Concours d'accès en Première année
Epreuve de Mathématiques
Séries Sciences Mathématiques A et B et Sciences & Techniques

Durée : 3 heures 30 min

Exercice 1 (10 pts):

Pour chacune des questions qui suivent, dire, sans justification, si elle est vraie ou fausse. Pour chacune des questions, il est compté un point si la réponse est exacte et zéro sinon.

1. Soient les expressions logiques

$$(*) \qquad p \Rightarrow \big(q \Rightarrow (non(r))\big).$$
$$(**) \qquad (non(q)) \ ou \ (non(r)) \ ou \ (non(p)).$$

   1.1. On a : $(*) \Leftrightarrow (**)$.
   1.2. L'expression (*) est vraie dans le cas où l'on a l'expression : (p ou r) est fausse.
2. Soient les quantificateurs Q_1, Q_2 et $Q_3 \in \{\exists; \forall\}$ et l'expression
$$(***) \qquad Q_1 x \in \mathbb{N}, \qquad Q_2 y \in \mathbb{N}, \qquad Q_3 z \in \mathbb{N}, \qquad x = yz.$$
   $(***)$ n'est vraie que dans un seul cas.
3. Soient A, B et C trois ensembles quelconques.
   3.1. On a toujours $(A \cup B) \setminus (A \cup C) \subset A \cup (B \setminus C)$.
   3.2. On n'a jamais $(A \cup B) \setminus (A \cup C) = A \cup (B \setminus C)$.
4. Soit $P(x) = x^3 - 6x^2 + 13x - 10$
   4.1. $(2 - x)$ divise $P(x)$.
   4.2. $(2 - i)$ et $(2013 - i)$ sont des racines de $P(x)$.
5. Soit $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue en 0 et en 1 et telle que $f(x^2) = f(x)$, alors f est constante.
6. Soit $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et périodique alors f n'est pas bornée.
7. Soit $f: [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ continue et telle qu'il existe $k \in \mathbb{R}$ t.q. : $0 \leq f(x) \leq k \int_0^x f(t)dt$ alors $f \equiv 0$.

Exercice 2 (10 pts):

A (8 pts). *« Deux fonctions continues qui commutent se recoupent forcément. »*

Soient f et g deux fonctions continues de $[0,1] \to \mathbb{R}$ et commutant par composition c.à.d. : $fog = gof$.

1. Soit la fonction $h(x) = f(x) - x$. Montrer qu' $\exists a \in [0,1]$ $t.q.$ $h(a) = 0$. *On dit alors que a est un point fixe de la fonction f.*
   Hypothèse H : *On suppose qu'il n'existe aucun $l \in [0,1]$ $t.q.$ $f(l) = g(l)$.*
2. Soit $\varphi: [0,1] \to \mathbb{R}$ $t.q.$ $\varphi(x) = f(x) - g(x)$. Montrer que φ est de signe constant.
3. Soit la suite $(u_n)_n$ définie par la donnée $u_0 = a$ et $u_{n+1} = g(u_n)$.
   3.1. Montrer que $(u_n)_n$ est bornée.
   3.2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ u_n est un point fixe de f.
   3.3. Montrer que $(u_n)_n$ est monotone et en déduire l'existence d'un certain $l \in [0,1]$ tel que $\lim_{n\to\infty} u_n = l$

4.
   4.1. Montrer que $f(l) = l$ et que $g(l) = l$
   4.2. Conclure.

B (2 pts). *« On ne peut être dépassé par moins rapide que soi »*
Soient deux fonctions continues et dérivables f et g de $[0,1] \to \mathbb{R}^+$ décrivant les trajectoires de deux corps désignés par M_1 et M_2 dans le plan (O, x, y), le temps étant représenté par la variable x. On suppose qu'à l'instant initial $x = 0$ les deux corps partent du même endroit c.à.d. $f(0) = g(0)$ et que M_2 se déplace en tout instant plus vite que M_1 c.à.d. $f'(x) \leq g'(x) \ \ \forall x \in [0,1]$. Montrer alors que M_1 ne peut jamais dépasser M_2 c.à.d. $f(x) \leq g(x) \ \ \forall x \in [0,1]$.

Exercice 3 (9 pts):

Notations : Soient a et b deux entiers dans $\mathbb{N}^*$ *, on note* $b|a$ *si b est un diviseur de a et on définit* $D_a = \{d \in \mathbb{N}^* : d|a\}$ *l'ensemble des diviseurs de a. On note, enfin,* $a \wedge b$ *le plus grand commun diviseur de a et b qui vaut le plus grand élément de l'ensemble* $D_a \cap D_b$.

1. Montrer que $D_{a \wedge b} = D_a \cap D_b$.
2. Montrer que $\forall a, b, c \in \mathbb{N}^* \qquad (a \wedge b) \wedge c = (a \wedge b) \wedge (b \wedge c)$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} k^3$. Montrer que $S_n = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.
4. Soit un entier $p \in \mathbb{N}^*$ quelconque.
   4.1. Calculer $S_{2p} \wedge S_{2p+1}$.
   4.2. Calculer $S_{2p+1} \wedge S_{2p+2}$.
   4.3. Calculer $S_{2p} \wedge S_{2p+1} \wedge S_{2p+2}$.
   4.4. Calculer $S_{2p+1} \wedge S_{2p+2} \wedge S_{2p+3}$.
5. Calculer $(S_n \wedge S_{n+1}) \wedge S_{n+2} \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Problème 1 (22 pts):

Partie A : Questions préliminaires (7 pts)

1. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite dans $\mathbb{Z}$ supposée convergente vers $l \in \mathbb{R}$.
   1.1 Montrer qu'il existe $m \in \mathbb{N}$ t.q. $\quad \forall n \geq m \qquad |u_n - l| < {}^{1}/_{4}$.
   1.2 Montrer que $\forall n \geq m \qquad |u_n - u_{n+1}| < {}^{1}/_{2}$.
   1.3 En déduire que $(u_n)_{n \geq m}$ est constante.
   « On a montré que si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *est une suite dans* $\mathbb{Z}$ *convergente alors elle est stationnaire. »*
2. Soient f une fonction continue et positive et F sa primitive sur $[a, b]$ c.à.d: $\int_a^x f(t)dt = F(x)$.
   2.1 Montrer que F est croissante.
   2.2 Supposons qu'$\exists x_0 \in [a, b]$ t.q. $f(x_0) > 0$, montrer alors qu'il existe un intervalle $I \subset [a, b]$ tel que $x_0 \in I$ et vérifiant $f(x) > 0 \qquad \forall x \in I$.
   2.3 Déduire de 2.1 et 2.2 que si $f \geq 0$ telle que $\int_a^b f(t)dt = 0$ alors $f \equiv 0$.
   2.4 Soit $M \in \mathbb{R}^+$ t.q. $f \leq M$ et g une autre fonction continue et positive sur $[a, b]$. Montrer que $\int_a^b f(t)g(t)dt \leq M \int_a^b g(t)dt$.

Partie B (7 pts):

Soient $p, q\ et\ n \in \mathbb{N}^*$. On définit $P_n(X) = \frac{1}{n!}(qX-p)^n X^n$ et $I_n = \int_0^{\pi} P_n(x)\sin(x)\,dx$.

1. Montrer que $P_n(0)$ et $P_n\left(\frac{p}{q}\right)$ sont dans $\mathbb{Z}$.
2. Montrer que

$$(X^n)^{(i)}(0)=\begin{cases} 0 & si\ i \neq n \\ n! & si\ i = n, \end{cases}$$

et que

$$((qX-p)^n)^{(i)}\left(\frac{p}{q}\right) = \begin{cases} 0 & si\ i \neq n \\ n!\,q^n & si\ i = n. \end{cases}$$

3. En déduire que $(P_n)^{(k)}(0)$ et $(P_n)^{(k)}(\frac{p}{q}) \in \mathbb{Z}$ $\forall k \in \mathbb{N}^*$.
4. Vérifier qu' $\exists M \in \mathbb{R}^+$ $sup_{[0,\pi]}|X(qX-p)| \leq \pi M$.
5. Montrer que $\forall p, q \in \mathbb{N}^*$ $I_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Partie C (8 pts):

Supposons qu'$\exists\, p, q \in \mathbb{N}^*$ tels que $\pi = \frac{p}{q}$.

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $I_n \in \mathbb{Z}$
2. Montrer qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ $\forall n \geq N$ $I_{2n} = 0$.
3. En déduire que $P_{2n}(\pi/2) = 0$ $\forall n \geq N$.
4. Savez-vous ce que vous avez démontré ?

Problème 2 (9 pts):

Soient u_0, u_1 donnés dans $\mathbb{R}^{+,*}$ et $u_{n+2} = \frac{2}{1/u_{n+1} + 1/u_n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

On pose $v_n = 1/u_n$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$

1. Montrer que $u_n > 0$, $\forall n \geq 2$.
2. Est ce que la suite $(u_n)_n$ peut être strictement croissante ou strictement décroissante ?
3. On pose $V_n = \begin{pmatrix} v_{n-1} \\ v_n \end{pmatrix}$, $\forall n \geq 2$ et $V_1 = \begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \end{pmatrix}$. Montrer, alors, que $V_n = A^{n-1}.V_1$.
4. Soient $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix}$.

   4.1. Calculer P^{-1}.
   4.2. Calculer $P.D.P^{-1}$ et D^n.
   4.3. Calculer $(P.D.P^{-1})^n$.

5. Déduire de ce qui précède que $V_n = P.D^{n-1}.P^{-1}.V_1$ et trouver l'expression de v_n.
6. Trouver $\lim_{n\to\infty} u_n$.