Université Moulay Ismaïl

Ecole Nationale Supérieure d'Arts et Métiers — Meknès

CONCOURS D'ENTREE en 1ère Année

Filière : Sciences Maths A, B et Sciences techniques

Epreuve de Mathématiques

Samedi 22/07/06 - Durée : 3h 33mn

Notions de base et raisonnement

I.1 La relation $p \Longrightarrow q$ se lit "si p, alors q". Que signifie-t-elle ? **(2Pts)**

(1.a) p est une condition suffisante pour q

(1.b) q est une condition nécessaire pour p

(1.c) Pour que q soit vraie, il suffit que p soit vraie

(1.d) Pour que p soit vraie, il suffit que q soit vraie

(1.e) q est vraie si et seulement si p est vraie

(1.f) Pour que q soit fausse il faut que p soit fausse

(1.g) Pour que q soit fausse il suffit que p soit fausse

I.2 Principe de récurrence. Pour tout entier naturel n, soit $P(n)$ une assertion portant sur n, et telle que si $P(n)$ est vraie, alors $P(n+1)$ est aussi vraie. On suppose qu'il existe un entier n_0 tel que $P(n_0)$ soit fausse. Quelles conclusions peut-on en tirer ? **(2Pts)**

(2.a) $P(n_0-1)$ est fausse

(2.b) $P(n)$ est fausse pour tout entier $n \leq n_0$

(2.c) $P(n_0+1)$ est fausse

(2.d) $P(n)$ est fausse pour tout entier $n \geq n_0$

(2.e) $P(n)$ est fausse pour tout entier n

I.3 Soient A, B, C et D quatre ensembles. Quelles sont les paires d'ensembles égales ? **(2Pts)**

(3.a) $(A \setminus C) \cup (B \setminus C)$ et $(A \cup B) \setminus C$

(3.b) $(A \setminus B) \cup (A \setminus C)$ et $A \setminus (B \cap C)$

(3.c) $(A \setminus C) \setminus (B \setminus C)$ et $A \cap (C \setminus B)$

(3.d) $(A \setminus B) \setminus (A \setminus C)$ et $(A \setminus B) \setminus C$

(3.e) $(A \times B) \cup (B \times D)$ et $(A \cup B) \times (C \cup D)$

Suites numériques

II.1 Soit la suite $(u_n)_{n\in I\!N} = (x^n)_{n\in I\!N}$ où x est un nombre réel

II.1.a On pose $x > 1$ et $x = 1 + a$ avec $a \in]0, +\infty[$. Démontrer que $(1+a)^n > 1 + na$ pour tout $n \geq 2$ et $n \in I\!N$. Déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\in I\!N}$ quand $n \longrightarrow +\infty$. **(1Pt)**

II.1.b On suppose que $0 < x < 1$. Déduire de (II.1.a) que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$. **(1Pt)**

II.1.c Etudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in I\!N}$ dans les cas où $x = 1$ et $x \leq 0$. **(2Pts)**

II.2 Soient a et b deux nombres réels strictement positifs. Etudier la convergence de la suite de terme général

$$v_n = \frac{a^n - b^n}{a^n + b^n} \quad \text{avec } n \in I\!N \quad \textbf{(2Pts)}$$

II.3 Soit $(a_n)_{n\in I\!N^*}$ la suite définie par tout entier naturel n par

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = \dfrac{1}{16}\left(1 + 4\ a_n + \sqrt{1 + 24\ a_n}\right) \end{cases}$$

on pose par ailleurs : $b_n^2 = 1 + 24\ a_n$ avec $b_n \geq 0$. Montrer que $\forall n \in I\!N^*$, $b_{n+1} = \dfrac{1}{2}(b_n + 3)$. **(2Pts)**

Fonctions réelles : Limites. Continuité. Dérivées. Primitives

III.1 Soit $f(x) = \dfrac{x}{1+|x|}$ avec $x \in I\!R$

III.1.a Montrer que f est bornée sur $I\!R$. **(1Pt)**

III.1.b Etudier la dérivabilité de f. **(1Pt)**

III.1.c Etudier la parité de f. **(1Pt)**

III.1.d Montrer que f définit une bijection de $I\!R$ sur $]-1, 1[$. **(1Pt)**

III.2 Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 \left(\exp\left(\dfrac{1}{x}\right) - \exp\left(\dfrac{1}{x+1}\right)\right)$. **(2Pts)**

III.3 Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle fermé borné $[a, b]$. Soient $x_1, x_2, \cdots, x_n$ n valeurs dans cet intervalle. Prouver qu'il existe un élément c de $[a, b]$ tel que

$$f(c) = \frac{1}{n}\left(f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)\right) \quad \textbf{(1Pt)}$$

III.4 Pour tout $x \in]0, +\infty[$, $f(x) = \ln\left(e^{3x} + e^{2x} - e^x - 1\right)$ et que $g(x) = e^{3x} + e^{2x} - e^x - 2$. Montrer que

$$\exists \alpha \in \left]\ln\left(\frac{6}{5}\right), \ln\left(\frac{5}{4}\right)\right[\quad \text{tel que} \quad g(\alpha) = 0 \quad \text{et} \quad f(\alpha) = 0 \quad \textbf{(2Pts)}$$

III.5 Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0, 1]$ par $f(x) = \cos(\pi x)$. Pour tout entier naturel $n \geq 2$, on pose $s_n = \dfrac{1}{n}\left[f(0) + f\left(\dfrac{1}{n}\right) + f\left(\dfrac{2}{n}\right) + \cdots + f\left(\dfrac{n-1}{n}\right)\right]$. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n$. **(1Pt)**

III.6 Soit f une fonction numérique définie et continue sur $[a, b]$ et telle que pour tout réel x : $f(x) = f(a + b - x)$. Prouver que $\displaystyle\int_a^b t f(t)\, dt = \frac{a+b}{2} \int_a^b f(t)\, dt$. **(1Pt)**

III.7 Soit g une fonction réelle définie et continue sur $I\!R$. Démontrer que si g est périodique de période T alors la fonction G définie par $G(x) = \displaystyle\int_x^{x+T} g(t)\, dt$ est constante pour tout $x \in I\!R$. **(1Pt)**

Dénombrement et arithmétique

IV.1 Dans une station-service deux distributeur sont placés côte à côte, on désigne l'un par G (gauche) et l'autre par D (droite). 25 personnes se présentent successivement pour sortir une boisson. On désigne par "séquence" la suite, des choix successifs des usagers, mise sous la forme : $GDGGGD\cdots$ (25 lettres G ou D).

IV.1.a Combien y a t-il de séquences distinctes possibles ? **(1Pt)**

IV.1.b Combien y a t-il de cas où 10 usagers se sont servis au distributeur de gauche ? **(1Pt)**

IV.2 On dispose de deux urnes contenant chacune 30 boules distinctes (par exemples numérotées). Combien y a t-il de possibilités pour tirer 10 boules de la $1^{\text{ère}}$ urne et 15 boules de la $2^{\text{ème}}$? **(2Pts)**

IV.3 Prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $1\binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + 3\binom{n}{3} + \cdots + n\binom{n}{n} = n2^{n-1}$. **(1Pt)**

IV.4 Montrer que $A = \dfrac{\sqrt[3]{2^{10}} \times \sqrt{\sqrt{64}} \times \sqrt[5]{6^5}}{\sqrt{18} \times \sqrt{\sqrt[3]{256}}}$ est un entier. **(1Pt)**

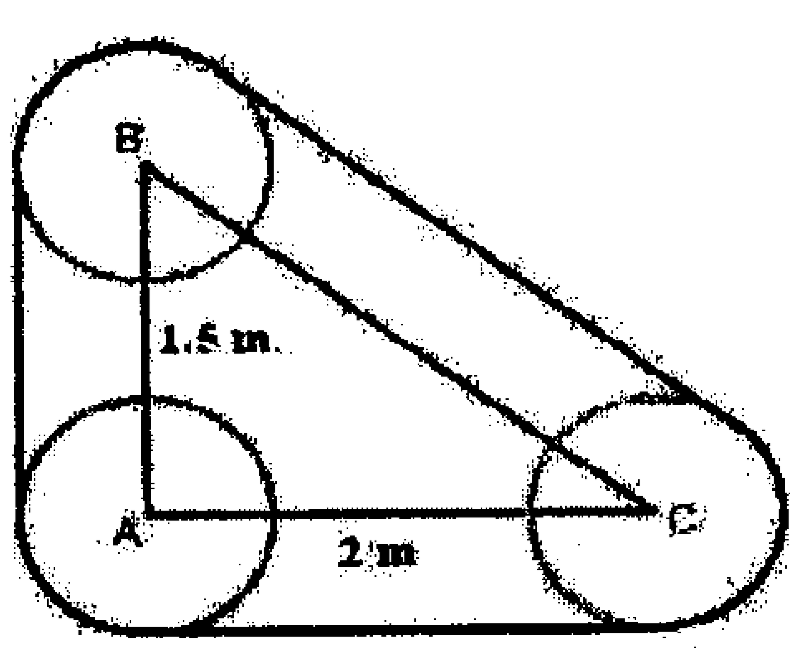
IV.5 Soit $(A, B, C) \in \mathbb{R}^3 \ / \ A + B + C = \pi$. Montrer que

$$\sin A + \sin B + \sin C = 4\cos\left(\frac{A}{2}\right)\cos\left(\frac{B}{2}\right)\cos\left(\frac{C}{2}\right) \qquad \textbf{(1Pt)}$$

Géométries

V.1 L'espace est muni d'une base orthonormale $\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$. Déterminer l'ensemble des réels a tels que les vecteurs $\vec{u}\,(2a, 1, 0)$ et $\vec{v}\,(-a, 3, 4)$ soient orthogonaux. **(1Pt)**

V.2



Une courroie de transmission relie trois poulies dont les axes sont disposés en triangle rectangle. Les côté adjacents de l'angle droit ont pour largeurs respectivement $1.5m$ et $2m$ (voir figure). Chaque poulie à un diamètre de $1m$. Quelle est la longueur de la courroie ? **(2Pts)**

V.3 Etant donné un coloriage des points du plan (P) en : jaune, noire et rouge. Montrer qu'il existe au moins deux points P_1 et P_2 qui ont la même couleur et la distance entre P_1 et P_2 est égale à 1. **(3Pts)**

Mathématiques amusantes

VI.1 Le congrès des maths a vu se réunir les cha-maths (qui ont deux bosses des maths) et les dro-maths (qui ont une seule bosse des maths). Lors du congrès, on a compté 56 pieds (sous les tables) et 45 bosses (au dessus des tables). Combien y avait-il de cha-maths et de dro-maths (qui ont, les uns et les autres deux pieds comme tout le monde !) ? **(1Pt)**

VI.2 Le nombre d'élèves ingénieurs à l'ENSAM au cours de l'année universitaire $2005 - 2006$ est n_0. Si l'ENSAM a décidé d'augmenter ce nombre de 5% chaque année. Déterminer le nombre d'années à partir de 2006 pour que le nombre d'élèves double. **(2Pts)**

VI.3 12 poules mangent $36kg$ de grain en 18 jours. 9 poules pondent 12 oeufs en 8 jours. Combien faut-il de grain pour pondre 2006 oeufs ? **(3Pts)**