Université Moulay Ismaïl
Ecole Nationale Supérieure d'Arts et Métiers — Meknès

CONCOURS D'ENTREE en 1ère Année

Filière : Sciences Maths A, B et Sciences & Techniques

Epreuve de Mathématiques

Vendredi 22/07/05 - Durée : 3h 28mn

Exercice I

I.1 Donner dans chacun des cas qui suivent la définition et une représentation graphique des propositions suivantes:

I.1.a $\lim_{x \to a} f(x) = l$ avec $l \in \mathbb{R}$ et $a \in D_f$ **(1Pt)**

I.1.b $\lim_{x \to +\infty} f(x) = l$ avec $l \in \mathbb{R}$ **(1Pt)**

I.1.c $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$ avec $a \in D_f$ **(1Pt)**

I.1.d $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ **(1Pt)**

I.2 Donner une condition suffisante pour que les propositions (I.1.a), (I.1.b), (I.1.c) et (I.1.d) ne soient pas vraies. **(4Pts)**

I.3 Les réponses aux questions qui suivent doivent être justifiées et illustrées graphiquement.

I.3.a Est-ce que toute fonction continue sur un intervalle $]a, b[$ est bornée sur le même intervalle ? **(1Pt)**

I.3.b Donner deux cas où une fonction est continue en un point $x_0 \in [a, b]$ et non dérivable en x_0. **(1Pt)**

I.3.c Peut-on avoir une fonction continue et dérivable sur $[a, b]$ telle que

$$\exists x_0 \in [a, b] \ : \ f(x_0) = \sup_{x \in [a,b]} f(x) \text{ et } f'(x_0) < 0 \ ? \quad \textbf{(1Pt)}$$

I.4 Soient f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $[a, b]$ et $A = \{x \in I = [a, b] \ / \ f'(x) = 0\}$.

I.4.a Discuter, en justifiant, dans chacun des cas suivants la monotonie de f : $A = I$, $A = \{a\}$, $A = \{b\}$, $A = I \setminus \{a\}$. **(4Pts)**

I.4.b Peut-on avoir A fini, $A \neq \emptyset$ et f strictement monotone sur I ? **(1Pt)**

I.4.c On considère la fonction

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{1 + x \sin\left(\frac{1}{x}\right)} & \text{si } x \in]0, 1] \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}.$$

I.4.c1 Montrer que g est dérivable sur $[0, 1]$. **(2Pts)**

I.4.c2 Montrer que g est strictement croissante sur $[0, 1]$. **(1Pt)**

I.4.c3 Donner A. Que peut-on déduire ? **(2Pts)**

I.5 Notons $J =]-\alpha, \alpha[$ et définissons $\beta(a, h) = \dfrac{g(a+h) - g(a-h)}{2h}$ où $a \in J$. On appelle dérivée centrale de g la limite (si elle existe) de $\beta(a, h)$ quand $h \longrightarrow 0$.

I.5.a Montrer que si g est dérivable en a alors $\lim_{h \to 0} \beta(a, h)$ existe et est égale à $g'(a)$. **(2Pts)**

I.5.b Dans le cas où $g(x) = |x+2|$ et $J =]-5,5[$, étudier g et montrer que g admet une dérivée centrale en tout point. Que peut-on déduire ? Construire un autre exemple illustrant votre déduction. **(2Pts)**

I.6 On considère l'ensemble $\mathcal{B}$ des fonctions non nulles de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \; h(x)\,h(y) = h(x+y) \qquad (R)$$

I.6.a Montrer que $\forall h \in \mathcal{B}$ on a h est strictement positive. **(2Pts)**

I.6.b Soit h vérifiant la relation (R). Discuter la $\lim_{x\to+\infty} h(x)$ selon la valeur de $h(1)$. **(3Pts)**

Exercice II

II.1 Etudier la convergence des suites de termes générales :

$$a_n = \frac{(-1)^n}{n}, \qquad b_n = \begin{cases} n^2 & \text{si } \sin\left(\frac{n}{12}\right) \geq \frac{n}{12} \\ \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+n^2}} & \text{sinon} \end{cases}, \qquad c_n = \sqrt{n}\frac{p_n}{q_n}$$

où p_n est le plus grand nombre premier strictement inférieur à $\sqrt{n}$ et q_n est le plus petit nombre premier strictement supérieur à n^2. **(3Pts)**

II.2 Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles.

II.2.a Si $\frac{1}{u_n} \longrightarrow +\infty$, est ce que $u_n \longrightarrow 0$? (justifier) **(1Pt)**

II.2.b Si $\frac{1}{u_n} \longrightarrow 0$, est ce que $u_n \longrightarrow +\infty$? (justifier) **(1Pt)**

II.3 Soient (s_n) et (t_n) deux suites réelles, supposons que $\lim_{n\to+\infty} s_n t_n = ab$ et $\lim_{n\to+\infty} (s_n - t_n) = a-b$ avec $(a,b) \in \mathbb{R}_+^2$.

II.3.a Donner un exemple où (s_n) et (t_n) divergent et un autre cas où elles convergent respectivement vers a et b. **(2Pts)**

II.3.b Supposons que $0 < s_n < t_n$, montrer que $s_n \longrightarrow a$ et $v_n \longrightarrow b$. **(3Pts)**

II.4 Soit la fonction $f_n(x) = xe^x - n$ avec $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$.

II.4.a Montrer que f_n admet une racine positive unique notée r_n **(1Pt)**

II.4.b Etudier la convergence de (r_n) **(2Pts)**

II.4.c Existe-t-il des valeurs de n telles que $\ln(n) - \ln(\ln(n)) \leq r_n \leq \ln(n)$? **(2Pts)**

II.5 Montrer que la suite de terme $w_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} dt$ converge vers 0. **(3Pts)**

Exercice III

III.1 Soient z_1, z_2 et z_3 des nombres complexes quelconques. Montrer que

III.1.a $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ **(1Pt)**

III.1.b $|z_1 + z_2 + z_3| \leq |z_1| + |z_2| + |z_3|$ **(1Pt)**

III.1.c $|z_1 - z_2| \geq |z_1| - |z_2|$ **(1Pt)**

III.2 Un nombre z est appelé algébrique s'il est solution d'une équation algébrique

$$a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1} z + a_n = 0 \qquad \text{où } a_0, \cdots, a_n \text{ sont des entiers.}$$

Montrer que $\sqrt{3} + \sqrt{2}$ et $\sqrt[3]{4} - 2i$ sont algébriques. **(2Pts)**

Exercice VI : Divers

Q 23. On dispose de 100 m de clôture pour délimiter un enclos rectangulaire. Quelles dimensions donner à l'enclos pour que celui-ci délimite une aire maximale ? **(1Pt)**

Q 24. Un magasin de location vidéo propose trois options :

Option 1 : abonnement 200 DH et 9 DH par cassette.

Option 2 : sans abonnement et 20 DH par cassette.

Option 3 : carte donnant droit à au plus 11 cassettes 200 DH

a) Calculer en fonction du nombre n de cassettes louées le prix total payé avec chacune des options. **(1Pt)**

b) Quelle est l'option la plus intéressante ? **(1Pt)**

Q 25. Une urne contient 20 boules : 13 vertes et 7 rouges. On tire successivement 3 boules au hasard, avec remise de la boule tirée. Quelle est la probabilité :

a) d'obtenir dans l'ordre deux rouges et une verte (événement RRV) ? **(1Pt)**

b) d'obtenir sans tenir compte de l'ordre deux rouges et une verte ? **(1Pt)**

Q 26. Un étudiant ensamien a dans sa poche 10 pièces de monnaie : 4 pièces 1 DH, 4 pièces 0.50 DH et 2 pièces 0.20 DH. Pour acheter un sandwitch de 3.7 DH. Il tire de sa poche au hasard 5 pièces.

c) Quelle est la probabilité qu'il obtienne exactement 3.7 DH ? **(1Pt)**

d) Quelle est la probabilité qu'il obtienne une somme suffisante pour payer son achat ? **(2Pts)**

Q 27. Démontrer que tout entier n supérieur ou égal à 24 peut s'écrire sous la forme : $\exists (a, b) \in I\!N \times I\!N \ / \ n = 5a + 7b$. **(2Pts)**

Q 28. Quelles doivent être les dimensions d'une boîte cylindrique de volume $1,6\ dm^3$ pour que sa surface totale soit minimale. **(2Pts)**

Q 29. Pour quoi le raisonnement suivant est vrai ou faux ? *Soit à démontrer que pour tout entier naturel n, $10^n + 1$ est divisible par* 9. On a $10^{n+1} + 1 = 10 \times 10^n + 1 = (9 + 1)\,10^n + 1 = 9 \times 10^n + 10^n + 1$. Donc si $10^n + 1$ est divisible par 9, il en est de même de $10^{n+1} + 1$ ce qui prouve le résultat. **(1Pt)**