Université Moulay Ismaïl
Ecole Nationale Supérieure d'Arts et Métiers — Meknès

CONCOURS D'ENTREE en 1ère Année

Filière : Sciences expérimentales et techniques

Epreuve de Mathématiques

Samedi 22/07/06 - Durée : 3h 33mn

Notions de base et raisonnement

I.1 La relation $p \Longrightarrow q$ se lit "si p, alors q". Que signifie-t-elle ? **(2Pts)**

- **(1.a)** p est une condition suffisante pour q
- **(1.b)** q est une condition nécessaire pour p
- **(1.c)** Pour que q soit vraie, il suffit que p soit vraie
- **(1.d)** Pour que p soit vraie, il suffit que q soit vraie
- **(1.e)** q est vraie si et seulement si p est vraie
- **(1.f)** Pour que q soit fausse il faut que p soit fausse
- **(1.g)** Pour que q soit fausse il suffit que p soit fausse

I.2 Principe de récurrence. Pour tout entier naturel n, soit $P(n)$ une assertion portant sur n, et telle que si $P(n)$ est vraie, alors $P(n+1)$ est aussi vraie. On suppose qu'il existe un entier n_0 tel que $P(n_0)$ soit fausse. Quelles conclusions peut-on en tirer ? **(2Pts)**

- **(2.a)** $P(n_0 - 1)$ est fausse
- **(2.b)** $P(n)$ est fausse pour tout entier $n \leq n_0$
- **(2.c)** $P(n_0 + 1)$ est fausse
- **(2.d)** $P(n)$ est fausse pour tout entier $n \geq n_0$
- **(2.e)** $P(n)$ est fausse pour tout entier n

I.3 Soient A, B, C et D quatre ensembles. Quelles sont les paires d'ensembles égales ? **(2Pts)**

- **(3.a)** $(A \setminus C) \cup (B \setminus C)$ et $(A \cup B) \setminus C$
- **(3.b)** $(A \setminus B) \cup (A \setminus C)$ et $A \setminus (B \cap C)$
- **(3.c)** $(A \setminus C) \setminus (B \setminus C)$ et $A \cap (C \setminus B)$
- **(3.d)** $(A \setminus B) \setminus (A \setminus C)$ et $(A \setminus B) \setminus C$
- **(3.e)** $(A \times B) \cup (B \times D)$ et $(A \cup B) \times (C \cup D)$

Suites numériques

II.1 Soit la suite $(u_n)_{n\in \mathbb{N}} = (x^n)_{n\in \mathbb{N}}$ où x est un nombre réel

II.1.a On pose $x > 1$ et $x = 1 + a$ avec $a \in]0, +\infty[$. Démontrer que $(1+a)^n > 1 + na$ pour tout $n \geq 2$ et $n \in \mathbb{N}$. Déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\in \mathbb{N}}$ quand $n \longrightarrow +\infty$. **(1Pt)**

II.1.b On suppose que $0 < x < 1$. Déduire de (II.1.a) que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$. **(1Pt)**

II.1.c Etudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in \mathbb{N}}$ dans les cas où $x = 1$ et $x \leq 0$. **(2Pts)**

II.2 On considère la suite de terme général : $a_n = \left(1 + \frac{1}{n^2}\right) \times \left(1 + \frac{2}{n^2}\right) \times \cdots \times \left(1 + \frac{n}{n^2}\right)$ avec $n \in \mathbb{N}^*$.

On pose $b_n = \ln(a_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Sachant que $\forall x > 0$ $x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$, démontrer que

$$\frac{n+1}{2n} - \frac{(n+1)(2n+1)}{12n^3} \leq b_n \leq \frac{n+1}{2n} \ \forall n \in \mathbb{N}^* \quad \textbf{(2Pts)}$$

II.3 Soient a et b deux nombres réels strictement positifs. Etudier la convergence de la suite de terme général

$$v_n = \frac{a^n - b^n}{a^n + b^n} \quad \text{avec } n \in \mathbb{N} \quad \textbf{(2Pts)}$$

Fonctions réelles : Limites. Continuité. Dérivées. Primitives

III.1 Soit $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$ avec $x \in \mathbb{R}$

III.1.a Montrer que f est bornée sur $\mathbb{R}$. **(1Pt)**

III.1.b Etudier la dérivabilité de f. **(1Pt)**

III.1.c Etudier la parité de f. **(1Pt)**

III.1.d Montrer que f définit une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]-1, 1[$. **(1Pt)**

III.2 Soit la fonction f définie par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 + x - a}{x - 2} & x > 2 \\ \dfrac{2x + b}{3} & x \leq 2 \end{cases}.$$

Déterminer les réels a, b pour que f soit continue en 2. **(2Pts)**

III.3 Calculer la dérivée de la fonction $t \longmapsto \ln(-\ln(t))$ avec $t \in]0, 1[$. **(1Pt)**

III.4 Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle fermé borné $[a, b]$. Soient $x_1, x_2, \cdots, x_n$ n valeurs dans cet intervalle. Prouver qu'il existe un élément c de $[a, b]$ tel que

$$f(c) = \frac{1}{n}(f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)) \quad \textbf{(1Pt)}$$

III.5 Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists! x_n \in \mathbb{R}$ / $(x_n)^n \ln x_n = 1$. **(2Pts)**

III.6 Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0, 1]$ par $f(x) = \cos(\pi x)$. Pour tout entier naturel $n \geq 2$, on pose $s_n = \frac{1}{n}\left[f(0) + f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{2}{n}\right) + \cdots + f\left(\frac{n-1}{n}\right)\right]$. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n$. **(1Pt)**

III.7 Soit f une fonction numérique définie et continue sur $[a, b]$ et telle que pour tout réel x : $f(x) = f(a + b - x)$.
Prouver que $\int_a^b t f(t)\, dt = \frac{a+b}{2} \int_a^b f(t)\, dt$. **(1Pt)**

Dénombrement et arithmétique

IV.1 Dans une station-service deux distributeur sont placés côte à côte, on désigne l'un par G (gauche) et l'autre par D (droite). 25 personnes se présentent successivement pour sortir une boisson. On désigne par "séquence" la suite, des choix successifs des usagers, mise sous la forme : $GDGGGD\cdots$ (25 lettres G ou D).

IV.1.a Combien y a t-il de séquences distinctes possibles ? **(1Pt)**

IV.1.b Combien y a t-il de cas où 10 usagers se sont servis au distributeur de gauche ? **(1Pt)**

IV.2 On dispose de deux urnes contenant chacune 30 boules distinctes (par exemples numérotées). Combien y a t-il de possibilités pour tirer 10 boules de la $1^{\text{ère}}$ urne et 15 boules de la $2^{\text{ème}}$? **(2Pts)**

IV.3 Prouver que pour tout $n \in I\!N^*$ on a : $\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + \cdots + (-1)^n \binom{n}{n} = 0.$ **(1Pt)**

IV.4 Montrer que $A = \dfrac{\sqrt[3]{2^{10}} \times \sqrt{\sqrt{64}} \times \sqrt[5]{6^5}}{\sqrt{18} \times \sqrt{\sqrt[3]{256}}}$ est un entier. **(1Pt)**

IV.5 Soit A, B, C des réels tels que $A + B + C = \pi$. Montrer que

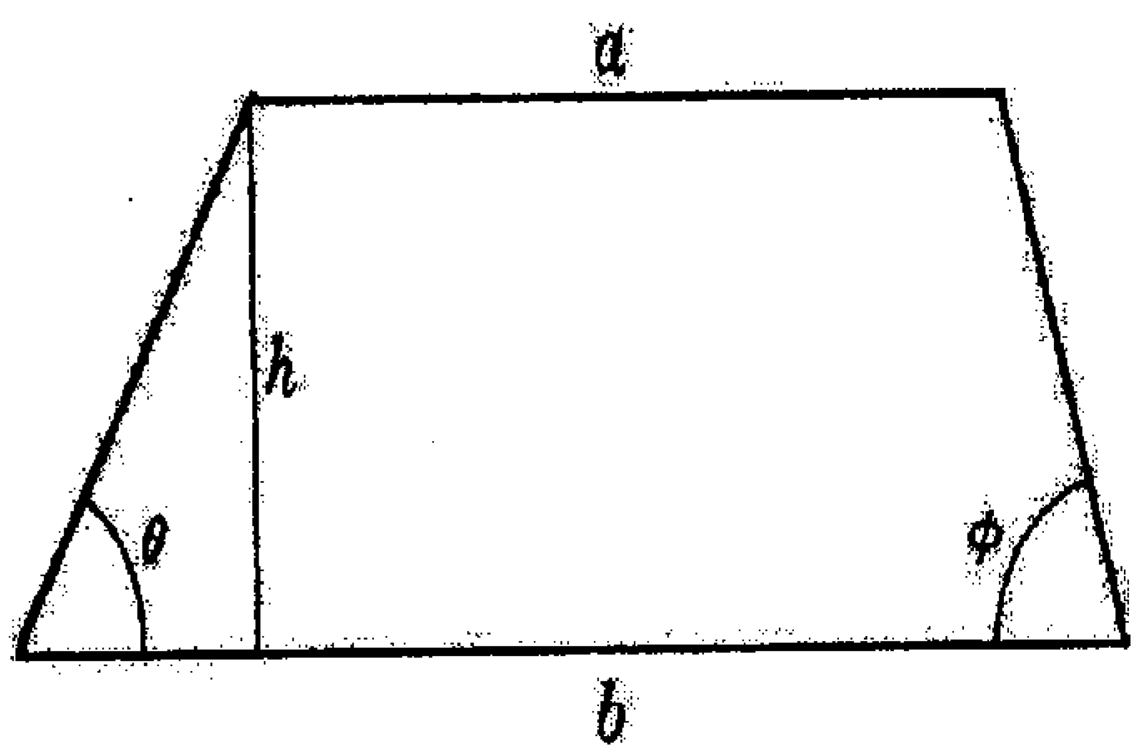
$$\sin A + \sin B + \sin C = 4\cos\left(\frac{A}{2}\right)\cos\left(\frac{B}{2}\right)\cos\left(\frac{C}{2}\right) \quad \textbf{(1Pt)}$$

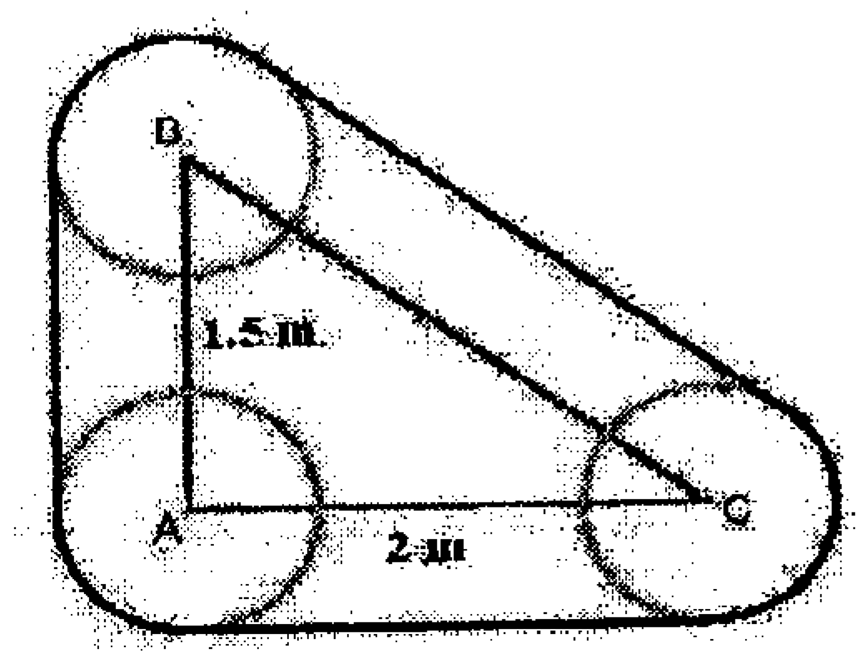
Géométries

V.1 L'espace est muni d'une base orthonormale $\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$. Déterminer l'ensemble des réels a tels que les vecteurs $\overrightarrow{u}\,(2a, 1, 0)$ et $\overrightarrow{v}\,(-a, 3, 4)$ soient orthogonaux. **(1Pt)**

V.2 Calculer le périmètre du trapèze de la figure gauche en fonction de a, b, h, θ et Φ. **(1Pt)**

V.3 Une courroie de transmission relie trois poulies dont les axes sont disposés en triangle rectangle. Les côtés adjacents de l'angle droit ont pour largeurs respectivement $1.5m$ et $2m$ (voir la figure droite). Chaque poulie à un diamètre de $1m$. Quelle est la longueur de la courroie ? **(2Pts)**





Mathématiques amusantes

VI.1 Le congrès des maths a vu se réunir les cha-maths (qui ont deux bosses des maths) et les dro-maths (qui ont une seule bosse des maths). Lors du congrès, on a compté 56 pieds (sous les tables) et 45 bosses (au dessus des tables). Combien y avait-il de cha-maths et de dro-maths (qui ont, les uns et les autres deux pieds comme tout le monde !) ? **(1Pt)**

VI.2 Le nombre d'élèves ingénieurs à l'ENSAM au cours de l'année universitaire $2005-2006$ est n_0. Si l'ENSAM décide d'augmenter ce nombre de 5% chaque année. Déterminer le nombre d'années à partir de 2006 pour que le nombre d'élèves double. **(2Pts)**

VI.3 12 poules mangent 36 kg de grain en 18 jours. 9 poules pondent 12 oeufs en 8 jours. Combien faut-il de grain pour pondre 2006 oeufs ? **(3Pts)**