2(1-i) = 0$  حيث  $a$  عدد عقدي غير منعدم.

(1) أحسب  $(a + 3ia)^2$ .

(2) حدد  $z_1$  و  $z_2$  حلي المعادلة  $(E_a)$ .

(3) حدد معيار و عمدة كل من  $z_1$  و  $z_2$  بدلالة معيار و عمدة  $a$ .

II- في المستوى العقدي  $(P)$  المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ ،

نعتبر النقطتين  $A$  و  $B$  اللتين لحقيهما على التوالي  $a$  و  $ia$ .

(1) بين أن المثلث  $OAB$  قائم الزاوية و متساوي الساقين.

(2) ليكن  $F$  التطبيق الذي يربط كل نقطة  $M(z)$  بالنقطة  $M'(z')$  بحيث:  $z' = (1+i)z - ia$

أ- نفترض أن  $M \neq A$ . بين أن  $AM' = \sqrt{2}AM$  وحدد قياسا للزاوية الموجهة  $(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AM'})$ .

ب- لتكن (C) الدائرة التي مركزها A و شعاعها  $\sqrt{2}$ .

بين أن صورة (C) بالتطبيق F هي دائرة (C') محددا مركزها و شعاعها.

ج- نعتبر الدوران r الذي مركزه A و زاويته  $-\frac{\pi}{4}$  و التطبيق  $h = r \circ F$ .

حدد الصيغة العقدية للتطبيق h و استنتج طبيعته و عناصره المميزة.

نعتبر في المجموعة  $\square$  المعادلة (E) :  $z^2 - z(9 + i\sqrt{3}) + 26 + 6i\sqrt{3} = 0$

1-أ- احسب :  $(1 - 3i\sqrt{3})^2$

ب- حل في  $\square$  المعادلة (E)

2-المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد و ممنظم و مباشر  $(o, \vec{i}, \vec{j})$

نعتبر النقطة A التي لحقها :  $a = 5 - i\sqrt{3}$  و النقطة B بحيث OAB مثلث متساوي الأضلاع و  $\overline{(OA, OB)} \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$

أ- بين أن لحق النقطة B هو :  $b = 4 + 2i\sqrt{3}$

ب- استنتج لحق النقطة I منتصف القطعة  $[OB]$ .

ج- حدد  $z_k$  لحق النقطة K بحيث يكون ABIK متوازي أضلاع.

3-أبين أن  $\frac{z_k - a}{z_k}$  عدد تخيلي صرف. ماذا تستنتج بالنسبة للمثلث OAK ؟

ب-بين أن OAIK متوازي أضلاع.

ج-لتكن النقطة C التي لحقها  $c = \frac{2a}{3}$  بين أن النقط B و C و K مستقيمية.

(1) نعتبر في مجموعة الأعداد العقدية  $\square$  المعادلة (e) التالية:  $2z^2 + (3\sqrt{3} + i)z + 3 + i\sqrt{3} = 0$

ونسمي  $z_1$  و  $z_2$  حلّي المعادلة (e) حيث  $|z_1| < |z_2|$ .

(أ) حل في  $\square$  المعادلة (e). (لاحظ أن  $(\sqrt{3} - i)^2 = 2 - 2i\sqrt{3}$ )

(ب) اكتب  $z_1$  و  $z_2$  على شكلهما المثلثي ثم تحقق أن  $z_1$  هو جذر من الرتبة 12 للوحدة.

(2) المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ .

نعتبر النقط  $A\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right)$  و  $B(-i)$  و  $C\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right)$  و  $D(-\sqrt{3})$ ، ونسمي r الدوران الذي مركزه A و زاويته  $\frac{\pi}{3}$

(أ) اكتب الصيغة العقدية للدوران r.

(ب) أوجد لحق النقطة E صورة B بالدوران r.

(ج) تأكد أن النقطة C هي صورة D بالدوران r.

(3) بين أن النقطة E هي مرجح النظمة المتزنة  $\{(A, 2), (B, 2), (C, -3)\}$ .

ليكن a عددا عقديا غير منعدم.

I (1) أنشر العدد  $[(1+a)i - a]^2$

نعتبر في المجموعة  $\square$  المعادلة (E) :  $z^2 + [(1-a)i - a]z + a + a^2i = 0$

(2) حل في  $\square$  المعادلة (E)

(3) بين أن المعادلة  $(E)$  تقبل حلا وحيدا في  $\square$  إذا وفقط إذا كان:  $a = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i \frac{3\pi}{4}}$

□ نفترض أن  $a \neq -1$  و  $a \neq -i$  و  $a \neq \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i \frac{3\pi}{4}}$

المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر  $(0, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$  ،

نعتبر النقط  $A$  و  $B$  و  $C$  و  $D$  التي ألحاقها على التوالي هي:  $a$  و  $ai$  و  $a-i$  و  $-i$

(1) بين أن النقط  $A$  و  $B$  و  $C$  مستقيمة إذا وفقط إذا كان  $\arg(a) \equiv \frac{3\pi}{4} [\pi]$

(2) نفترض أن:  $a = e^{i\theta}$  حيث  $\theta \in ]-\pi, \pi[$  و  $\theta \neq \frac{3\pi}{4}$  و  $\theta \neq -\frac{\pi}{2}$

(أ) أكتب العدد  $a+1$  على الشكل المثلثي

(ب) نضع  $u = \frac{Z_C - Z_D}{Z_B - Z_D} \div \frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A}$  استنتج العدد  $u$  على الشكل المثلثي

(ج) استنتج أن النقط  $A$  و  $B$  و  $C$  و  $D$  متداورة إذا وفقط إذا  $\arg(a) \equiv \frac{\pi}{6} \left[ \frac{2\pi}{3} \right]$

(3) نفترض أن  $a = e^{i \frac{2\pi}{3}}$

(أ) ليكن  $R$  الدوران الذي مركزه  $D$  ويربط النقطة  $C$  بالنقطة  $B$  . حدد قياس زاوية الدوران  $R$

(ب) أكتب الصيغة العقدية للدوران  $R$

(ج) حدد لحق  $A'$  صورة النقطة  $A$  بالدوران  $R$

### الحسابيات

في المجموعة  $\square \times \square$  ، نعتبر المعادلة:  $11x - 24y = 1$  (E)

(1) (أ) بين أن المعادلة (E) تقبل حولا في  $\square \times \square$  .

(ب) باستعمال خوارزمية إقليدس، أوجد حلا خاصا للمعادلة (E).

(ج) استنتج مجموعة حلول المعادلة (E).

(2) (أ) ليكن  $s$  عددا صحيحا طبيعيا. أثبت أن  $10^5 - 1$  مضاعف للعدد 9.

(ب) ليكن الزوج  $(m, n)$  حلا للمعادلة (E). بين أن  $9 = 10(10^{24n} - 1) - (10^{11m} - 1)$ .

(3) (أ) بين أن  $10^{11} - 1$  يقسم  $10^{11k} - 1$  مهما يكن العدد الطبيعي  $k$ .

(ب) استنتج وجود عددين صحيحين  $M$  و  $N$  بحيث  $9 = (10^{11} - 1)M - (10^{24} - 1)N$ .

(4) (أ) بين أن كل قاسم مشترك للعددين  $10^{24} - 1$  و  $10^{11} - 1$  هو قاسم للعدد 9.

(ب) حدد القاسم المشترك الأكبر للعددين  $10^{24} - 1$  و  $10^{11} - 1$ .

ليكن  $a$  و  $b$  عددين نسبيين وغير منعدمين ،  $a \wedge b$  هو القاسم المشترك الأكبر للعددين  $a$  و  $b$

(1) بين أنه إذا كان  $a \wedge b = 1$  فإن  $a \wedge [b(a+b)] = 1$

(2) نعتبر في  $\square^{*2}$  المعادلة التالية :  $x^2 + y^2 + xy - 31x = 0$  (E)

وليكن  $(x, y)$  حلا للمعادلة (E) ، نضع  $d = x \wedge y$

(أ) بين أنه يوجد زوج  $(a, b)$  من  $\square^{*2}$  و  $a \wedge b = 1$  بحيث :  $a(31-da) = bd(a+b)$

(ب) استنتج أن :  $a$  يقسم  $d$

(3) (أ) بين أنه يوجد عدد طبيعي  $c$  غير منعدم بحيث :  $c(a^2 + b^2 + ab) = 31$

(ب) استنتج  $c = 1$

(4) استنتج حلول المعادلة (E)

نعتبر المعادلة:  $2x - 9y = 17$   $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$  (E)

(1) ليكن  $(x, y)$  حلا للمعادلة (E)

بين أن: 
$$\begin{cases} x \equiv 4 \pmod{9} \\ y \equiv -1 \pmod{2} \end{cases}$$

(2) استنتج حلول المعادلة (E)

(3) نضع  $d = x \wedge y$  حيث  $(x, y)$  حل للمعادلة (E)

أ) بين أن:  $(9k+4) \wedge (2k-1) = (k+8) \wedge 17$

ب) بين أن:  $d = 1$  أو  $d = 17$

ج) استنتج حلول النظام: 
$$\begin{cases} 2x - 9y = 17 \\ x \wedge y = 17 \end{cases}$$

ليكن  $p$  عددا أوليا بحيث:  $p \geq 5$

نعتبر في المجموعة  $IN^* \times IN^*$  المعادلة التالية:  $(E) : px + y^{p-1} = 2011$

°1) تحقق من أن العدد 2011 أولي

°2) نفترض أن  $(x; y)$  حل للمعادلة (E)

أ - بين أن العدد  $p$  لا يقسم العدد  $y$

ب - استنتج أن  $p$  يقسم العدد 2010 ثم حدد قيم  $p$

ج- حدد الزوج  $(x; y)$  في الحالة  $p = 67$  (نأخذ:  $\sqrt[66]{2011} \approx 1,12$ )

°3) حل المعادلة (E) في الحالة  $p = 5$

(1) نعتبر في  $\mathbb{Z}^2$  المعادلة:  $(F): 23x - 48y = 1$

أ- بين أن المعادلة (F) تقبل على الأقل حلا في  $\mathbb{Z}^2$ .

ب- باستعمال خوارزمية أقليدس ، حدد حلا خاصا للمعادلة (F).

ج- بين أن مجموعة حلول المعادلة (F) هي:  $\{(-25 + 48k, -12 + 23k) / k \in \mathbb{Z}\}$ .

(2) ليكن  $a$  و  $b$  عددين صحيحين طبيعيين .

أ- تحقق أن:  $(23)^2 \equiv 1[48]$ .

ب- بين أنه إذا كان  $a^{23} \equiv b[91]$  و أن  $a^{48} \equiv 1[91]$  فإن  $b^{23} \equiv a[91]$ .

(3) نعتبر في  $\mathbb{Z}$  النظام التالية:  $(S): \begin{cases} n \equiv 8[23] \\ n \equiv 9[48] \end{cases}$

بين أن:  $n \equiv 537[1104] \Leftrightarrow n$  حل للنظام (S)

(4) حدد باستعمال مبرهنة فيرما باقي قسمة العدد  $3^{48}$  على 91 .

نعتبر المعادلة  $289x - 455y = 13$  (E)  $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$

1- أبين أن  $(x, y)$  حل للمعادلة (E) يستلزم أن  $x$  مضاعف ل 13.

ب- نضع  $x = 13k$  و  $k \in \mathbb{Z}$ . حل في  $\mathbb{Z}$  المعادلة:  $289k \equiv 1[35]$  و  $k \in \mathbb{Z}$

ثم استنتج حلا خاصا للمعادلة (E).

ج- حل المعادلة  $(E)$  في  $Z^2$ .

2- نضع  $d = x \wedge y$  حيث  $(x, y)$  حل للمعادلة  $(E)$

أ- حدد القيم الممكنة للعدد  $d$ .

ب- حدد الحلول  $(x, y)$  للمعادلة:  $(E)$  بحيث  $x$  و  $y$  أوليان فيما بينهما.

(1) بين أن 163 عدد أولي

(2) حل في  $\mathbb{Z}^2$  المعادلة:  $13x - 162y = 1$

(3) نعتبر النظام:  $S: \begin{cases} x \equiv a \pmod{13} \\ x \equiv b \pmod{162} \end{cases}$  حيث  $a$  و  $b$  عددا من  $\mathbb{Z}$

أ- تحقق أن العدد  $x_0 = 325b - 324a$  حل للنظمة  $(S)$

ب- بين أن:  $(S) \Leftrightarrow x \equiv x_0 \pmod{2106}$

ت- حل في  $\mathbb{Z}$  للنظمة  $(S)$  في الحالة  $a = 2$  و  $b = 3$

(4) ليكن  $x$  عددا من  $\mathbb{Z}$  ونفترض أن:  $x^{25} \equiv 3 \pmod{163}$

أ- بين أن  $x \wedge 163 = 1$  ثم أن:  $x = 3^{13} \pmod{163}$

ب- استنتج أن  $x = 3^{13} \pmod{163} \Leftrightarrow x^{25} \equiv 3 \pmod{163}$

(5) حدد العدد  $x$  من  $IN$  بحيث:  $x^{25} \equiv 3 \pmod{163}$  و  $x \leq 162$

نعتبر المجموعة  $A$  بحيث  $A = \{n \in \mathbb{Z} \mid 1 \leq n \leq 36\}$

1 - أ- حل في  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  المعادلة:  $18x + 37y = 1$

ب- بين أنه يوجد عنصر وحيد  $\alpha$  من  $A$  بحيث:  $18\alpha \equiv 1 \pmod{37}$

2- بين أن:  $b \equiv 0 \pmod{37}$  أو  $a \equiv 0 \pmod{37} \Rightarrow ab \equiv 0 \pmod{37}$   $\forall (a, b) \in \mathbb{Z}^2$

3- حدد مجموعة الأعداد  $p$  من  $A$  بحيث:  $p^2 \equiv 1 \pmod{37}$

4 - أ- بين أن:  $(\forall p \in A)(\exists q \in \mathbb{Z}) \dots p \times q \equiv 1 \pmod{37}$

ب - استنتج أن:  $(\forall p \in A)(\exists! q \in A) \dots p \times q \equiv 1 \pmod{37}$

5 - بين أن:  $36! \equiv -1 \pmod{37}$

نعتبر في المجموعة  $Z^2$  المعادلة التالية:  $13x - 30y = 1$   $(E)$

1 (تحقق أن الزوج  $(-10; -23)$  حل للمعادلة  $(E)$  .

2 ( حدد مجموعة حلول المعادلة  $(E)$  في  $Z^2$  .

3 ( استنتج أنه يوجد عدد وحيد  $x_0$  من المجموعة  $IN$  أصغر من 20 بحيث  $13x_0 \equiv 1 \pmod{30}$  .

4 ( ليكن  $n$  من  $IN$  . بين أنه إذا كان  $n^{13} \equiv p \pmod{33}$  و  $n^{30} \equiv 1 \pmod{33}$  فإن  $p^7 \equiv n \pmod{33}$

نعتبر النظام:  $(S): \begin{cases} n \equiv 13 \pmod{19} \\ n \equiv 6 \pmod{12} \end{cases}$

(1- أ- بين أنه يوجد زوج وحيد  $(u, v)$  في  $\mathbb{Z}^2$  بحيث:  $19u + 12v = 1$  ( تحديد  $(u, v)$  غير مطلوب ) .

ب- تحقق أنه من أجل هذا الزوج  $(u, v)$  العدد  $N = 13 \times 19u + 6 \times 12v$  حل للنظمة  $(S)$  .

(2- ليكن  $n_0$  حلا للنظمة  $(S)$  .

$$\leftarrow \text{تحقق أن : } n \equiv n_0 [12 \times 19] \Leftrightarrow \begin{cases} n \equiv n_0 [19] \\ n \equiv n_0 [12] \end{cases} \Leftrightarrow (S) .$$

(3)- أ- حدد زوجا  $(u, v)$  حل للمعادلة :  $19u + 12v = 1$  و أحسب العدد  $N$  المرتبط به .

ب- حدد مجموعة حلول النظمة  $(S)$  ( باستعمال (2) ) .

(4)-  $n$  عدد صحيح طبيعي بحيث 6 هو باقي القسمة الأقليدية لـ  $n$  على 12 و 13 هو باقي القسمة الأقليدية لـ  $n$  على 19 .  
 $\leftarrow$  ما هو باقي القسمة الأقليدية لـ  $n$  على  $228 = 12 \times 19$  ؟

نعتبر في المجموعة  $\mathbb{Z}^2$  المعادلتين : (E)  $2x + 5y = 1000$  و (F)  $2x^2 + 5y^2 = 1000$

(1) حدد مجموعة حلول المعادلة (E) .

(2) ليكن  $(x_0, y_0)$  حلا للمعادلة (F) في  $\mathbb{N}^2$  .

أ- بين أن :  $x_0 \equiv 0[5]$  و  $y_0 \equiv 0[2]$  .

ب- استنتج أن المعادلة :  $(F_1) \quad 5x^2 + 2y^2 = 100$  تقبل حلا  $(x_1, y_1)$  في  $\mathbb{N}^2$  .

ج- بين أن :  $x_1 \equiv 0[2]$  و  $y_1 \equiv 0[5]$  .

د- استنتج أن المعادلة :  $(F_2) \quad 2x^2 + 5y^2 = 10$  تقبل حلا في  $\mathbb{N}^2$  .

هـ- استنتج أن المعادلة  $5x^2 + 2y^2 = 1$  تقبل حلا في  $\mathbb{N}^2$  .

(3) ما هي مجموعة حلول المعادلة (F) ؟

ليكن  $p$  عددا صحيحا طبيعيا أوليا يخالف 2 .

(1) أثبت وجود عدد  $n$  من  $\mathbb{N}^*$  بحيث :  $4^n \equiv 1[p]$

(2) نرمز بـ  $q$  لأصغر عدد من  $\mathbb{N}^*$  بحيث :  $4^q \equiv 1[p]$  وليكن  $r$  باقي القسمة الأقليدية للعدد  $n$  على  $q$  .

أ- بين أن :  $4^r \equiv 1[p]$

ب- استنتج أن  $r = 0$  ثم أن  $q$  يقسم  $n$  .

(3) حدد أصغر عدد صحيح طبيعي غير منعدم  $q$  يحقق  $4^q \equiv 1[29]$

نعتبر  $p$  عددا صحيحا أوليا حيث  $p \geq 5$  .

(1) أ) برهن أن  $3 \mid (2p-1)(p-1)$

ب) استنتج أن  $6 \mid (2p-1)(p-1)$

(2) ليكن  $x \in \mathbb{Z}$  حيث :  $1 \leq x \leq p-1$

أ) برهن أن :  $(x = p-1)$  أو  $(x = 1) \Rightarrow x^2 \equiv 1[p]$

ب) نفترض أن :  $x \neq 1$  و  $x \neq p-1$  . بين أنه يوجد  $y$  من  $\mathbb{Z}$  حيث :  $xy \equiv 1[p]$  و  $x \not\equiv y[p]$

ج) استنتج أن :  $(p-1)! \equiv -1[p]$

(3) أ) برهن بالترجع أن :  $(\forall n \in \mathbb{N}^*) 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

ب) نضع :  $S = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{(p-1)^2} = \sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{k^2}$

تحقق من أن :  $((p-1)!)^2 \times S \in \mathbb{Z}$  ثم أثبت أن  $p \mid ((p-1)!)^2 \times S$

نعتبر في المجموعة  $\mathbb{Z}^2$  المعادلة التالية : (E)  $13x - 30y = 1$

1 ( تحقق أن الزوج  $(-10;-23)$  حل للمعادلة (E) ) .

2 ( حدد مجموعة حلول المعادلة (E) في  $Z^2$  ) .

3 ( استنتج أنه يوجد عدد وحيد  $x_0$  من المجموعة  $IN$  أصغر من 20 بحيث  $13x_0 \equiv 1[30]$  ) .

4 ( ليكن  $n$  من  $IN$  . بين أنه إذا كان  $p[33] \equiv n^{13}$  و  $n^{30} \equiv 1[33]$  فإن  $p^7 \equiv n[33]$  )

1 ( نعتبر المعادلة :  $109x - 226y = 1$  (E) بحيث  $x$  و  $y$  عددين صحيحين نسبيين.

أ) حدد  $\text{pgcd}(109,226)$  القاسم المشترك الأكبر للعددين 109 و 226. ماذا تستنتج بالنسبة للمعادلة (E)؟

ب) بين أن مجموعة حلول المعادلة (E) هي مجموعة الأزواج  $(k; 68 + 109k; 141 + 226k)$  بحيث  $k$  عدد صحيح نسبي.

ج) استنتج أنه يوجد عدد صحيح طبيعي وحيد غير منعدم  $d$  أصغر من أو يساوي 226 وعدد صحيح طبيعي وحيد غير منعدم  $e$  بحيث :

$$109d = 1 + 226e$$

2 ( بين أن 227 عدد أولي.

3) نضع  $A = \{a \in \mathbb{Z} / a \leq 226\}$  ، ونعتبر التطبيقين  $f$  و  $g$  من  $A$  نحو  $A$  المعرفين بما يلي :

لكل  $a$  من  $A$  ،  $f(a)$  هو باقي القسمة الأقلية لـ  $a^{109}$  على 227.

لكل  $a$  من  $A$  ،  $g(a)$  هو باقي القسمة الأقلية لـ  $a^{141}$  على 227.

أ) تحقق من أن :  $g(f(0)) = 0$  .

ب) بين أنه لكل عنصر غير منعدم  $a$  من  $A$ ، لدينا  $a^{226} \equiv 1$  .

ج) باستعمال السؤال 1 ب)، استنتج أنه لكل عنصر غير منعدم  $a$  من  $A$ ، لدينا :  $g(f(a)) = a$  .

ليكن  $p$  عدداً أولياً بحيث  $p \geq 3$  .

نضع :  $A_p = \{1; 2; 3; 4; 5; \dots; p-1\}$  وليكن  $a$  عنصراً من  $A_p$

1 - ا - تحقق من أن  $a^{p-2}$  حل للمعادلة :  $ax \equiv 1[p]$  في  $\mathbb{Z}$

ب - ليكن  $r$  باقي القسمة الأقلية لـ  $a^{p-2}$  على  $p$  . بين أن  $r$  هو الحل الوحيد للمعادلة  $ax \equiv 1[p]$  في  $A_p$

2 - حل في المجموعة  $A_{29}$  المعادلتين  $2x \equiv 1[29]$  و  $3x \equiv 1[29]$

3 - برهن على أن :  $y \equiv 0[p]$  أو  $x \equiv 0[p]$   $\Leftrightarrow xy \equiv 0[p]$  لكل  $x$  و  $y$  من  $\mathbb{Z}$

4 - حل في  $\mathbb{Z}$  المعادلة :  $6x^2 - 5x + 1 \equiv 0[29]$

ليكن  $n \in IN^*$  نضع  $a_n = 4 \times 10^n - 1$  ;  $b_n = 2 \times 10^n - 1$  ;  $c_n = 2 \times 10^n + 1$

1 ( أ) بين أن  $a_n$  ;  $c_n$  يقبلان القسمة على 3

ب) بين أن  $b_3$  عدد أولي

ج) بين أن :  $\forall n \in IN^* ; b_n \times c_n = a_{2n}$

د) استنتج تفكيكا إلى جداء عوامل أولية لعدد  $a_6$

2 ( بين أن :  $\forall n \in IN^* ; b_n \wedge c_n = c_n \wedge 2$  ثم استنتج أن :  $b_n \wedge c_n = 1$   $\forall n \in IN^*$  )

3 ( نعتبر في  $\mathbb{Z}^2$  المعادلة التالية :  $b_3x + c_3y = 1$  (E) )

أ) بين أن المعادلة (E) تقبل على الأقل حلاً في  $\mathbb{Z}^2$  .

ب) حل في  $\mathbb{Z}^2$  المعادلة (E)

ليكن  $n$  عدداً طبيعياً بحيث  $n \geq 9$  نعتبر العددين  $a = \overline{1680}^{(n)}$  و  $b = \overline{252}^{(n)}$

1 ( بين أن  $n+2/a$  ;  $n+2/b$  )

2 ( نضع  $\alpha = \overline{21}^{(n)}$  و  $\beta = \overline{14}^{(n)}$  و  $d = \alpha \wedge \beta$  )

أ - بين أن  $d/7$

ب - بين :  $7/\alpha$  و  $7/\beta$   $7/n-3 \Leftrightarrow$

(3) بين أن  $(2n+1) \wedge n = 1$

(4) حدد  $a \wedge b$  حسب قيم  $n$

### حساب الاحتمالات

نوزع بطريقة عشوائية أربع كرات غير قابلة للتمييز باللمس و مرقمة 1 و 2 و 3 و 4 على ستة أشخاص  $A$  و  $B$  و  $C$  و  $D$  و  $E$  و  $F$ .

( كل شخص يمكنه أن يحصل على 0 أو 1 أو 2 أو 3 أو 4 كرات )

(1) ما هو عدد إمكانيات توزيع الكرات على الأشخاص الستة ؟

(2) أحسب احتمال أن يحصل الشخص  $A$  على كرة واحدة على الأقل ؟

(3) ما هو احتمال أن يحصل  $A$  على كرة واحدة بالضبط و أن يحصل الشخصين  $B$  و  $C$  معا على كرة واحدة بالضبط .

ليكن  $n$  عددا صحيحا طبيعيا فرديا أكبر أو يساوي 3 .

لدينا  $n$  صندوقا مرقما من 1 إلى  $n$  . الصندوق رقم  $k$  ( $1 \leq k \leq n$ ) يحتوي على  $k$  كرة بيضاء و  $n-k$  كرة سوداء .

نختار عشوائيا صندوقا من بين الصناديق ثم نسحب منه كرة واحدة.

1- احسب احتمال الحصول على كرة بيضاء .

2- احسب احتمال أن يتم السحب من صندوق رقمه فردي.

3- احسب احتمال الحصول على كرة بيضاء ، علما أن السحب تم من صندوق رقمه فردي.

يحتوي صندوق على أربع كرات: كرة بيضاء و ثلاث كرات حمراء غير قابلة للتمييز باللمس .

يحب عشوائيا كرة من الصندوق ، نسجل لونها ، ثم نعيدها إلى الصندوق.

نكرر نفس التجربة لمرات متتالية إلى أن نحصل لأول مرة على كرتين متتابعتين من نفس اللون

نوقف التجربة . ليكن  $X$  المتغير العشوائي الذي يساوي رتبة السحبة التي توقفت فيها التجربة.

احسب احتمال كل حدث من الحدثين التاليين :  $[X = 2]$  و  $[X = 3]$

ليكن  $k$  عدد صحيح طبيعي غير منعدم.

(أ) بين أن احتمال الحدث  $[X = 2k]$  هو  $p_{2k} = \frac{5}{8} \left( \frac{3}{16} \right)^{k-1}$

(ب) بين أن احتمال الحدث  $[X = 2k + 1]$  هو  $p_{2k+1} = \left( \frac{3}{16} \right)^k$

$n$  عدد صحيح طبيعي أكبر أو يساوي 4 .

لدينا ثلاث صناديق  $U_1$  و  $U_2$  و  $U_3$  .

الصندوق  $U_1$  يحتوي على كرة حمراء واحدة و  $(n-1)$  كرة سوداء.

الصندوق  $U_2$  يحتوي على كرتين حمراوين و  $(n-2)$  كرة سوداء. ١

الصندوق  $U_3$  يحتوي على ثلاث كرات حمراء و  $(n-3)$  كرة سوداء. ١

نعتبر التجربة العشوائية التالية: نختار عشوائيا صندوقا من بين الصناديق الثلاثة ثم نسحب تانيا كرتين من الصندوق الذي وقع عليه الاختيار.

ليكن  $X$  المتغير العشوائي الحقيقي الذي يساوي عدد الكرات الحمراء المسحوبة.

1- حدد قيم المتغير العشوائي  $X$

2- أ) بين أن احتمال الحدث  $(X=2)$  يساوي  $\frac{8}{3n(n-1)}$

ب) بين أن احتمال الحدث  $(X=1)$  يساوي  $\frac{4(3n-7)}{3n(n-1)}$

ج) استنتج قانون احتمال المتغير العشوائي  $X$

3- علما أننا حصلنا على كرتين حمراوين، ما هو احتمال أن يكون السحب قد تم من الصندوق  $U_3$  ؟

### التحليل

الجزء الأول:

نعتبر الدالة  $f$  للمتغير الحقيقي  $x$  المعرفة ب:  $f(x) = \frac{1}{2(xe^x + 1)}$

1- أ. بين أن  $x + e^{-x} \geq 1$  ،  $\forall x \in \mathbb{R}$  ، ثم إستنتج  $D$  حيز تعريف الدالة  $f$  .

ب. أحسب نهايتي  $f$  عند محدي  $D$  .

2- أ. أحسب  $f'(x)$  ثم إعط جدول تغيرات  $f$  .

ب. أثبت أن المعادلة  $f(x) = x$  تقبل حلا وحيدا  $\alpha$  في المجال  $]0,1[$  .

ج. بين أن  $\forall x \geq 0, e^x(4x^2e^x + 5x - 3) + 4 \geq 0$  ، واستنتج أن:  $\forall x \geq 0, |f'(x)| \leq \frac{2}{3}$

د. أنشئ  $C$ ، منحنى  $f$  في المستوى المنسوب إلى م.م.م  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  .

الجزء الثاني

نعتبر المتتالية العددية  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  المعرفة بمايلي:  $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$  ،  $\forall n \in \mathbb{N}$

1- بين أن :  $0 \leq u_n \leq 1$  ،  $(\forall n \in \mathbb{N})$

2- أثبت أن  $u_n \neq \alpha$  ،  $(\forall n \in \mathbb{N})$

3- بين أن  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ليست رتيبة .

4- باستعمال مبرهنة التزايدات المنتهية بين أن:  $\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{2}{3}|u_n - \alpha|$  و استنتج  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$  .

لتكن  $F(x) = \int_x^{2x} f(t)dt$  الدالة العددية المعرفة بمايلي:

1- أ. تحقق أن  $F$  معرفة على  $\mathbb{R}$ . و بين أن  $0 < f(t) < \frac{1}{2}e^{-t}$  ,  $\forall t \in \mathbb{R}$

ب. استنتج أن :  $0 \leq F(x) \leq \frac{1}{2}xe^{-x}$  ,  $\forall x \in ]0, +\infty[$  و أحسب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$ .

2- أ. بين أن :  $F(x) \leq \frac{1}{2}x$  ,  $\forall x \in ]-\infty, -1[$  و أحسب  $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x)$ .

ب. بين أن :  $0 < \frac{-te^t}{2(1+te^t)} < -te^t$  ,  $\forall t \in ]-\infty, -1[$

ج. استنتج أن :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left( F(x) - \frac{1}{2}x \right)$  و أول هندسيا النتيجة.

د. بين أن  $F$  قابلة للإشتقاق على  $\mathbb{R}$  و أحسب  $F'(x)$ .

نعتبر الدالة العددية  $g_n$  للمتغير الحقيقي  $x$  المعرفة على المجموعة  $\mathbb{R}$  بما يلي:  $g_n(x) = (1-x)^n e^{-2x}$

حيث  $n$  عدد صحيح طبيعي و  $(\mathcal{C}_n)$  المنحنى الممثل للدالة  $g_n$  في معلم متعامد ممنظم  $(0; \vec{i}; \vec{j})$ .

### الجزء الأول:

(1) أ) احسب نهاية  $g_n$  عند يؤول  $x$  إلى  $-\infty$ .

ب) بين أن :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^k e^{-2x} = 0$  لكل عدد صحيح طبيعي  $k$  و استنتج أن :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g_n(x) = 0$

(2) درس تغيرات الدالة  $g_n$  على  $\mathbb{R}$  ثم أعط جدول تغيراتها. (ينبغي دراسة حالتي  $n$  زوجي و  $n$  فردي).

(3) أ) ادرس الوضع النسبي للمنحنيين  $(\mathcal{C}_n)$  و  $(\mathcal{C}_{n+1})$ .

ب) بين أن المنحنيات  $(\mathcal{C}_n)$  تمر من نقطتين ثابتتين ينبغي تحديدهما.

ج) بين أن محور الأفاصل مماس لجميع المنحنيات  $(\mathcal{C}_n)$ .

5 (4) ادرس الفرع اللانهائي للمنحنى  $(\mathcal{C}_n)$  بجوار  $-\infty$ . (يمكن كتابة  $\left(\frac{1-x}{x}\right)^n = \frac{g_n(x)}{x}$ )

5 (5) أنشئ في نفس المعلم المنحنيات  $(\mathcal{C}_0)$  و  $(\mathcal{C}_1)$  و  $(\mathcal{C}_2)$ .

### الجزء الثاني:

لكل  $n$  من  $\mathbb{N}$  نعتبر التكامل المعرف بما يلي:  $I_n = \int_0^1 g_n(x) dx$

(1) احسب  $I_0$ .

(2) ادرس رتبة المتتالية العددية  $(I_n)_n$ .

(3) ادرس إشارة  $I_n$  ثم استنتج أن المتتالية  $(I_n)_n$  متقاربة.

(4) باستعمال الدالة  $x \mapsto e^{-2x}$  بين أن لكل  $n \in \mathbb{N}$  :  $0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$  و استنتج  $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$ .

(5) أ) باستعمال مكاملة بالأجزاء بين العلاقة:  $2I_{n+1} = 1 - (n+1)I_n$  لكل  $n$  من  $\mathbb{N}$ .

ب) استنتج طريقة ثانية لتحديد:  $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$ .

ج) احسب النهايتين:  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n+1)I_n$  و  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n+2)[1 - (n+1)I_n]$ .

نعتبر الدالة العددية  $g$  المعرفة على  $]0, +\infty[$  بما يلي :  $g(x) = 3x^2 + 1 - 2x^2 \cdot \ln x$

(1) أحسب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$

(2) أدرس تغيرات الدالة  $g$ .

(3) أ- بين أن المعادلة  $g(x) = 0$  تقبل حلا وحيدا  $a$  في المجال  $]0, +\infty[$

ب- تحقق أن :  $4 < a < 5$ .

(4) حدد إشارة  $g(x)$  على المجال  $]0, +\infty[$ .

(II) نعتبر الدالة  $f$  المعرفة على  $]0, +\infty[$  كما يلي :  $f(x) = \frac{-1 + \ln(x)}{1 + x^2}$

(1) أحسب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$

(2) أ- بين أن :  $(\forall x \in ]0, +\infty[); f'(x) = \frac{g(x)}{x(1 + x^2)^2}$

ب- استنتج تغيرات الدالة  $f$ .

(3) بين أن :  $f(a) = \frac{1}{2a^2}$  واعط تأطيرا للعدد  $f(a)$ .

(4) أنشئ المنحنى الممثل للدالة  $f$  في معلم متعامد ممنظم.

(III) نعتبر الدالة  $F$  المعرفة على  $]0, +\infty[$  كما يلي :  $F(x) = \int_1^x f(t) dt$

(1) أ- بين أن الدالة  $F$  قابلة للاشتقاق على المجال  $]0, +\infty[$ .

ب- بين أن :  $F'(x) = \frac{1 + \ln x}{1 + x^2}$

ج- استنتج تغيرات الدالة  $F$ .

(2) باستعمال تغيير مناسب للمتغير بين أن :  $(\forall x \in ]0, +\infty[); F(x) = F\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{\pi}{2} + 2 \operatorname{Arc} \tan x$

(IV) نعتبر المتتالية العددية  $(u_n)_{n \geq 3}$  المعرفة كما يلي :  $u_n = \int_e^n f(t) dt = \int_e^n \frac{-1 + \ln t}{1 + t^2} dt$

(1) بين أن المتتالية  $(u_n)$  تزايدية.

(2) بين أن :  $(\forall n \geq 3); 0 \leq u_n \leq \frac{n-e}{2a^2}$  ( حيث  $a$  هو العدد المعرف في السؤال 3(أ) - )

(3) أحسب :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{n^2}$

لتكن  $f_n$  الدالة المعرفة على  $]0, +\infty[$  بما يلي :  $f_n(x) = x - n - n \frac{\ln x}{x}$  ،  $n \in \mathbb{N}^*$

$(C_n)$  المنحنى الممثل للدالة  $f_n$  في معلم متعامد ممنظم  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  ، (الوحدة 2cm).

(A) 1) احسب  $f_n'(x)$  ، وبين أن إشارة  $f_n'(x)$  هي إشارة  $g_n(x) = x^2 - n + n \ln x$ .

(2) أ) ادرس تغيرات  $g_n$  وحدد نهايتها عند  $+\infty$  وفي 0 ، واستنتج أن المعادلة  $g_n(x) = 0$  تقبل حلا وحيدا  $\alpha_n$  في المجال  $]0, +\infty[$ .

ب) حدد إشارة  $g_n(x)$  على  $]0, +\infty[$  ، واستنتج تغيرات  $f_n$ .

(3) ادرس نهايات  $f_n$  عند محداث  $]0, +\infty[$ .

(4) بين أن المستقيم  $(\Delta_n)$  ذا المعادلة  $y = x - n$  مقارب مائل لـ  $(C_n)$  وحدد الوضع النسبي لـ  $(C_n)$  و  $(\Delta_n)$ .

(B) نعتبر الدالة  $h$  المعرفة على  $[0, +\infty[$  بما يلي :  $h(x) = 1 + \frac{\ln x}{x}$ .

(1) أ) ادرس تغيرات  $h$  وحدد نهايتها عند  $+\infty$  وفي 0 ، واستنتج أن المعادلة  $h(x) = 0$  تقبل حلا وحيدا  $\beta$  بحيث  $\frac{1}{e} \leq \beta \leq 1$ .

ب) بين أن :  $f_n(\beta) = \beta$  ,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ .

ج) استنتج الوضع النسبي لـ  $(C_{n+1})$  و  $(C_n)$ .

(2) أنشئ في نفس العلم  $(C_1)$  و  $(C_2)$ . (نأخذ  $1 < \alpha_2 < 1,3$  و  $1,2 < \alpha_2 < -1,10$  و  $-1,24 \leq f(\alpha_2) \leq -1,10$ ).

(3) أ) بين أن  $h(x) = 0 \Leftrightarrow x = e^{-x}$ .

ب) بين أن المعادلة  $e^{-x} = x$  تقبل حلا وحيدا هو  $\beta$ .

(4) نعتبر المتتالية  $(v_n)_{n \geq 1}$  المعرفة بما يلي :  $\begin{cases} v_1 = 1 \\ v_{n+1} = e^{-v_n} \end{cases}$  ,  $n \in \mathbb{N}^*$ .

أ) بين أن :  $\frac{1}{e} \leq v_n \leq 1$  ,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ .

ب) بين أن :  $\forall n \in \mathbb{N}^*$  ,  $|v_{n+1} - \beta| \leq e^{-\frac{1}{e}} |v_n - \beta|$ .

ج) استنتج أن  $(v_n)_{n \geq 1}$  متقاربة محددتا نهايتها.

**(I)** نعتبر الدالة العددية  $f$  المعرفة بما يلي :  $\forall x \in \mathbb{R}^+$  ,  $f(x) = \frac{e^x}{x + e^x}$ .

و  $(C_f)$  منحناها في معلم متعامد ممنظم  $(o, \vec{i}, \vec{j})$

(1) ادرس تغيرات  $f$  على  $\mathbb{R}^+$

(2) حدد الفروع اللانهائية للمنحنى  $(C_f)$

(3) ارسم المنحنى  $(C_f)$  في المعلم  $(o, \vec{i}, \vec{j})$

**(II)** ليكن  $n$  من  $\mathbb{N}^*$

(1) بين أن المنحنى  $(C_f)$  يقطع المستقيم  $(\Delta): y = n(x-1)$  في نقطة وحيدة أفصولها  $\alpha_n$  حيث :  $\alpha_n > 1$

(2) بين أن  $(\alpha_n)$  تناقصية.

(3) احسب :  $\lim \alpha_n$

**(III)** نعتبر الدالة  $F$  المعرفة على  $\mathbb{R}^+$  بما يلي :  $F(x) = \int_x^{2x} f(t) dt$

(1) بين أن :  $\forall t \in [0,1]$  ,  $1-t \leq \frac{1}{1+t} \leq 1 - \frac{1}{2}t$

(2) استنتج أن :  $\forall t \geq 0$  ,  $1 - \frac{t}{e^t} \leq f(t) \leq 1 - \frac{1}{2} \frac{t}{e^t}$

(3) أ) استنتج أنه توجد دالة  $\varphi$  معرفة على  $\mathbb{R}^+$  حيث :  $\forall x \geq 0$  ,  $x - \varphi(x) \leq F(x) \leq x - \frac{1}{2} \varphi(x)$

ب) باستعمال مكاملة بالأجزاء , حدد  $\varphi(x)$  بدلالة  $x$

ج) استنتج  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x)$

(4) حدد الفرع اللانهائي لمنحنى  $F$  بجوار  $+\infty$

(5) بين أن :  $F(x) < x$  ,  $\forall x \geq 0$  , وأعط تأويلا هندسيا للنتيجة

(6) احسب  $F'(x)$  ,  $\forall x \geq 0$  , ثم أعط جدول تغيرات  $F$

### الجزء الأول :

نعتبر الدالة  $g$  المعرفة بما يلي :  $g(x) = \ln x - 2(1 - \frac{1}{x})$

- 1- أعط جدول تغيرات الدالة  $g$  على المجال  $]0, +\infty[$
- 2- بين أن المعادلة  $g(x) = 0$  تقبل حلا وحيدا  $\alpha$  في المجال  $]4, 5[$  ( نأخذ  $0,6 < \ln 2 < 0,7$  و  $1,6 < \ln 5 < 1,7$  )
- 3- احسب  $g(1)$  ثم ادرس إشارة  $g(x)$  على المجال  $]0, +\infty[$
- 4-  $n$  عدد من  $\mathbb{N}$

- بين أن المعادلة  $g(x) = 2e^{-\frac{2n}{n+1}}$  تقبل حلا وحيدا  $u_n$  في المجال  $]a, +\infty[$
- 5- أ- بين أن المتتالية  $(u_n)_{n \geq 0}$  متتالية تناقصية قطعاً  
ب- بين أن  $\lim u_n = e^2$  متتالية متقاربة ثم أن  $\lim u_n = e^2$

### الجزء الثاني :

نعتبر الدالة  $f$  المعرفة على  $]0, +\infty[ - \{1\}$  بما يلي :  $f(x) = \frac{x-1}{(\ln x)^2}$  ;  $x \in ]0, +\infty[ - \{1\}$   
 $f(0) = 0$

- و نرمز بـ (C) لمنحناها في معلم متعامد ممنظم .
- 1- أحسب :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$
- 2- أ- بين أن  $f$  متصلة على اليمين في 0  
ب- بين أن  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} = -\infty$  و اعط تأويلا هندسياً
- 3- أ- بين أن إشارة  $f'(x)$  على  $]0, +\infty[ - \{1\}$  هي إشارة  $g(x) \ln x$   
ب- اعط جدول تغيرات الدالة  $f$
- 4- ارسم المنحنى (C) ( نأخذ  $\alpha$  ; 4.5 و  $1.5$  ;  $f(\alpha)$  ) (تحديد نقط الانعطاف غير مطلوب)

### الجزء الثالث :

نعتبر الدالة  $F$  المعرفة على المجال  $]0, +\infty[$  بما يلي :

$$(\forall x \in ]0, +\infty[) : F(x) = \int_{e^x}^{e^{2x}} \frac{f(t)}{t} dt \quad \text{و} \quad F(0) = \ln 2$$

- 1- أ- بين أن :  $(\forall x \in ]0, +\infty[) : \int_{e^x}^{e^{2x}} \frac{dt}{t \ln t} = \ln 2$   
ب- تحقق أن :  $(\forall x \in ]0, +\infty[)(\forall t \in [e^x, e^{2x}]) : \frac{e^x}{t \ln t} \leq \frac{1}{\ln t} \leq \frac{e^{2x}}{t \ln t}$   
ج- استنتج أن :  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \int_{e^x}^{e^{2x}} \frac{dt}{t \ln t} = \ln 2$
- 2- أ- باستعمال مكاملة بالأجزاء بين أن :  $(\forall x \in ]0, +\infty[) : F(x) = \frac{e^x - 1}{x} - \frac{e^{2x} - 1}{2x} + \int_{e^x}^{e^{2x}} \frac{dt}{\ln t}$   
ب- استنتج أن  $F$  متصلة على اليمين في 0
- 3- بين أن  $F$  قابلة للاشتقاق على المجال  $]0, +\infty[$  و أن :

$$(\forall x \in ]0, +\infty[) : F'(x) = \frac{1}{2} \left( \frac{e^x - 1}{x} \right)^2$$

4- أ- بين أن :  $(\forall x \in [0, +\infty[) : x + 1 \leq e^x \leq xe^x + 1$

ب- استنتج أن :  $(\forall x \in ]0, +\infty[) : \frac{1}{2} \leq F'(x) \leq \frac{1}{2}e^{2x}$

ج- باستعمال مبرهنة التزايديات المنتهية بين أن :  $(\forall x \in ]0, +\infty[) : \frac{1}{2} \leq \frac{F(x) - F(0)}{x} \leq \frac{1}{2}e^{2x}$

د- استنتج أن F قابلة للاشتقاق على اليمين في 0 و أن  $F'_d(0) = \frac{1}{2}$

5- أ- بين أن :  $(\forall x \in ]0, +\infty[) : \int_{e^x}^{e^{2x}} \frac{dt}{t(\ln t)^2} = \frac{1}{2x}$

ب- استنتج أن :  $(\forall x \in ]0, +\infty[) : F(x) \geq \frac{e^x - 1}{2x}$

ج- بين أن :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F(x)}{x} = +\infty$

6 - ارسم منحنى الدالة F في معلم متعامد ممنظم.

المستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم

نعتبر الدالة العددية f المعرفة ب:

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x}{(\ln x - 1)^2} ; x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

I (1) بين أن مجموعة تعريف الدالة f هي  $[0; e[ \cup ]e; +\infty[$

(2) بين أن الدالة f متصلة في 0 على اليمين

(3) حدد  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x}$  و أعط تأويلا هندسيا لذلك

(4) بين أن f قابلة للاشتقاق على  $[0; e[$  و على  $]e; +\infty[$  ثم بين أن:

$$(\forall x \in [0; e[ \cup ]e; +\infty[) \quad f'(x) = \frac{(\ln x - 1)(\ln x - 2)}{(\ln x - 1)^4}$$

(5) أنشئ جدول تغيرات الدالة f

(6) بين أن:  $f([0; e]) = f([0, 1[)$

(7) ادرس الوضع النسبي للمنحنى  $(C_f)$  مع المستقيم  $(\Delta)$  الذي معادلته  $y = x$  ثم أنشئ  $(C_f)$

II

نعتبر المتتالية العددية  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  المعرفة بما يلي:

$$\begin{cases} u_0 = \frac{1}{e} \\ (\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

(1) بين أن:  $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_n \in ]0; 1[$

(2) بين أن المتتالية  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  تناقصية

(3) استنتج أن المتتالية  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  متقاربة وحدد نهايتها

III

لكل x من  $[1, e[$  نضع:  $F(x) = \int_1^x \frac{1}{(1 - \ln t)^2} dt$  و  $I(x) = \int_1^x \frac{1}{1 - \ln t} dt$

(1) بين أن:  $(\forall x \in [1; e[) \quad F(x) \geq I(x)$

(2) باستعمال مكاملة بالأجزاء بين أن:  $I(x) = \frac{x^2}{2(1-\ln x)} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}F(x)$   $(\forall x \in ]1; e[)$

(3) استنتج أن:  $F(x) \geq \frac{x^2}{3(1-\ln x)} - \frac{1}{3}$   $(\forall x \in ]1; e[)$

(4) استنتج النهاية:  $\lim_{x \rightarrow e^-} F(x)$

نعتبر الدالة العددية المعرفة على  $\mathbb{R}$  ما يلي :

$$\begin{cases} f(x) = \int_x^{2x} \frac{1}{t} e^{-t^2} dt ; x \neq 0 \\ f(0) = \ln(2) \end{cases}$$

1-بين أن الدالة  $f$  زوجية .

2-أ) بين أن  $f$  قابلة للإشتقاق على المجال  $]0, +\infty[$  وأن :  $f'(x) = \frac{e^{-4x^2}}{x} (1 - e^{3x^2})$

ب) استنتج منحنى تغيرات الدالة  $f$  على المجال  $]0, +\infty[$  .

3-أ) بين أن :  $e^x \geq x + 1$   $(\forall x \in \mathbb{R})$

ب) استنتج أن :  $\frac{1}{t} - t \leq \frac{1}{t} e^{-t^2} \leq \frac{1}{t}$   $(\forall t > 0)$

ج) بين أن :  $\ln 2 - \frac{3}{2}x^2 \leq f(x) \leq \ln 2$   $(\forall x > 0)$

د) بين أن  $f$  متصلة و قابلة للإشتقاق في 0 .

4-أ) بين أن :  $0 \leq f(x) \leq \frac{e^{-x} - e^{-2x}}{x}$   $(\forall x \geq 1)$

ب) استنتج نهاية الدالة  $f$  عند  $+\infty$  .

5-أ) أعط جدول تغيرات الدالة  $f$  على  $\mathbb{R}$  .

ب) ارسم المنحنى الممثل للدالة  $f$  في معلم متعامد ممنظم .

في كل التمرين  $n$  يرمز لعدد صحيح طبيعي أكبر أو يساوي 2 .

نعتبر  $f_n$  الدالة العددية المعرفة على  $\mathbb{R}$  بما يلي :  $f_n(x) = \frac{x}{n} - e^{-nx}$  .

ليكن  $(C_n)$  التمثيل المبياني للدالة  $f_n$  في معلم متعامد ممنظم  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  .

(1) أ - أحسب  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_n(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x)$  .

ب - أدرس الفرعين اللانهائيين للمنحنى  $(C_n)$  .

(2) أحسب  $f'_n(x)$  لكل  $x$  من  $\mathbb{R}$  ثم ضع جدول تغيرات الدالة  $f_n$  .

(3) أ - بين أن المعادلة  $f_n(x) = 0$  تقبل حلا وحيدا  $\alpha_n$  .

ب - بين أن  $f_n\left(\frac{1}{n}\right) < 0$  .

ج - بين أن :  $e^x \geq x+1$  ( $\forall x \in \mathbb{R}$ ) . استنتج أن :  $f_n(1) > 0$  .

د - بين أن :  $\frac{1}{n} < \alpha_n < 1$  .

(4) أنشئ المنحنى  $(C_2)$  . (نأخذ  $\alpha_2 \approx 0,6$ )

(5) أ - بين أنه لكل عدد صحيح طبيعي  $n$  أكبر أو يساوي 2 ، لدينا :  $f_{n+1}(\alpha_n) = \frac{ne^{-(n+1)\alpha_n}}{(n+1)} \left( e^{\alpha_n} - \frac{1}{n} - 1 \right)$

ب - استنتج أن :  $f_{n+1}(\alpha_n) \geq 0$  ( $\forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$ ) .

ج - بين أن المتتالية  $(\alpha_n)_{n \geq 2}$  تناقصية ثم استنتج أنها متقاربة .

(6) أ - باستعمال السؤال (3) د- ، بين أن :  $\frac{1}{n^2} < e^{-n\alpha_n} < \frac{1}{n}$  ( $\forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$ ) .

ب - استنتج أن :  $\frac{\ln(n)}{n} < \alpha_n < \frac{2\ln(n)}{n}$  ( $\forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$ ) .

ج - حدد  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n$  .

I/ نعتبر الدالة العددية  $g$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  بما يلي :  $g(x) = 1 + (x-1)e^x$

1- بين أن لكل  $x$  من  $\mathbb{R}$  :  $g(x) \geq 0$

2- بين أن  $x=0$  هو الحل الوحيد للمعادلة  $g(x)=0$

II/ لتكن  $f$  الدالة العددية المعرفة على  $\mathbb{R}$  بما يلي :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x}{e^x - 1} ; x \neq 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

وليكن  $(C)$  المنحنى الممثل للدالة  $f$  في معلم متعامد ممنظم  $(O, \vec{i}; \vec{j})$

1- احسب النهايتين  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) + x)$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

2- بين أن الدالة  $f$  متصلة في 0 .

3- أ) احسب  $f'(x)$  من أجل كل عنصر  $x$  من  $\mathbb{R}^*$  .

ب) استنتج تغيرات الدالة  $f$  .

4- نعتبر التكامل  $J(x) = \int_0^x te^{-t} dt$  حيث  $x$  عدد حقيقي.

أ) باستعمال مكاملة بالأجزاء ، بين أن :  $J(x) = e^{-x}(e^x - 1 - x)$

(ب) بين أن لكل  $x$  من  $\mathbf{R}$  :  $\frac{x^2}{2} e^{-\frac{x+|x|}{2}} \leq J(x) \leq \frac{x^2}{2} e^{-\frac{x-|x|}{2}}$

(ج) بين أن لكل  $x$  من  $\mathbf{R}^*$  :  $\frac{1}{2} e^{\frac{x-|x|}{2}} \leq \frac{e^x - 1 - x}{x^2} \leq \frac{1}{2} e^{\frac{x+|x|}{2}}$

(د) استنتج أن الدالة  $f$  قابلة للاشتقاق في  $0$  وأن  $f'(0) = -\frac{1}{2}$

5- (أ) بين أن لكل  $x$  من  $\mathbf{R}^*$  :  $f''(x) = \frac{e^x}{(e^x - 1)^3} (e^x(x-2) + 2 + x)$

(ب) ادرس إشارة  $e^x(x-2) + 2 + x$  لكل  $x$  من  $\mathbf{R}$

(ج) استنتج أن لكل  $x$  من  $\mathbf{R}^*$  :  $f''(x) > 0$

(د) أنشئ (C).

III/ نعتبر المتتالية العددية  $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$  المعرفة بما يلي :  $u_0 = 1$  و لكل  $n$  من  $\mathbf{N}$  :  $u_{n+1} = f(u_n)$

1- بين أن  $x = \ln 2$  هو الحل الوحيد للمعادلة :  $f(x) = x$

2- (أ) بين أن لكل  $x$  من  $\mathbf{R}^+$  :  $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$

(ب) بين أن لكل  $n$  من  $\mathbf{N}$  :  $|u_{n+1} - \ln 2| \leq \frac{1}{2} |u_n - \ln 2|$

(ج) استنتج أن المتتالية  $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$  متقاربة وحدد نهايتها.

IV/ لتكن  $F$  الدالة العددية المعرفة على  $\mathbf{R}$  بما يلي : 
$$\begin{cases} F(x) = \int_x^{2x} \frac{t}{e^t - 1} dt ; x \neq 0 \\ F(0) = 0 \end{cases}$$

1- (أ) بين أن لكل  $x$  من  $\mathbf{R}^*$  :  $\frac{2x^2}{e^{2x} - 1} \leq F(x) \leq \frac{x^2}{e^x - 1}$

(ب) بين أن الدالة  $F$  متصلة في  $0$ .

(ج) بين أن الدالة  $F$  قابلة للاشتقاق في  $0$  وأن :  $F'(0) = 1$

2- (أ) بين أن الدالة  $F$  قابلة للاشتقاق على  $\mathbf{R}^*$  وأن لكل  $x$  من  $\mathbf{R}^*$  :  $F'(x) = \frac{3 - e^x}{e^x + 1} f(x)$

(ب) ادرس تغيرات الدالة  $F$ .

I/ 1- لتكن  $g$  الدالة العددية المعرفة على  $\mathbf{R}$  بما يلي :  $g(x) = 1 + x - e^{-x}$

(أ) ادرس تغيرات الدالة  $g$  على  $\mathbf{R}$ .

(ب) احسب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$  وضع جدول تغيرات  $g$ .

(ج) استنتج أن  $x_0 = 0$  هو الحل الوحيد للمعادلة  $g(x) = 0$ .

-2 لتكن  $f$  الدالة العددية المعرفة على  $\mathbb{R}^*$  بما يلي :  $f(x) = \frac{1}{1+x-e^{-x}}$

(C) المنحنى الممثل للدالة  $f$  في معلم متعامد ممنظم  $(O, \vec{i}, \vec{j})$

(أ) احسب  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

(ب) احسب  $f'(x)$  لكل  $x$  من  $\mathbb{R}^*$ .

(ج) ضع جدول تغيرات الدالة  $f$ .

(د) أنشئ (C).

-3 (أ) ليكن  $n$  من  $\mathbb{N}^*$ . بين أن المعادلة :  $f(x) = n$  تقبل حلا وحيدا  $x_n$  في المجال  $]0; +\infty[$ .

(ب) بين أن المتتالية  $(x_n)_{n \geq 1}$  تناقصية وأنها متقاربة.

(ج) أثبت أن :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0$

II / -1 (أ) بين أن المعادلة  $f(x) = 1$  تكافئ المعادلة  $e^{-x} = x$

(ب) بين أن المعادلة  $e^{-x} = x$  تقبل حلا وحيدا هو  $\alpha = x_1$  وأن :  $\frac{1}{e} \leq \alpha \leq 1$

-2 نعتبر المتتالية  $(y_n)_{n \geq 1}$  المعرفة بما يلي :  $y_1 = 1$  و  $\forall n \in \mathbb{N}^* ; y_{n+1} = e^{-y_n}$

(أ) بين أن لكل  $n$  من  $\mathbb{N}^* : \frac{1}{e} \leq y_n \leq 1$

(ب) بين أن :  $\forall n \in \mathbb{N}^* ; |y_{n+1} - \alpha| \leq e^{-\frac{1}{e}} |y_n - \alpha|$

(ج) استنتج أن  $(y_n)_{n \geq 1}$  متقاربة محددا نهايتها.

III / لتكن  $F$  الدالة العددية المعرفة على  $\mathbb{R}_+$  بما يلي :  $F(0) = \frac{1}{2} \ln 2$  و  $\forall x > 0 ; F(x) = \int_x^{2x} f(t) dt$

-1 (أ) بين أن :  $\forall t > 0 ; \frac{1}{1+t} \leq f(t) \leq \frac{1}{t}$

(ب) استنتج  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$

-2 (أ) بين أن :  $(\forall t \geq 0) \quad 1-t \leq e^{-t} \leq 1-t + \frac{t^2}{2}$

(ب) بين أن لكل  $t$  من المجال  $]0; 4[$  :  $\frac{1}{2t} \leq f(t) \leq \frac{1}{2} \left( \frac{1}{t} + \frac{1}{4-t} \right)$

(ج) استنتج أن  $F$  متصلة على اليمين في 0.

-3 (أ) بين أن  $F$  قابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}_+^*$  واحسب  $F'(x)$  من أجل  $x > 0$

١ - لتكن  $f$  الدالة العددية للمتغير الحقيقي  $x$  المعرفة على  $\mathbb{R}_+$  بما يلي :  $f(x) = 2x - e^{-x^2}$

و ليكن  $(C)$  المنحنى الممثل للدالة  $f$  في معلم متعامد ممنظم  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  .

(١) أ) احسب النهاية  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 2x)$  ثم أول هندسيا النتيجة المحصل عليها .

(ب) احسب  $f'(x)$  لكل  $x$  من  $\mathbb{R}_+$  ثم ضع جدول تغيرات الدالة  $f$

(ج) بين أن المعادلة  $f(x) = 0$  تقبل حلا وحيدا  $\alpha$  في  $\mathbb{R}_+$  وأن  $0 < \alpha < 1$

(د) ادرس إشارة  $f(x)$  على المجال  $[0, 1]$

(2) أنشئ المنحنى  $(C)$  . (نأخذ :  $\alpha \approx 0,4$ )

II - نعتبر الدالتين العدديتين  $\varphi$  و  $g$  للمتغير الحقيقي  $x$  المعرفتين على  $\mathbb{R}_+$  بما يلي :

$$g(x) = x^2 - \int_0^x e^{-t^2} dt \quad \text{و} \quad \begin{cases} \varphi(x) = \frac{1}{x} \int_0^x e^{-t^2} dt ; x > 0 \\ \varphi(0) = 1 \end{cases}$$

(١) أ) بين أن :  $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*) (\exists c \in ]0, x[) : \frac{1}{x} \int_0^x e^{-t^2} dt = e^{-c^2}$

(ب) استنتج أن :  $\int_0^1 e^{-t^2} dt < 1$

(2) أ) بين أن :  $g(\alpha) = \int_0^\alpha f(t) dt$

(ب) بين أن الدالة  $g$  قابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}_+$  وأن :  $g'(x) = f(x)$  ;  $(\forall x \in \mathbb{R}_+)$

(ج) بين أن المعادلة  $g(x) = 0$  تقبل حلا وحيدا  $\beta$  في المجال  $] \alpha, 1[$

بين أن الدالة  $\varphi$  متصلة على اليمين في الصفر.

(ب) باستعمال مكاملة بالأجزاء بين أن :  $\varphi(x) = e^{-x^2} + \frac{2}{x} \int_0^x t^2 e^{-t^2} dt$  ;  $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*)$

(ج) بين أن الدالة  $\varphi$  قابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}_+^*$  وأن :  $\varphi'(x) = -\frac{2}{x^2} \int_0^x t^2 e^{-t^2} dt$  ;  $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*)$

(د) بين أن :  $\varphi([0, 1]) \subset [0, 1]$

(4) أ) بين أنه لكل عدد حقيقي  $x$  من  $\mathbb{R}_+$  لدينا :  $\int_0^x t^2 e^{-t^2} dt \leq \frac{x^3}{3}$

(ب) بين أن :  $(\forall x \in ]0, 1[) ; |\varphi'(x)| \leq \frac{2}{3}$

(ج) بين أن :  $\varphi(x) = x \Leftrightarrow g(x) = 0$  ;  $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*)$

نعتبر المتتالية العددية  $(u_n)_{n \geq 0}$  المعرفة بما يلي :  $u_0 = \frac{2}{3}$  و  $u_{n+1} = \varphi(u_n)$  ;  $(\forall n \in \mathbb{N})$

(أ) بين أن :  $0 \leq u_n \leq 1$  ;  $(\forall n \in \mathbb{N})$

بين أن :  $|u_n - \beta| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$  ;  $(\forall n \in \mathbb{N})$

استنتج أن المتتالية  $(u_n)_{n \geq 0}$  متقاربة و حدد نهايتها.

نعتبر الدالة العددية  $f$  المعرفة على المجال  $I = \left[-\frac{1}{2}, +\infty\right[$  بما يلي :  $\begin{cases} f(x) = \frac{\ln(1+2x)}{x} & ; x \neq 0 \\ f(0) = 2 \end{cases}$

ليكن  $(C)$  المنحنى الممثل للدالة  $f$  في معلم متعامد ممنظم  $(O; \vec{i}, \vec{j})$

(1) بين أن الدالة  $f$  متصلة في الصفر .

(2) لكل عدد حقيقي غير منعدم  $a$  من المجال  $I$  نعتبر الدالة العددية  $h_a$  للمتغير الحقيقي  $x$  المعرفة على

المجال  $I$  بما يلي :  $h_a(x) = (\ln(1+2a) - 2a)x^2 - (\ln(1+2x) - 2x)a^2$

(أ) احسب  $h_a(a)$  و  $h_a(0)$  ثم استنتج أنه يوجد عدد حقيقي  $b$  محصور بين  $0$  و  $a$  بحيث :

$$\frac{\ln(1+2a) - 2a}{a^2} = \frac{-2}{1+2b}$$

(ب) استنتج أن الدالة  $f$  قابلة للاشتقاق في الصفر و أن :  $f'(0) = -2$  .

(3) (أ) بين أن الدالة  $f$  قابلة للاشتقاق على المجال  $I \setminus \{0\}$

و أن :  $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2(1+2x)}$  ;  $(\forall x \in I \setminus \{0\})$  حيث :  $g(x) = 2x - (1+2x)\ln(1+2x)$

(ب) بين أن :  $g(x) < 0$  ;  $(\forall x \in I \setminus \{0\})$

(ج) استنتج تغيرات الدالة  $f$  على المجال  $I$  .

(4) (أ) احسب النهايتين  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} f(x)$  ثم أول هندسيا النتيجتين المحصل عليهما.

(ب) بين أنه يوجد عدد حقيقي وحيد  $\alpha$  من المجال  $[1, 2]$  بحيث :  $f(\alpha) = 1$

(ج) أنشئ المنحنى  $(C)$  (نأخذ :  $\alpha \approx 1,3$ )

(II-1) نضع :  $J = [1, \alpha]$  و  $\varphi(x) = \ln(1+2x)$  ;  $(\forall x \in I)$  .

(أ) بين الدالة  $\varphi$  قابلة للاشتقاق على المجال  $I$  و أن :  $0 < \varphi'(x) \leq \frac{2}{3}$  ;  $(\forall x \geq 1)$

ب) تحقق أن :  $\varphi(\alpha) = \alpha$  و أن :  $\varphi(J) \subset J$

(2) نعتبر المتتالية العددية  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  المعرفة بما يلي:  $u_0 = 1$  و  $u_{n+1} = \ln(1 + 2u_n)$  ;  $(\forall n \geq 0)$

أ) بين أن :  $u_n \in J$  ;  $(\forall n \geq 0)$

ب) بين أن :  $(\forall n \geq 0) ; |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$

ج) استنتج أن المتتالية  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  متقاربة و حدد نهايتها.

III- نعتبر الدالة العددية  $F$  المعرفة على المجال  $I$  بما يلي:  $F(x) = \int_0^x f(t)dt$

(1) أ) بين أن الدالة  $F$  قابلة للاشتقاق على المجال  $I$  ثم أحسب  $F'(x)$

ب) استنتج منحي تغيرات الدالة  $F$  على المجال  $I$ .

(2) أ) بين أن :  $(\forall x \geq 1) ; F(x) \geq \int_1^x \frac{\ln(1+2t)}{1+2t} dt$

ب) استنتج أن :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = +\infty$

(3) نفترض أن الدالة  $F$  تقبل نهاية منتهية  $\ell$  على اليمين في  $-\frac{1}{2}$

ونعتبر الدالة  $\tilde{F}$  المعرفة على المجال  $\left[-\frac{1}{2}, +\infty\right[$  بما يلي:

$$\begin{cases} \tilde{F}(x) = F(x) ; & x \in I \\ \tilde{F}\left(-\frac{1}{2}\right) = \ell \end{cases}$$

أ) باستعمال مبرهنة التزايديات المنتهية بين أن :  $(\forall x \in I) ; F(x) - \ell \geq f(x) \left(x + \frac{1}{2}\right)$

ب) استنتج أن الدالة  $\tilde{F}$  غير قابلة للاشتقاق على اليمين في  $-\frac{1}{2}$

$n$  عدد صحيح طبيعي غير منعدم.

نعتبر الدالة العددية  $f_n$  للمتغير الحقيقي  $x$  المعرفة على المجال  $[0, +\infty[$  بما يلي:

$$f_n(0) = 0 \text{ و } f_n(x) = x(1 - \ln x)^n \text{ من أجل } x > 0$$

ليكن  $(C_n)$  المنحنى الممثل للدالة  $f_n$  في معلم متعامد ممنظم  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

### الجزء الأول

أ) بين أن الدالة  $f_n$  متصلة على اليمين في 0. (يمكنك وضع  $x = t^n$ )

ب) ادرس قابلية اشتقاق الدالة  $f_n$  على اليمين في 0

ج) حدد النهايات:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_1(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f_1(x)}{x}$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_2(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f_2(x)}{x}$

(أ) ادرس تغيرات الدالة  $f_1$

(ب) ادرس تغيرات الدالة  $f_2$

(ج) ادرس الوضع النسبي للمنحنيين  $(C_1)$  و  $(C_2)$

(د) أنشئ المنحنيين  $(C_1)$  و  $(C_2)$ . (نقبل أن  $A(1,1)$  نقطة انعطاف للمنحنى  $(C_2)$ )

$$\text{نأخذ : } \|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 2\text{cm}$$

### الجزء الثاني

نبر الدالة العددية  $F$  للمتغير الحقيقي  $x$  المعرفة على المجال  $]-\infty, 0]$  بما يلي :  $F(x) = \int_{e^x}^1 \frac{f_1(t)}{1+t^2} dt$

(أ) بين أن الدالة  $F$  قابلة للاشتقاق على المجال  $]-\infty, 0[$  و أن :  $F'(x) = \frac{(x-1)e^{2x}}{1+e^{2x}}$  ( $\forall x < 0$ )

(ب) استنتج منحنى تغيرات الدالة  $F$  على المجال  $]-\infty, 0]$

(ج) بين أن :  $\frac{1}{2} \int_{e^x}^1 f_1(t) dt \leq F(x) \leq \frac{1}{1+e^{2x}} \int_{e^x}^1 f_1(t) dt$  ( $\forall x < 0$ )

(د) تحقق أن الدالة  $x \rightarrow x^2 \left( \frac{3}{4} - \frac{\ln x}{2} \right)$  هي دالة أصلية للدالة  $f_1$  على المجال  $]0, +\infty[$

$$\text{(ج) بين أن : } \lim_{x \rightarrow -\infty} \int_{e^x}^1 f_1(t) dt = \frac{3}{4}$$

نفترض أن الدالة  $F$  تقبل نهاية منتهية  $\ell$  عندما يؤول  $x$  إلى  $-\infty$ . بين أن :  $\frac{3}{8} \leq \ell \leq \frac{3}{4}$

### الجزء الثالث

كل عدد صحيح طبيعي غير منعدم  $n$  نضع :  $u_n = \int_1^e f_n(x) dx$

(أ) بين أن :  $u_n \geq 0$  ( $\forall n \geq 1$ )

(ب) حدد إشارة  $f_{n+1}(x) - f_n(x)$  على المجال  $[1, e]$

(ج) بين أن :  $u_{n+1} \leq u_n$  ( $\forall n \geq 1$ )

(د) استنتج أن المتتالية  $(u_n)_{n \geq 1}$  متقاربة

(أ) بين أن :  $u_{n+1} = -\frac{1}{2} + \frac{n+1}{2} u_n$  ( $\forall n \geq 1$ )

(ب) استنتج بالسنتمتر المربع ( $\text{cm}^2$ ) مساحة حيز المستوى المحصور بين المنحنيين  $(C_1)$  و  $(C_2)$  والمستقيمين

الذين معادلتيهما على التوالي  $x = e$  و  $x = 1$

(أ) بين أن:  $\frac{1}{n+1} \leq u_n \leq \frac{1}{n-1}$  ( $\forall n \geq 2$ ) (يمكنك استعمال الأسئلة: 1-أ) و 1-ج) و 2-أ) )

(ب) حدد  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$  و  $\lim_{n \rightarrow +\infty} nu_n$

a عدد حقيقي مخالف للعدد  $u_1$ .

نعتبر المتتالية  $(v_n)_{n \geq 1}$  المعرفة بما يلي:  $v_1 = a$  و  $v_{n+1} = -\frac{1}{2} + \frac{n+1}{2}v_n$  ( $\forall n \geq 1$ )

لكل عدد صحيح طبيعي غير منعدم  $n$  نضع:  $d_n = |v_n - u_n|$

(أ) بين أن:  $d_n = \frac{n!}{2^{n-1}}d_1$  ( $\forall n \geq 1$ )

(ب) بين أن:  $\lim_{n \rightarrow +\infty} d_n = +\infty$

(ج) استنتج أن المتتالية  $(v_n)_{n \geq 1}$  متباعدة.

I - نعتبر الدالة العددية  $g$  للمتغير الحقيقي  $x$  المعرفة على  $\mathbb{R}^+$  بما يلي:  $g(x) = 2(1 - e^{-x}) - x$

(1) أ - ادرس تغيرات الدالة  $g$

ب - ضع جدول تغيرات الدالة  $g$

(2) أ - بين أن المعادلة  $g(x) = 0$  تقبل حلا وحيدا  $\alpha$  في المجال  $[\ln 4, \ln 6[$

( نأخذ  $\ln 2 \approx 0,7$  و  $\ln 3 \approx 1,1$  )

ب - ادرس إشارة  $g(x)$  على  $\mathbb{R}^+$

(3) نعتبر المتتالية العددية  $(u_n)$  المعرفة بما يلي:  $u_0 = 1$  و  $u_{n+1} = 2(1 - e^{-u_n})$  لكل  $n$  من  $\mathbb{N}$

أ - بين أن  $1 \leq u_n < \alpha$  لكل  $n$  من  $\mathbb{N}$

ب - بين أن  $u_{n+1} - u_n = g(u_n)$  لكل  $n$  من  $\mathbb{N}$

ج - بين أن المتتالية  $(u_n)_{n \geq 0}$  تزايدية قطعاً.

د - بين أن المتتالية  $(u_n)_{n \geq 0}$  متقاربة ثم احسب  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

II - نعتبر الدالة العددية  $f$  للمتغير الحقيقي  $x$  المعرفة على  $\mathbb{R}^*_+$  بما يلي:  $f(x) = \frac{1 - e^x}{x^2}$

و ليكن  $(C)$  المنحنى الممثل للدالة  $f$  في معلم متعامد ممنظم  $(O, \vec{i}, \vec{j})$

(1) احسب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$

(2) أ - تحقق أن:  $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha(\alpha - 2)}$

ب - بين أن  $f'(x) = \frac{e^x g(x)}{x^3}$  لكل  $x$  من  $\mathbb{R}_+^*$  ثم ضع جدول تغيرات الدالة  $f$

(3) أنشئ (C) ( نأخذ  $\alpha \approx 1,5$  )

III - نعتبر الدالة العددية  $F$  للمتغير الحقيقي  $x$  المعرفة على  $[0, +\infty[$  بما يلي :

$$(\forall x > 0) \quad F(x) = \int_x^{2x} \frac{1-e^t}{t^2} dt \quad \text{و} \quad F(0) = -\ln 2$$

(1) أ - باستعمال مكاملة بالأجزاء , بين أن:  $(\forall x > 0) \quad F(x) = \frac{e^{2x}-1}{2x} - \frac{e^x-1}{x} - \int_x^{2x} \frac{e^t}{t} dt$

ب - بين أن لكل  $x$  من  $]0, +\infty[$  :  $e^x \ln 2 \leq \int_x^{2x} \frac{e^t}{t} dt \leq e^{2x} \ln 2$

ج - احسب  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \int_x^{2x} \frac{e^t}{t} dt$  ثم استنتج أن الدالة  $F$  متصلة على اليمين في الصفر .

(2) أ - بين أن لكل  $x$  من  $]0, +\infty[$  :  $F(x) \leq \frac{1-e^x}{2x}$

ب - احسب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$

(3) بين أن  $F$  قابلة للاشتقاق على  $]0, +\infty[$  و أن :  $(\forall x > 0) \quad F'(x) = -\frac{1}{2} \left( \frac{e^x-1}{x} \right)^2$

(4) أ - ليكن  $x$  من المجال  $]0, +\infty[$  .

بين أنه يوجد  $c$  من المجال  $]0, x[$  بحيث:  $F(x) - F(0) = -\frac{1}{2} x e^{2c}$

(يمكنك استعمال مبرهنة التزايد المتتالية مرتين)

ب - أثبت أن لكل  $x$  من  $]0, +\infty[$  :  $-\frac{1}{2} e^{2x} \leq \frac{F(x) - F(0)}{x} \leq -\frac{1}{2}$

ج - استنتج أن  $F$  قابلة للاشتقاق على اليمين في الصفر و أن  $F_d'(0) = -\frac{1}{2}$