تصحيح امتحان بوظبي للرياضيات 2013 السورة العادية

ذ: الحسن

التمرين الأول:

1) أ- لدينا $\vec{OA}(-1,1,0)$ و $\vec{OB}(1,0,1)$ إذن:

$$\vec{OA}\wedge\vec{OB} = \begin{vmatrix}1&0\\0&1\end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix}-1&0\\1&1\end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix}-1&1\\1&0\end{vmatrix}\vec{k} = 1\times\vec{i} - (-1)\vec{j} - 1\times\vec{k} = \boxed{\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}}$$

لدينا المستوى (OAB) متجهتها المنظمية $\vec{OA}\wedge\vec{OB}(1,1,-1)$ إذن المعادلة الديكارتية للمستوى (OAB) تكتب على الشكل $x+y-z+d=0$ وبما أن $O(0,0,0)\in(OAB)$ إذن: $0+0-0+d=0$ أي $d=0$ وبالتالي معادلة ديكارتية للمستوى (OAB) هي $x+y-z=0$.

ب- لدينا:

$$d(\Omega,(OAB)) = \frac{|1+1-(-1)|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}} = \frac{|3|}{\sqrt{3}} = \boxed{\sqrt{3}}$$

بما أن $d(\Omega,(OAB)) = \sqrt{3} < R = 3$ إذن: المستوى (OAB) يقطع الفلكة (S) وفق دائرة (Γ) شعاعها r حيث $\boxed{r = \sqrt{R^2-d^2} = \sqrt{9-3} = \sqrt{6}}$

2) أ- لدينا (Δ) مستقيم مار من Ω و العمودي على (OAB) إذن متجهته الموجهة هي $\vec{u}(1,1,-1)$ ومنه التمثيل البارامتري لـ (Δ) هو:

$$(\Delta):\begin{cases}x = 1+1\times t = 1+t\\ y = 1+1\times t = 1+t\\ z = -1-1\times t = -1-t\end{cases} \quad t\in\mathbb{R}$$

ب- لتكن H مركز الدائرة (Γ) إذن إحداثياتها تحقق:

$$\begin{cases}x = 1+t\\ y = 1+t\\ z = -1-t\end{cases} \quad (1) \qquad \text{و} \qquad x+y-z=0 \quad (2)$$

نعوض (1) في (2) نجد:

$$(1+t)+(1+t)-(-1-t)=0 \Leftrightarrow 3+3t=0 \Leftrightarrow \boxed{t=-1}$$

نعوض القيمة $t=-1$ في (1) نجد: $\begin{cases}x = 1-1 = 0\\ y = 1-1 = 0\\ z = -1+1 = 0\end{cases}$ وبالتالي $\boxed{H(0,0,0)}$

التمرين الثاني:

1) أ- لدينا:

$$(1+i)(-3+6i) = -3+6i-3i-6 = \boxed{-9+3i}$$

و

$$\frac{c-a}{b-a} = \frac{-2+5i-7-2i}{4+8i-7-2i} = \frac{-9+3i}{-3+6i} = \frac{(1+i)(-3+6i)}{-3+6i} = \boxed{1+i}$$

ب- لدينا:

$$\frac{AC}{AB} = \left|\frac{c-a}{b-a}\right| = |1+i| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2} \Rightarrow \boxed{AC = AB\times\sqrt{2}}$$

و

$$(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) \equiv \arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right)[2\pi] \equiv \arg(1+i)[2\pi] = \boxed{\frac{\pi}{4}}[2\pi]$$

لأن: $1+i = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) \Rightarrow \arg(1+i) \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$

2) أ- لدينا:

$$d-b = e^{i\frac{\pi}{2}}(a-b) \Rightarrow d = b+i(a-b) = 4+8i+i(-7+2i-4-8i)$$
$$\Rightarrow d = 4+8i+7i-2-4i+8 = \boxed{10+11i}$$

ب- لدينا:

$$\frac{d-c}{b-c} = \frac{10+11i+2-5i}{4+8i+2-5i} = \frac{12+6i}{6+3i} = \frac{6(2+i)}{3(2+i)} = \frac{6}{3} = \boxed{2}$$

بما أن $\frac{d-c}{b-c} = 2 \in \mathbb{R}$ فإن النقط B و C و D مستقيمية.

التمرين الثالث:

1) لدينا السحب عبارة عن تأليفة لأربع عناصر من بين 10 عناصر إذن:

$$\boxed{\text{card}\,\Omega = C_{10}^4 = \frac{10\times9\times8\times7}{4\times3\times2\times1} = \frac{5040}{24} = 210}$$

و الحدث A: "الحصول على كرتين حمراوين و كرتين خضراوين" أي: 2 V و 2R إذن:

$$\boxed{\text{card}\,A = C_5^2\times C_3^2 = 10\times3 = 30}$$

ومنه:

$$\boxed{P(A) = \frac{\text{card}\,A}{\text{card}\,\Omega} = \frac{30}{210} = \frac{1}{7}}$$

و الحدث B: "لا توجد أية كرة بيضاء من بين الكرات المسحوبة" أي 4 كرات من بين 8 كرات (الحمراء و الخضراء) إذن:

$$\boxed{\text{card}\,B = C_8^4 = \frac{8\times7\times6\times5}{4\times3\times2\times1} = \frac{1680}{24} = 70}$$

ومنه:

$$\boxed{P(B) = \frac{\text{card}\,B}{\text{card}\,\Omega} = \frac{70}{210} = \frac{1}{3}}$$

2) أ- بما أن عدد الكرات البيضاء هي 2 و المتغير العشوائي X يربط كل سحبة لعدد الكرات المسحوبة فإن القيم التي يأخذها المتغير X هي 0 و 1 و 2. $X(\Omega) = \{0,1,2\}$

ب- لدينا:

$$\boxed{P(X=1) = \frac{C_2^1\times C_8^3}{210} = \frac{2\times56}{210} = \frac{112}{210} = \frac{8}{15}}$$

و حسب السؤال 1)

$$\boxed{P(X=0) = P(B) = \frac{1}{3}}$$

و

$$\boxed{P(X=2) = \frac{C_2^2\times C_8^2}{210} = \frac{1\times28}{210} = \frac{2}{15}}$$

و بالتالي قانون احتمال المتغير العشوائي X:

k	0	1	2
$P(X=k)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{2}{15}$

$\sum P(X=k) = \frac{1}{3}+\frac{8}{15}+\frac{2}{15} = \frac{15}{15} = 1$

ذ: الحسن

التمرين الرابع

1) لدينا: $\forall n\in\mathbb{N}^*: 5-u_{n+1}=\dfrac{5(5-u_n)}{5+(5-u_n)}$: إذن $n\in\mathbb{N}^*$ لكل $5-u_{n+1}=5-\dfrac{25}{10-u_n}=\dfrac{5(10-u_n-5)}{5+(5-u_n)}=\dfrac{5(5-u_n)}{5+(5-u_n)}$

من أجل $n=1$ لدينا: $5-u_n=5-0>0$ إذن العبارة صحيحة من أجل $n=1$.

نفترض أن العبارة صحيحة من أجل n أي $5-u_n>0$ ونبين أن العبارة صحيحة من أجل $n+1$ أي $5-u_{n+1}>0$

وحسب الافتراض لدينا $5-u_n>0$ إذن $5(5-u_n)>0$ و $5+(5-u_n)>0$ إذن: $5-u_{n+1}=\dfrac{5(5-u_n)}{5+(5-u_n)}>0$

أي $5-u_{n+1}>0$ وبالتالي: $\forall n\in\mathbb{N}^*: 5-u_n>0$

2) أ- ليكن $n\in\mathbb{N}^*$

- $v_{n+1}=\dfrac{5}{5-u_{n+1}}=\dfrac{5}{\frac{5(5-u_n)}{5+(5-u_n)}}=\dfrac{5+(5-u_n)}{5-u_n}=\boxed{\dfrac{10-u_n}{5-u_n}}$
- $v_{n+1}-v_n=\dfrac{10-u_n}{5-u_n}-\dfrac{5}{5-u_n}=\dfrac{5-u_n}{5-u_n}=\boxed{1}$

ب- لدينا: (v_n) متتالية عددية أساسها 1 وحدها الأول $v_1=\dfrac{5}{5-u_1}=\dfrac{5}{5}=1$ إذن:

$\forall n\in\mathbb{N}^*: v_n=n$ ومنه $v_n=v_1+(n-1)\times r=1+(n-1)=\boxed{n}$.

- $\forall n\in\mathbb{N}^*: \quad u_n=5-\dfrac{5}{n}$.

لدينا $v_n=\dfrac{5}{5-u_n}$ إذن $v_n=\dfrac{5}{u_n}=\dfrac{5}{n}$ أي $5-u_n=\dfrac{5}{n}$

ج- لدينا $\lim\limits_{+\infty}\dfrac{5}{n}=0$ إذن: $\lim\limits_{+\infty}u_n=\lim\limits_{+\infty}\left(5-\dfrac{5}{n}\right)=5$

- $\boxed{\lim\limits_{+\infty}u_n=5}$

التمرين الخامس

1) أ- لدينا:

- $\lim\limits_{+\infty}f(x)=\lim\limits_{+\infty}(x-2)^2e^x=+\infty$ ($x-2\to+\infty$, $e^x\to+\infty$)
- $\lim\limits_{+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{+\infty}(x-2)^2\dfrac{e^x}{x}=+\infty$ ($x-2\to+\infty$, $\dfrac{e^x}{x}\to+\infty$)

إذن المنحنى (C) يقبل فرع شلجمي اتجاهه محور الأراتيب.

ب- لدينا:

- $\lim\limits_{-\infty}f(x)=0$

إذن المنحنى (C) يقبل مقارب أفقي بجوار $-\infty$.

2) أ- ليكن $x\in\mathbb{R}$ لدينا:

- $f(x)=(x-2)^2e^x=(x^2-4x+4)e^x=x^2e^x-4xe^x+4e^x$

$\forall x\in\mathbb{R}: \quad f(x)=x^2e^x-4xe^x+4e^x$

ب- لدينا: $\lim\limits_{-\infty}x^2e^x=0$ و $\lim\limits_{-\infty}-4xe^x=0$ و $\lim\limits_{-\infty}e^x=0$ إذن $\lim\limits_{-\infty}f(x)=0$

3) أ- ليكن $x\in\mathbb{R}$ لدينا:

- $f'(x)=\left[(x-2)^2e^x\right]'=\left((x-2)^2\right)'e^x+(x-2)^2(e^x)'$
$=2(x-2)e^x+(x-2)^2e^x=(x-2)e^x\left(2+(x-2)\right)=\boxed{x(x-2)e^x}$

ب- لدينا: $f'(x)=0\Leftrightarrow x(x-2)e^x=0\Leftrightarrow x=0$ أو $x=2$ لحل المعادلة $f'(x)=0$

بما أن $e^x>0$ $\forall x\in\mathbb{R}$. فإن إشارة $f'(x)$ هي إشارة $x(x-2)$

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$x(x-2)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

إذن f دالة تزايدية على المجالين $]-\infty,0]$ و $[2,+\infty[$

و f دالة تناقصية على المجال $[0,2]$.

ج- جدول تغيرات الدالة f:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	↗	4	↘	0	↗	$+\infty$

4) أ- ليكن $x\in\mathbb{R}$ لدينا:

- $f''(x)=\left(x(x-2)e^x\right)'=(x^2-2x)'e^x+(x^2-2x)(e^x)'$
$=(2x-2+x^2-2x)e^x=(x^2-2)e^x$

$\forall x\in\mathbb{R}: \quad f''(x)=(x^2-2)e^x$ ومنه

لحل المعادلة $f''(x)=0$ لدينا $x=\sqrt{2}$ أو $x=-\sqrt{2}$

$f''(x)=0\Leftrightarrow(x^2-2)e^x=0\Leftrightarrow x^2-2=0\Leftrightarrow x=\sqrt{2}$ أو $x=-\sqrt{2}$

جدول إشارة f''

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

إذن المنحنى (C) يقبل نقطتي انعطاف أفصوليهما $-\sqrt{2}$ و $\sqrt{2}$.

ب- إنشاء المنحنى (C). (أنظر الشكل جانبه)

5) أ- لدينا: $H'(x)=\left[(x-1)e^x\right]'=(x-1)'e^x+(x-1)e^x=e^x+(x-1)e^x=\boxed{xe^x}=h(x)$

إذن: H دالة أصلية لـ h.

- $\int_0^1xe^x\,dx=\left[(x-1)e^x\right]_0^1=0-(-1)=\boxed{1}$

ب- نضع $\begin{cases}u(x)=x^2\\ v'(x)=e^x\end{cases}$ إذن: $\begin{cases}u'(x)=2x\\ v(x)=e^x\end{cases}$

إذن:

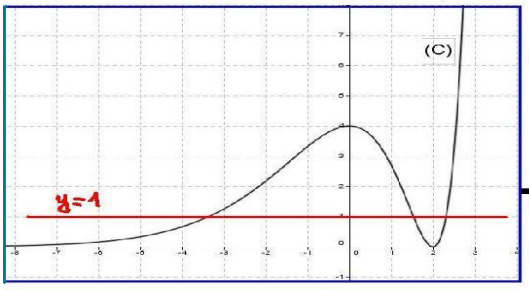
$$\int_0^1x^2e^x\,dx=\left[x^2e^x\right]_0^1-2\int_0^1xe^x\,dx$$
$$=(e-0)-2\times1=\boxed{e-2}$$

ج-

$$A=\left(\int_0^1|f(x)-0|\,dx\right)\times1cm^2$$
$$=\left(\int_0^1(x^2e^x-4xe^x+4e^x)\,dx\right)cm^2$$
$$=\left(\int_0^1x^2e^x\,dx-4\int_0^1xe^x\,dx+4\int_0^1e^x\,dx\right)cm^2$$
$$=(e-2-4\times1+4(e-1))cm^2$$
$$=(5e-10)cm^2=\boxed{5(e-2)cm^2}$$

6) لدينا: $x^2=e^x+4x-4\Leftrightarrow x^2-4x+4=e^x\Leftrightarrow(x-2)^2e^x=1\Leftrightarrow f(x)=1$

إذن عدد حلول المعادلة هي عدد نقط تقاطع المنحنى (C) والمستقيم ذو المعادلة $y=1$ وعددها 3.



مع تحيات Math-Hor