الدوال اللوغاريتمية

الدالة اللوغاريتمية النيبرية

تعريف:

دالة اللوغاريتم النيبري هي الدالة الأصلية للدالة $x \mapsto \frac{1}{x}$ على المجال $]0;+\infty[$

والتي تنعدم في 1 و يرمز لها بالرمز: $\ln$

استنتاجات وخاصيات:

$\ln e = 1$	$\ln 1 = 0$
$\forall x \in]0;+\infty[\quad \forall y \in]0;+\infty[$ $\ln x = \ln y \Leftrightarrow x = y$ $\ln x > \ln y \Leftrightarrow x > y$	
$\forall x \in]0;+\infty[\quad \forall y \in \mathbb{R}$ $\ln x = y \Leftrightarrow x = e^y$	

$\forall x \in]0;+\infty[\quad \forall y \in]0;+\infty[$

$\ln(xy) = \ln x + \ln y$

$(r \in \mathbb{Q}) \quad \ln(x^r) = r \ln x$

$\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln x$

$\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y$

إذا كان n عددا زوجيا فإن: $\forall x \in \mathbb{R}^* \quad \ln(x^n) = n \ln|x|$

مجموعة التعريف:

الدالة f معرفة كما يلي:	مجموعة تعريف الدالة f هي:
$f(x) = \ln[u(x)]$	$D_f = \{x \in \mathbb{R} / x \in D_u$ و $u(x) > 0\}$
$f(x) = \ln\left[(u(x))^2\right]$	$D_f = \{x \in \mathbb{R} / x \in D_u$ و $u(x) \neq 0\}$
$f(x) = \ln\lvert u(x)\rvert$	

نهايات أساسية:

$\lim\limits_{x\to+\infty} (\ln x) = +\infty$	$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$	$(n \in \mathbb{N}^*)$
$\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ >}} (\ln x) = -\infty$	$\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ >}} (x^n \ln x) = 0$	
$\lim\limits_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$	$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$	

الاتصال:

الدالة $x \mapsto \ln x$ متصلة على المجال $]0;+\infty[$

لتكن u دالة معرفة على مجال I

إذا كانت u موجبة قطعا و متصلة على مجال I فإن الدالة $x \mapsto \ln[u(x)]$ متصلة على المجال I

الاشتقاق:

الدالة $x \mapsto \ln x$ قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$

ولدينا:

$$\forall x \in]0;+\infty[\quad (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

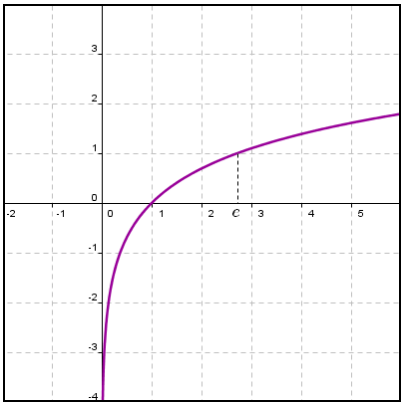
لتكن u دالة معرفة على مجال I

إذا كانت u دالة موجبة قطعا و قابلة للاشتقاق على مجال I

فإن: الدالة $x \mapsto \ln[u(x)]$ قابلة للاشتقاق على المجال I

ولدينا: $\forall x \in I \quad (\ln[u(x)])' = \frac{u'(x)}{u(x)}$

التمثيل المبياني:



إشارة ln:

x	0	1	$+\infty$
$\ln x$	-	0	+

الدالة اللوغاريتم للأساس a حيث: $a \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}$

تعريف:

الدالة اللوغاريتم للأساس a هي الدالة التي يرمز لها بالرمز: ℓog_a

حيث: $\forall x \in]0;+\infty[\quad \ell og_a(x) = \frac{\ln x}{\ln a}$

استنتاجات وخاصيات:

$$\ell og_a 1 = 0$$

$$\ell og_a a = 1$$

$$\forall x \in]0;+\infty[\quad \forall y \in]0;+\infty[\quad \forall r \in \mathbb{Q}$$

$$\ell og_a x = \ell og_a y \Leftrightarrow x = y$$

$$\ell og_a x = r \Leftrightarrow x = a^r$$

$$\forall x \in]0;+\infty[\quad \forall y \in]0;+\infty[$$

$$\ell og_a(xy) = \ell og_a x + \ell og_a y$$

$$(r \in \mathbb{Q}) \quad \ell og_a(x^r) = r\ell og_a x$$

$$\ell og_a\left(\frac{1}{x}\right) = -\ell og_a x$$

$$\ell og_a\left(\frac{x}{y}\right) = \ell og_a x - \ell og_a y$$

نهايات و متفاوتات:

$a > 1$	$0 < a < 1$
$\ell og_a x > \ell og_a y \Leftrightarrow x > y$	$\ell og_a x < \ell og_a y \Leftrightarrow x < y$
$\lim\limits_{x \to +\infty} \ell og_a x = +\infty$	$\lim\limits_{x \to +\infty} \ell og_a x = -\infty$
$\lim\limits_{x \to 0^+} \ell og_a x = -\infty$	$\lim\limits_{x \to 0^+} \ell og_a x = +\infty$

المشتقة:

$$\forall x \in]0,+\infty[\quad (\ell og_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$$