الأعداد العقدية

ذ. محمد الكيال

مجموعة الأعداد العقدية هي : $\mathbb{C}=\{z=a+ib\,/\,(a;b)\in\mathbb{R}^2$ و $i^2=-1\}$

الكتابة الجبرية لعدد عقدي:

ليكن $z=a+ib$ عددا عقديا حيث : $(a;b)\in\mathbb{R}^2$

- $a+ib$ تسمى الكتابة الجبرية للعدد العقدي z
- العدد a يسمى الجزء الحقيقي للعدد z و يرمز له بالرمز : $\mathrm{Re}(z)$
- العدد b يسمى الجزء التخيلي للعدد z و يرمز له بالرمز : $\mathrm{Im}(z)$

حالتان خاصتان:

- إذا كان : $\mathrm{Im}(z)=0$ فإن z هو عدد حقيقي
- إذا كان : $\mathrm{Re}(z)=0$ و $\mathrm{Im}(z)\neq 0$ فإن z يسمى عددا تخيليا صرفا

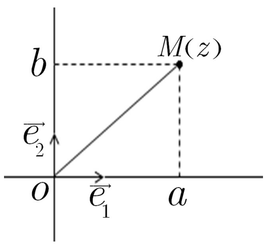
تساوي عددين عقديين:

ليكن z و z' عددين عقديين

$z=z' \Leftrightarrow \mathrm{Re}(z)=\mathrm{Re}(z')$ و $\mathrm{Im}(z)=\mathrm{Im}(z')$

التمثيل المبياني لعدد عقدي:

ليكن المستوى العقدي منسوبا إلى معلم متعامد ممنظم $(o,\vec{e_1},\vec{e_2})$



ليكن $z=a+ib$ عددا عقديا حيث : $(a;b)\in\mathbb{R}^2$

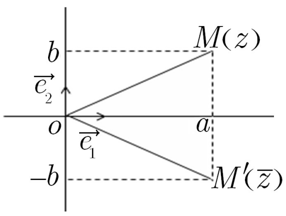
نربط العدد العقدي z بالنقطة $M(a,b)$

- العدد z يسمى لحق النقطة M و النقطة M تسمى صورة العدد z و نكتب : $M(z)$
- العدد z يسمى كذلك لحق المتجهة $\overrightarrow{OM}$ و نكتب : $\overrightarrow{OM}(z)$ أو $z=Aff\left(\overrightarrow{OM}\right)$

مرافق عدد عقدي:

ليكن $z=a+ib$ عددا عقديا حيث : $(a;b)\in\mathbb{R}^2$

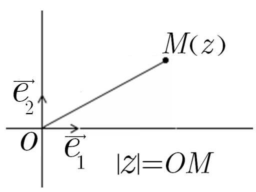
مرافق العدد z هو العدد العقدي : $\bar{z}=a-ib$



$M(z)$ و $M'(\bar{z})$ متماثلان بالنسبة للمحور الحقيقي

z عدد حقيقي $\Leftrightarrow \bar{z}=z$	$\overline{z+z'}=\bar{z}+\bar{z'}$
z عدد تخيلي صرف $\Leftrightarrow \bar{z}=-z$	$\overline{z\times z'}=\bar{z}\times\bar{z'}$
$z+\bar{z}=2\,\mathrm{Re}(z)$	$\overline{z^n}=\bar{z}^n \quad (n\in\mathbb{N}^*)$
$z-\bar{z}=2i\,\mathrm{Im}(z)$	$\overline{\left(\frac{1}{z'}\right)}=\frac{1}{\bar{z'}}$
$z\bar{z}=[\mathrm{Re}(z)]^2+[\mathrm{Im}(z)]^2$	$\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)}=\frac{\bar{z}}{\bar{z'}} \quad (z'\neq 0)$

معيار عدد عقدي:



ليكن $z=a+ib$ عددا عقديا حيث : $(a;b)\in\mathbb{R}^2$

معيار العدد العقدي z هو العدد الحقيقي الموجب : $|z|=\sqrt{z\bar{z}}=\sqrt{a^2+b^2}$

$\left\|z^n\right\| = \|z\|^n \quad (n \in \mathbb{N}^*)$	$\left\|z \times z'\right\| = \|z\| \times \|z'\|$
$\|-z\| = \|z\|$	$\|\overline{z}\| = \|z\|$
$\left\|\frac{z}{z'}\right\| = \frac{\|z\|}{\|z'\|} \quad (z' \neq 0)$	$\left\|\frac{1}{z'}\right\| = \frac{1}{\|z'\|}$

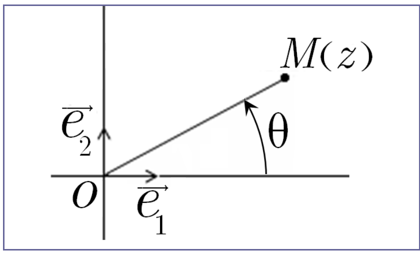
الشكل المثلثي و الكتابة الأسية لعدد عقدي غير منعدم:

ليكن z عددا عقديا غير منعدم صورته M

عمدة العدد العقدي z هو θ أحد قياسات الزاوية الموجهة : $\left(\vec{e_1}, \widehat{\overrightarrow{OM}}\right)$

و نرمز له بالرمز: $\arg z$

ونكتب: $\arg z = \theta\,[2\pi]$



ليكن z عددا عقديا غير منعدم

نضع $r = |z|$ و $\arg z = \theta\,[2\pi]$

- الشكل المثلثي للعدد العقدي z هو: $z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = [r, \theta]$
- الكتابة الأسية للعدد العقدي z هي: $z = re^{i\theta}$

حالات خاصة:

الكتابة المثلثية لعدد حقيقي a غير منعدم

$a > 0$	$a < 0$
$a = [a, 0]$	$a = [-a, \pi]$
$ai = \left[a, +\frac{\pi}{2}\right]$	$ai = \left[-a, -\frac{\pi}{2}\right]$

- $\arg(zz') \equiv (\arg z + \arg z')[2\pi]$
- $\arg \overline{z} \equiv -\arg z\,[2\pi]$
- $-\arg z \equiv (\pi + \arg z)[2\pi]$
- $\arg z^n \equiv n \arg z\ [2\pi]$
- $\arg \frac{1}{z} \equiv -\arg z\ [2\pi]$
- $\arg \frac{z}{z'} \equiv (\arg z - \arg z')\ [2\pi]$

- $[r, \theta] \times [r', \theta'] = [rr'; \theta + \theta']$
- $\overline{[r, \theta]} = [r, -\theta]$
- $-[r, \theta] = [r, \pi + \theta]$
- $[r, \theta]^n = [r^n; n\theta]$
- $\frac{1}{[r'; \theta']} = \left[\frac{1}{r'}; -\theta'\right]$
- $\frac{[r; \theta]}{[r'; \theta']} = \left[\frac{r}{r'}; \theta - \theta'\right]$

- $re^{i\theta} \times r'e^{i\theta'} = rr'e^{i(\theta+\theta')}$
- $\overline{re^{i\theta}} = re^{-i\theta}$
- $-re^{i\theta} = re^{i(\pi+\theta)}$
- $\left(re^{i\theta}\right)^n = r^n e^{in\theta}$
- $\frac{1}{r'e^{i\theta'}} = \frac{1}{r'}e^{-i\theta'}$
- $\frac{re^{i\theta}}{r'e^{i\theta'}} = \frac{r}{r'}e^{i(\theta-\theta')}$

$\forall k \in \mathbb{Z} \quad [r, \theta + 2k\pi] = [r, \theta]$

- z عدد حقيقي $\Leftrightarrow \arg z = k\pi$
- z عدد تخيلي صرف $\Leftrightarrow \arg z = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

صيغة موافر:

$\forall n \in \mathbb{N}$

$(\cos\theta + i\sin n\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$

صيغتا أولر:

$\forall \theta \in \mathbb{R} \qquad \cos\theta = \frac{1}{2}\left(e^{i\theta} + e^{-i\theta}\right)$

و $\sin\theta = \frac{1}{2i}\left(e^{i\theta} - e^{-i\theta}\right)$

حل المعادلة $z^2 = a$ $z \in \mathbb{C}$ حيث $(a \in \mathbb{R})$:

المعادلة:		مجموعة حلول المعادلة:
$z \in \mathbb{C} \quad z^2 = a$	$a > 0$	$S = \{-\sqrt{a}; \sqrt{a}\}$
	$a = 0$	$S = \{0\}$
	$a < 0$	$S = \{-i\sqrt{-a}; i\sqrt{-a}\}$

حل المعادلة: $az^2+bz+c=0$ $z\in\mathbb{C}$ حيث: a و b و c أعداد حقيقية $(a\neq 0)$

المعادلة:		مجموعة حلول المعادلة:
$z\in\mathbb{C}\quad az^2+bz+c=0$ $\left(\Delta=b^2-4ac\right)$	$\Delta>0$	$S=\left\{\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a};\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right\}$
	$\Delta=0$	$S=\left\{\frac{-b}{2a}\right\}$
	$\Delta<0$	$S=\left\{\frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a};\frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}\right\}$

مفاهيم هندسية و مصطلحات الأعداد العقدية:

المفهوم الهندسي	العلاقة العقدية
المسافة AB	$AB=\left\|z_B-z_A\right\|$
I منتصف القطعة $[A;B]$	$z_I=\frac{z_A+z_B}{2}$
قياس الزاوية $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)$	$\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)\equiv\arg\left(\frac{z_c-z_A}{z_B-z_A}\right)[2\pi]$
A و B و C نقط مستقيمية	$\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\in\mathbb{R}$
A و B و C و D نقط متداورة	$\frac{z_B-z_C}{z_D-z_C}\times\frac{z_D-z_A}{z_B-z_A}\in\mathbb{R}$ أو $\frac{z_D-z_C}{z_B-z_C}\times\frac{z_D-z_A}{z_B-z_A}\in\mathbb{R}$

العلاقة العقدية	المفهوم الهندسي
$\left\|z-z_A\right\|=r$ $(r>0)$	• $AM=r$ • M تنتمي إلى الدائرة التي مركزها A و شعاعها r
$\left\|z-z_A\right\|=\left\|z-z_B\right\|$	• $AM=BM$ • M تنتمي إلى واسط $[AB]$
$\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=\left[r;\pm\frac{\pi}{2}\right]$	ABC مثلث قائم الزاوية في A
$\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=[1;\theta]$	ABC مثلث متساوي الساقين في A
$\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=\left[1;\pm\frac{\pi}{2}\right]$	ABC مثلث متساوي الساقين و قائم الزاوية في A
$\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=\left[1;\pm\frac{\pi}{3}\right]$	ABC مثلث متساوي الأضلاع

تمثيلات عقدية لبعض التحويلات الاعتيادية:

التحويل	تمثيله العقدي هو:
الإزاحة t ذات المتجهة $\vec{u}$	$z'=z+b$ حيث b لحق المتجهة $\vec{u}$
التحاكي h الذي مركزه Ω و نسبته k	$z'-\omega=k(z-\omega)$ حيث ω لحق النقطة Ω
الدوران r الذي مركزه Ω و زاويته θ	$z'-\omega=e^{i\theta}(z-\omega)$ حيث ω لحق النقطة Ω

المعادلة التفاضلية :	الحل العام للمعادلة التفاضلية :
$y' = ay + b$ $(a \neq 0)$	$y(x) = \alpha e^{ax} - \frac{b}{a}$ $(\alpha \in \mathbb{R})$

المعادلة التفاضلية :	معادلتها المميزة :	المعادلة المميزة تقبل :		الحل العام للمعادلة التفاضلية :
$y'' + ay' + by = 0$	$r^2 + ar + b = 0$ $(\Delta = a^2 - 4b)$	$\Delta > 0$	حلين حقيقيين مختلفين r_1 و r_2	$y(x) = \alpha e^{r_1 x} + \beta e^{r_2 x}$ حيث: $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$
		$\Delta = 0$	حلا حقيقيا وحيدا r	$y(x) = (\alpha x + \beta) e^{rx}$ حيث: $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$
		$\Delta < 0$	حلين عقديين مترافقين : $r_1 = p - iq$ و $r_2 = p + iq$	$y(x) = (\alpha \cos qx + \beta \sin qx) e^{px}$ حيث: $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$