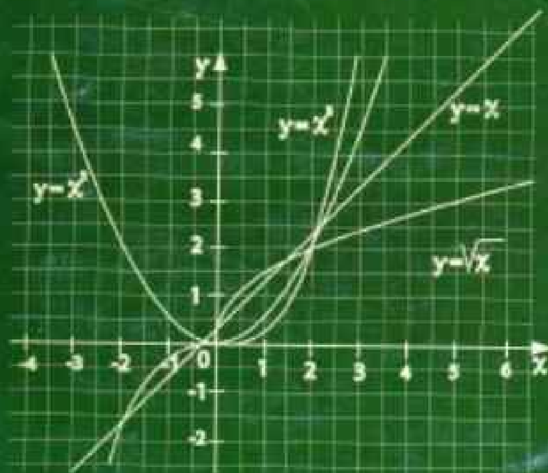
الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية

الرياضيات

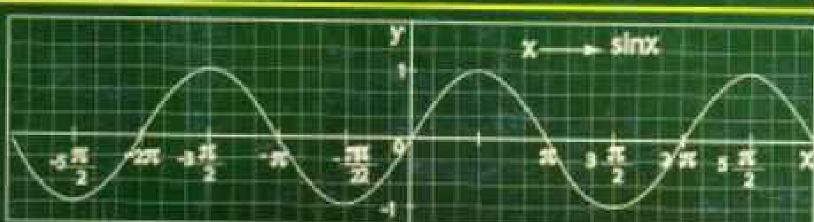


السنة الثانية ثانوي

علوم تجريبية

رياضيات

تقني رياضي



مقدمة

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التربية الوطنية

الرياضيات

السنة الثانية ثانوي
علوم تجريبية – رياضيات – تقني رياضي

إشراف و تأليف
محمد فاتح مراد
مفتش التربية والتكوين

المؤلفون:
محمد قورين – مفتش التربية والتكوين
جمال تاوريرت – مفتش التربية والتكوين
كريمة بوعلي – أستاذة التعليم الثانوي
بن عيسى بن عيسى - أستاذ التعليم الثانوي
وهراني وهراني - أستاذ التعليم الثانوي

الديوان الوطني للمطبوعات المدرسية 2008

الرياضيات وسيلة لتكوين الفكر و أداة لإكتساب المعرفة . فهي تساهم في نمو قدرات التلميذ الذهنية و تشارك في بناء شخصيته و تدعيم استقلاليته و تسهيل مواصلة تكوينه المستقبلي . و هي تسمح للتلميذ باكتساب أدوات مفهوماتية و إجرائية مناسبة تمكنه من القيام بدوره بثقة وفعالية في محيط اجتماعي متطلب أكثر فأكثر في عالم شمولي يتحول باستمرار . إن الرياضيات حاضرة أكثر من أي وقت مضى في المحيط الاجتماعي و الاقتصادي و الإعلامي و الثقافي للإنسان
و خاصة مع تطور الوسائل التكنولوجية للحساب السريع مثل الآلة الحاسبة و الحاسوب ، الأمر الذي يتطلب التحكم التدريجي في هذه الوسائل من طرف التلميذ ، ويبرر استحسان إدخال استعمال الآلة الحاسبة في السنة الأولى من التعليم القاعدي .

تساهم الرياضيات مع المواد الأخرى في تحقيق ملمح التلميذ عند نهاية المرحلة القاعدية ، فتدريسها يرمي الى تمكين التلميذ من اكتساب كفاءات قابلة للتحويل الى مختلف مجالات المعرفة . و ينتظر من تعلمها تحقيق غرضين اثنين ، أحدهما له طابع تكويني ثقافي ، و الآخر نفعي .
تستجيب المقاربة بالكفاءات لإرادة تطوير غايات المدرسة حتى تتكيف مع الواقع المعاصر في حقول الشغل و المواطنة و الحياة اليومية ، و هذا لا يعني أنها تستغني عن المعارف ، بل تعطيها دفعا جديدا ، لأنها تأخذ في الحسبان زيادة على المعارف نفسها ، القدرة على تجنيدها في وضعيات متنوعة .
و من هذا المنظور يكون المهم هو ربط المعارف بوضعيات تسمح بالتأثير ليس داخل المدرسة و حسب ، بل و خارجها . الأمر الذي يتطلب أن تكون مكتسبات التلميذ المتعلقة بهذه المعارف جاهزة و قابلة للتجنيد عند الحاجة و في الوقت المناسب ، خصوصا عندما يتعلق الأمر بحل مشاكل مركبة : بمعنى وضعيات تتطلب التحليل و التفسير و الاستباق و اتخاذ القرار و التعديل و أحيانا التفاوض .
إن نقطة البدء لنشاط رياضياتي ليست التعريف ، بل المشكل المطلوب حله . فبواسطة نشاط حل مشكل ما يبني التلميذ معارفه الشخصية ، و المشكل ينبغي أن يكون منطلق النشاط الفكري للتلميذ ، هذا النشاط لا يتمثل فقط في إيجاد إجابة عن كل سؤال محدد ، بل يتعداه الى صياغة أسئلة وجيهة تجاه وضعية إشكالية ، هذه الإشكالية تؤدي الى وضع تخمينات مقابل تخمينات الآخرين ، التي ينبغي تجريبها في حل المشاكل .
و حتى تجعل التلميذ يدرك معنى مفهوم رياضياتي و فائدته ، لا تنطلق من تمثيل للمعرفة المقصودة ، بل تنطلق من مشكل حقيقي (نسميه فيما بعد وضعية- مشكل) يستعمل التلميذ في حله إجراءات قاعدية متنوعة ، إلا أنها غير كافية . و هذا ما يسمح بإعطاء معنى لاستخدام هذا المفهوم ، و يصبح القسم هكذا مكانا لخطة قريبة من البحث و الحوار ، تتطلب الصبر و الجهد
فالنشاط الرياضياتي الذي يقوم به التلاميذ يسمح لهم بالانتقال من وضع " مستهلكين للمعرفة " الى وضع " منتجين للمعرفة " و تكون بذلك بعيدين عن البيداغوجية الإلقائية .
ينبغي اختيار المفاهيم التي يجب بناءها بهذه الكيفية في كل مستويات التعلم . و لأنه ليس ضروريا و لا ممكنا بناء كل المعارف هكذا ، علينا إذن أن نتساءل في كل مرحلة عن المعارف الرياضياتية القاعدية التي بإمكان التلاميذ اكتشافها بأنفسهم .
و بالنسبة الى التقويم ، نقول عن تلميذ أن له معارف في الرياضيات إذا كان قادرا على :
- استحضار معارفه و تجنيدها كأدوات لحل مشاكل سواء تضمن نص المشكل مؤشرات أم لا .
- التكيف عندما تكون ظروف العمل مختلفة تماما .
إن العمل على المفاهيم التي تتدخل كأدوات يتطلب استحضار المعارف العامة للتلميذ و يجرب دلالتها وانسجامها ، و هو الأمر الذي يعطي معنى لهذه المفاهيم .إن المقاربة بالكفاءات لا تحل مسألة الفروق الإجتماعية ، فهي يمكن أن تكون أيضا عائقا أمام التلاميذ الذين يواجهون صعوبات ، لأنها تتطلب الكثير .
- لا يمكن بناء كفاءات إذا كانت الموارد الضرورية (المفاهيم و القدرات) غير جاهزة .
- و حتى عند حضورها ، فان تجنيدها يمر بسيرورات ذهنية عالية المستوى ، من الصعب " تدريسها " للتلاميذ.
و هذا يتطلب الوقوف بانتظام عند الموارد الجاهزة عند كل تلميذ قصد تمييز المهام المقترحة و السماح لكل تلميذ بتدعيم مكتسباته تبعا لحاجياته الخاصة .
و في هذا الإطار حاولنا تضمين هذا الكتاب ما يمكن الأستاذ و التلميذ من تجسيد المقاربة المذكورة أعلاه.

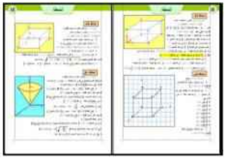
(بناء المعرفة ثم توظيفها ثم تجنيدها)

من خلال مختلف فصوله التي وضعت بالتسلسل التالي : أنشطة – دروس و طرائق – أعمال موجهة – مسائل محلولة – أعمال تطبيقية و أخيرا مجموعة من التمارين متنوعة متعددة الأهداف .
كما حرصنا و نحن نعد فصول هذا الكتاب على التعبير بوجه مفصل عن نيات البرنامج مما يسهل للأستاذ المهمة و يفصل له ما أجمل في المنهاج و الوثيقة المرفقة .
و لسنا في هذ المقام بصدد تقديم وصفة عمل تحدد دور الأستاذ. ذلك أن هذا الدور أكبر من أن يحصر في تدريس ما تضمنته فصول الكتاب بالنظر الى طبيعة مهمة الأستاذ التربوية . و لكننا نرسم خطوطا أساسية و شواهد ثابتة تكون نبراسا له في أداء رسالته أداء في مستوى الطموحات التي تهدف إليها المناهج .
و إذ لا يخلو كتاب من نقائص فإننا نرحب بانتقادات القراء و نقدم الشكر المسبق لهم .

تقديم الكتاب

أنشطة

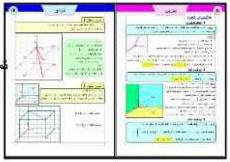
تمكن من التخمين لكفاءات مستهدفة كما تسمح للتلميذ من بناء معارفه بنفسه.



تسمح الأنشطة من مقاربة مفاهيم جديدة و هذا باستعمال مكتسبات قبلية.

الدرس

المفاهيم المقررة مفصلة و مدعمة ببراهين و أمثلة.

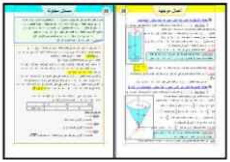


طرائق

تمارين محلولة مدعمة بطرائق للحل و بتعاليق مناسبة.

أعمال موجهة

تقترح مواضيع للدراسة توظف فيها مفاهيم الدرس بهدف التوصل إلى نتائج يمكن استثمارها في حل مشكلات.

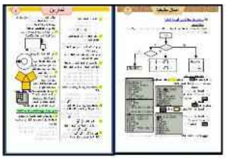


مسائل محلولة

عبارة عن مسائل إدماجية محلولة يوظف فيها الدرس توظيفا شاملا.

أعمال تطبيقية

تقترح أنشطة توظف فيها تكنولوجيات الإعلام و الاتصال.



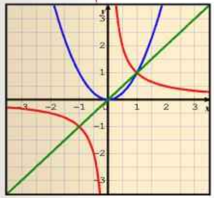
تمارين

اختيار من متعدد
أ صحيح أم خطأ
تمارين تطبيقية
تمارين و مسائل متنوعة.

الدوال العددية

1

الكفاءات المستهدفة



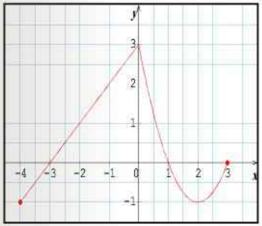
- تفكيك دالة باستعمال الدوال المرجعية
- دراسة اتجاه تغير دالة باستعمال الدوال المرجعية
- تمثيل بعض الدوال بيانيا باستعمال الدوال المرجعية

هو أبو الريحان محمد بن أحمد البيروني، ولد في خوارزم عام 973 م و توفي سنة 1050 م. لا يؤرخ مؤرخ لأبي الريحان إلا ويقر له بالعظمة في العلم، بل ويصل بعض مؤرخي العلوم من الغربيين إلى أنه من أعظم العلماء في كل العصور والأزمان. قد عاصر البيروني العديد من ملوك وسلاطين الهند وخوارزم من أمثال أبو العباس المأمون وقد كان للبيروني علاقات بمختلف علماء عصره، من أمثال ابن سينا والفلكي أبي سهل عيسى النصراني. لقد أتقن البيروني العديد من اللغات إلى جانب الخوارزمية – لغة بلده – والعربية، فقد أتقن الفارسية و السريانية و اليونانية مما ساعده على الاطلاع على أصول العلوم في لغاتها الأصلية.

وقد كتب أبو الريحان عددًا كبيرًا من المؤلفات في مختلف العلوم، ونقل في كتبه آراء علماء الشرق والغرب القدماء، وناقشها وأضاف إليها، فوضع المؤلفات في مناقشة المسائل العلمية المختلفة، مثل وصفه لصورة واضحة في تثليث الزوايا في حساب المثلثات والدائرة، وبحث بحثًا مستفيضًا في خطوط الطول والعرض، ودوران الأرض حول محورها، كما بحث في الفرق بين سرعة الضوء وسرعة الصوت، وأوضح الفرق الكبير بين سرعتيهما هذا بالإضافة إلى ما كتبه في تاريخ الهند.

البيروني 973 م – 1050 م

نشاط أول

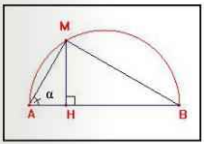


المنحني (C_f) المرسوم في الشكل المقابل هو التمثيل البياني لدالة f معرفة على $[-4\,,\,3]$.

1. بقراءة بيانية عين صور كل من -2، 0 و 3.
2. حل بيانيا المعادلات التالية:
أ) $f(x)=-1$، ب) $f(x)=0$، جـ) $f(x)=3$.
3. حل بيانيا المعادلتين التاليتين:
أ) $f(x)=-x+1$ ، ب) $f(x)=-x$.
4. حل بيانيا المتراجحتين التاليتين:
أ) $f(x)<0$ ، ب) $f(x)\geq -x+1$.
5. شكل جدول تغيرات الدالة f.
6. عين القيمتين الحديتين الصغرى و العظمى للدالة f على $[-4\,,\,3]$ محددا قيم المتغير x التي من أجلها تبلغ الدالة f هاتين القيمتين.

نشاط ثان

(C) نصف دائرة قطرها $[AB]$ حيث: $AB=1$. نرفق بكل نقطة M من (C)، مختلفة عن A، النقطة H مسقطها العمودي على (AB). (أنظر الشكل)



نضع: $\alpha=\widehat{BAM}$ ، $x=AH$ و $f(x)=AM$.

1. عبر عن $\cos\alpha$ بطريقتين مختلفتين.
2. استنتج عبارة $f(x)$ بدلالة x.
3. حدد مجموعة تعريف الدالة f.
4. حدد اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.
5. ارسم التمثيل البياني للدالة f في معلم متعامد $(O,\vec{i},\vec{j})$.

نشاط ثالث

لتكن h الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $h(x)=x^2+3x-4$.

1. باستعمال ورق ميليمتري أرسم في معلم $(O,\vec{i},\vec{j})$ المنحنيين الممثلين للدالتين f و g المعرفتين على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=x^2$ و $g(x)=-3x+4$.
2. استنتج في $\mathbb{R}$ حلول المعادلة ذات المجهول x التالية: $h(x)=0$.
3. تحقق من النتائج بالحساب.

نشاط رابع

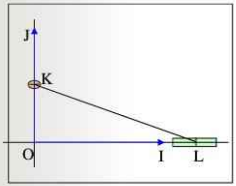
نعتبر الدالتين التآلفيتين f و g المعرفتين على المجال $[-2,3]$ كالآتي:

$f(x)=\frac{1}{2}x+1$ و $g(x)=-x+2$.

ليكن (D) و (D') تمثيلاهما البيانيين في معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1. ما هو اتجاه تغير كل من الدالتين f و g ؟ أرسم كلا من (D) و (D').
2. بقراءة بيانية عين فاصلة و ترتيب نقطة تقاطع المنحنيين (D) و (D'). تحقق من النتيجتين بالحساب.
3. نعتبر الدوال f_1، f_2، f_3 و f_4 المعرفة على المجال $[-2,3]$ كما يلي:
$f_1(x)=f(x)+g(x)$ ، $f_2(x)=f(x)\times g(x)$ ، $f_3(x)=-2f(x)$ و $f_4(x)=g(x)+1$.
   - عين بدلالة x عبارة كل من $f_1(x)$ ، $f_2(x)$ ، $f_3(x)$ و $f_4(x)$.
   - أرسم كلا من (D_3) و (D_4) التمثيلين البيانيين للدالتين f_3 و f_4 في المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$.
4. نعتبر الدالة h المعرفة كما يلي: $h(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$
عين D_h مجموعة تعريف الدالة h. تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x من D_h لدينا: $h(x)=-\frac{1}{2}-\frac{2}{x-2}$

نشاط خامس



في الشكل المقابل، المعلم $(O,\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ})$ متعامد ومتجانس (وحدة الطول هي: $1km$).

النقطة $K\left(0,\frac{1}{2}\right)$ تمثل صومعة تبعد عن النقطة O بنصف كيلومتر.

تتحرك عربة L على سكة حديدية ممثلة بمحور الفواصل.

لتكن f الدالة التي ترفق بالزمن t العدد x فاصلة النقطة L حيث: $x=f(t)=25t$ (في اللحظة $t=0$ تكون L في O).

1. أحسب بدلالة x المسافة KL.
2. نضع: $y=KL=g(x)$. تحقق أن: $y=\sqrt{0.25+x^2}$.
3. بما أن لدينا x بدلالة t و y بدلالة x ، يكون المرور من t إلى y بواسطة الدالة h المحصل عليها بإتباع المخطط التالي:

$$\begin{tikzcd} t \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "h"'] & x \arrow[r, "g"] & y \end{tikzcd}$$

بين أن: $h(t)=\frac{1}{2}\sqrt{1+2500t^2}$

نتيجة: نقول أن h هي مركب الدالة f متبوعة بالدالة g و نرمز إليها بالرمز $g\circ f$ ونكتب $h=g\circ f$ حيث: $h(t)=g(f(t))$

تذكير حول الدوال

1. الدالة و مجموعة التعريف

تعريف: D جزء من مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$.

إذا كانت D هي مجموعة تعريف الدالة f فإن f ترفق بكل عدد حقيقي x من D، عددا حقيقيا وحيدا نرمز له بالرمز $f(x)$. نقول أن $f(x)$ هي صورة x بالدالة f.

مجموعة تعريف دالة f هي مجموعة الأعداد الحقيقية x التي يكون من أجلها حساب $f(x)$ ممكنا.

2. التمثيل البياني لدالة

تعريف: f دالة و D مجموعة تعريفها.

التمثيل البياني (أو المنحنى الممثل) للدالة f في معلم $(O,\vec{i},\vec{j})$ للمستوي، هو مجموعة النقط $M(x,y)$ حيث: $x\in D$ و $y=f(x)$.

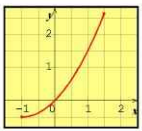
إذا رمزنا إلى منحنى الدالة f بالرمز (C) فإن $y=f(x)$ هي معادلة (C) في المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

3. اتجاه تغير دالة على مجال

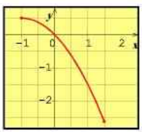
f دالة معرفة على مجال I من $\mathbb{R}$.

تعاريف

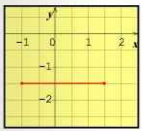
f متزايدة تماما على I يعني أنه من أجل كل عددين حقيقيين x_1 و x_2 من I، إذا كان $x_1<x_2$ فإن: $f(x_1)<f(x_2)$	f متناقصة تماما على I يعني أنه من أجل كل عددين حقيقيين x_1 و x_2 من I، إذا كان $x_1<x_2$ فإن: $f(x_1)>f(x_2)$	f ثابتة على I يعني أنه من أجل كل عددين حقيقيين x_1 و x_2 من I، $f(x_1)=f(x_2)$



f متزايدة تماما على $[-1;1.5]$



f متناقصة تماما على $[-1;1.5]$



f ثابتة على $[-1;1.5]$

ملاحظة: إذا كانت الدالة f إما متزايدة و إما متناقصة على مجال I نقول أنها رتيبة على هذا المجال.

تمرين محلول 1

نعتبر الدالة f المعرفة على بـ: $f(x)=x^2+6x+2$.

1. أوجد صور الأعداد 1، -2 و $\sqrt{3}$ بالدالة f .
2. أحسب سوابق العددين 2 و -7 بالدالة f .
3. بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x: $f(x)=(x+a)^2-7$ حيث a عدد حقيقي يطلب تعيينه. هل يقبل العدد (-8) سوابق بالدالة f ؟

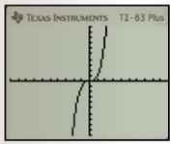
طريقة: لتعيين صورة عدد حقيقي α بدالة f معرفة بدستور نقوم بحساب $f(\alpha)$ أما لتعيين السوابق الممكنة لعدد حقيقي β نقوم بحل المعادلة ذات المجهول x : $f(x)=\beta$

حل:

1. $f(1)=9$ ، $f(-2)=-6$ و $f(\sqrt{3})=5+6\sqrt{3}$.
2. $f(x)=2$ يعني $x^2+6x=0$ أي $x(x+6)=0$ أي $x=0$ أو $x=-6$ إذن للعدد 2 سابقتان هما 0 و -6.
$f(x)=-7$ يعني $x^2+6x+9=0$ أي $(x+3)^2=0$ أي $x=-3$ إذن للعدد -7 سابقة وحيدة هي -3.
3. لدينا: $f(x)=(x^2+6x)+2$ ومنه $f(x)=(x+3)^2-9+2$ إذن $f(x)=(x+3)^2-7$. إذن $a=3$.
$f(x)=-8$ يعني $(x+3)^2-7=-8$ أي $(x+3)^2=-1$.المعادلة لا تقبل حلولا و منه ليس للعدد -8 سوابق.

تمرين محلول 2

1. استعمل آلة حاسبة بيانية لتمثيل الدالة " مكعب " f المعرفة على بـ: $f(x)=x^3$.
2. ما هو التخمين الذي يمكن الإدلاء به فيما يخص اتجاه تغير الدالة f ؟
3. تحقق أنه من أجل كل عددين حقيقيين x_1 و x_2 لدينا:
$f(x_1)-f(x_2)=(x_1-x_2)\left[\left(x_1+\frac{x_2}{2}\right)^2+\frac{3x_2^2}{4}\right]$. استنتج اتجاه تغير الدالة f .



حل:

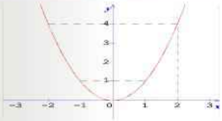
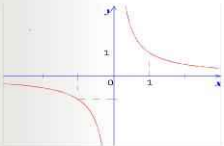
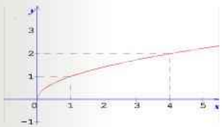
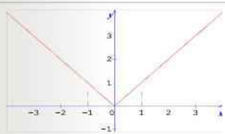
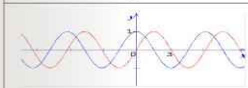
1. بعد حجز عبارة $f(x)$ تظهر شاشة الآلة الحاسبة الرسم البياني للدالة f :
2. الدالة f متزايدة تماما على .
3. لدينا: $(x_1-x_2)\left[\left(x_1+\frac{x_2}{2}\right)^2+\frac{3x_2^2}{4}\right]=(x_1-x_2)(x_1^2+x_1x_2+x_2^2)$
$=x_1^3-x_2^3$

إذا كان $x_1<x_2$ فإن $f(x_1)<f(x_2)$ لأن $\left(x_1+\frac{x_2}{2}\right)^2+\frac{3x_2^2}{4}>0$ ومنه f متزايدة تماما على .

نتيجة: الدالة " مكعب ": $x\to x^3$ متزايدة تماما على .

الدوال المرجعية

نلخص في الجدول الموالي تذكيرا ببعض الدوال المرجعية التي درست في السنة الأولى ثانوي

الدالة	اتجاه التغير	التمثيل البياني
$f:x\mapsto x^2$	• f متناقصة تماما على $]-\infty,0]$ إذا كان $a<b\leq 0$ فإن $a^2>b^2$ • f متزايدة تماما على $[0,+\infty[$ إذا كان $0\leq a<b$ فإن $a^2<b^2$	
$f:x\mapsto \frac{1}{x}$	• f متناقصة تماما على $]-\infty,0[$ إذا كان $a<b<0$ فإن $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$ • f متناقصة تماما على $]0,+\infty[$ إذا كان $0<a<b$ فإن $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$	
$f:x\mapsto \sqrt{x}$	• f متزايدة تماما على $[0,+\infty[$ إذا كان $0\leq a<b$ فإن $\sqrt{a}<\sqrt{b}$	
$f:x\mapsto \lvert x\rvert$	• f متناقصة تماما على $]-\infty,0]$ إذا كان $a<b\leq 0$ فإن $\lvert a\rvert>\lvert b\rvert$ • f متزايدة تماما على $[0,+\infty[$ إذا كان $0\leq a<b$ فإن $\lvert a\rvert<\lvert b\rvert$	
$f:x\to\sin x$ $g:x\to\cos x$	الدالتان $f:x\to\sin x$ و $g:x\to\cos x$ دوريتان دورهما 2π	

تمرين محلول 3

لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=-x^2-4x+1$

1. تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x لدينا: $f(x)=-(x+2)^2+5$
2. أدرس اتجاه تغير الدالة f على كل من المجالين $[-2;+\infty[$ و $]-\infty;-2]$

حل:

1. ننطلق من الشكل المعطى ثم نقوم بالنشر: من أجل كل عدد حقيقي x لدينا:

$$-(x+2)^2+5=-(x^2+4x+4)+5=-x^2-4x-4+5=-x^2-4x+1=f(x)$$

2. لنعين اتجاه تغير الدالة f على المجال $[-2;+\infty[$

ليكن a و b عددين حقيقيين حيث: $-2\le a<b$ و منه $0\le a+2<b+2$ (بإضافة العدد 2)

و بما أن الدالة " **مربع** " متزايدة تماما على $[0;+\infty[$ فإن $(a+2)^2<(b+2)^2$ ومنه $-(a+2)^2>-(b+2)^2$

إذن $-(a+2)^2+5>-(b+2)^2+5$. نجد هكذا إذن $f(a)>f(b)$.

نستنتج أن الدالة f متناقصة تماما على المجال $[-2;+\infty[$.

بنفس الكيفية نثبت أن الدالة f متزايدة تماما على المجال $]-\infty;-2]$.

تمرين محلول 4

نعتبر الدالة f المعرفة على $]-\infty;2[\cup]2;+\infty[$ بـ: $f(x)=\frac{3x-5}{x-2}$

1. تحقق أنه من أجل كل x من $]-\infty;2[\cup]2;+\infty[$ لدينا: $f(x)=\frac{1}{x-2}+3$
2. أدرس اتجاه تغير الدالة f على كل من المجالين $]2;+\infty[$ و $]-\infty;2[$.

حل: 1. ننطلق من الشكل المعطى ثم نقوم بتوحيد المقامات: من أجل كل x من $]-\infty;2[\cup]2;+\infty[$ لدينا:

$$\frac{1}{x-2}+3=\frac{1+3(x-2)}{x-2}=\frac{1+3x-6}{x-2}=\frac{3x-5}{x-2}=f(x).$$

2. لنعين اتجاه تغير الدالة f على المجال $]2;+\infty[$

ليكن a و b عددين من المجال $]2;+\infty[$ حيث: $2<a<b$ و منه $0<a-2<b-2$ (بطرح العدد 2)

و بما أن الدالة " **مقلوب** " متناقصة تماما على $]0;+\infty[$ فإن $\frac{1}{a-2}>\frac{1}{b-2}$ ومنه $\frac{1}{a-2}+3>\frac{1}{b-2}+3$.

نجد إذن $f(a)>f(b)$

نستنتج أن الدالة f متناقصة تماما على المجال $]2;+\infty[$.

بنفس الكيفية نثبت أن الدالة f متناقصة تماما على المجال $]-\infty;2[$.

عمليات على الدوال

1. تساوي دالتين

تعريف: القول عن دالتين f و g أنهما متساويتان يعني أن لهما نفس مجموعة التعريف D و أن من أجل كل عدد حقيقي x من D لدينا: $f(x)=g(x)$ و نكتب: $f=g$

2. العمليات الجبرية

f و g دالتان معرفتان على D_f و D_g على الترتيب. λ و k عددان حقيقيان.

العملية	الرمز	التعريف	مجموعة التعريف
مجموع f و k	$f+k$	$(f+k)(x)=f(x)+k$	D_f
مجموع f و g	$f+g$	$(f+g)(x)=f(x)+g(x)$	$D_f\cap D_g$
جداء f بالعدد λ	λf	$(\lambda f)(x)=\lambda f(x)$	D_f
جداء f و g	$f\times g$	$(f\times g)(x)=f(x)\times g(x)$	$D_f\cap D_g$
حاصل قسمة f على g	$\frac{f}{g}$	$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$	$\{x\in D_f\cap D_g : g(x)\neq 0\}$

مثال: f و g دالتان معرفتان على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=x^2$ و $g(x)=x+2$

- الدوال $f+3$ ، $f+g$ ، $-2f$ ، $f\times g$ هي الدوال المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$(f+3)(x)=x^2+3$ ، $(f+g)(x)=x^2+x+2$ ، $(-2f)(x)=-2x^2$ و $(f\times g)(x)=x^2(x+2)$

- الدالة $\frac{f}{g}$ هي الدالة المعرفة على $]-\infty,-2[\cup]-2,+\infty[$ بـ: $\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{x^2}{x+2}$.

3. تركيب الدوال

تعريف: f و g دالتان معرفتان على D_f و D_g على الترتيب.

مركب الدالة f متبوعة بدالة g هي الدالة التي نرمز إليها بالرمز $g\circ f$ و المعرفة على: $D_{g\circ f}=\{x / f(x)\in D_g$ و $x\in D_f\}$ بـ $(g\circ f)(x)=g[f(x)]$

مثال: لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=-x+3$ و لتكن g الدالة الجذر التربيعي $(x\mapsto\sqrt{x})$

يكون $-x+3\ge0$ من أجل $x\le3$ ومنه مجموعة تعريف الدالة $g\circ f$ هي: $D=]-\infty,3]$ و لدينا:

$$(g\circ f)(x)=\sqrt{-x+3}$$

تمرين محلول 5

f و g دالتان معرفتان على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=x+2$ و $g(x)=x^2+2x$

1. عرف الدوال $f+g$، $-f+2g$، $f\times g$ و $\frac{f}{g}$
2. نعتبر الدالة h المعرفة على $]2;+\infty[$ بـ: $h(x)=\frac{x^2-4}{x-2}$. هل الدالتان f و h متساويتان ؟

حل:

1. من أجل كل عدد حقيقي x: $(f+g)(x)=x^2+3x+2$، $(-f+2g)(x)=2x^2+3x-2$
و $(f\times g)(x)=x^3+4x^2+4x$

من أجل $x\neq 0$ و $x\neq -2$: $\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{x+2}{x^2+2x}=\frac{1}{x}$ ($x^2+2x=0$ من أجل $x=0$ أو $x=-2$)

2. الدالتان f و h متمايزتان لأن ليس لهما نفس مجموعة التعريف.

تمرين محلول 6

نعتبر الدالتين f و g المعرفتين على $[0;+\infty[$ و $[1;+\infty[$ على الترتيب بـ: $f(x)=2x^2+1$ و $g(x)=\sqrt{x-1}$

1. أكتب كلا من f و g على شكل مركب دالتين مرجعيتين يطلب تحديدهما.
2. عرف الدالتين $f\circ g$ و $g\circ f$

حل:

1. لدينا: $\underbrace{x\xrightarrow{u_1}x^2\xrightarrow{v_1}2x^2+1}_{f}$ ، $\underbrace{x\xrightarrow{u_2}x-1\xrightarrow{v_2}\sqrt{x-1}}_{g}$

ومنه $f=v_1\circ u_1$ حيث: $u_1:x\to x^2$ و $v_1:x\to 2x+1$

و $g=v_2\circ u_2$ حيث: $u_2:x\to x-1$ و $v_2:x\to\sqrt{x}$

نلاحظ فعلا أن الدوال u_1، v_1، u_2 و v_2 دوال مرجعية.

2. تعريف الدالتين $f\circ g$ و $g\circ f$

لدينا من أجل كل x من $[1;+\infty[$: $g(x)\geq 0$ أي $g(x)\in[0;+\infty[$ ومنه الدالة $f\circ g$ معرفة على $[1;+\infty[$

و لدينا من أجل كل x من $[0;+\infty[$: $f(x)\geq 1$ أي $f(x)\in[1;+\infty[$ ومنه الدالة $g\circ f$ معرفة على $[0;+\infty[$

من أجل كل x من $[1;+\infty[$ لدينا:

$$\begin{aligned} f\circ g(x)&=f\left[(g(x))\right]\\ &=f\left(\sqrt{x-1}\right)\\ &=2\left(\sqrt{x-1}\right)^2+1\\ &=2(x-1)+1\\ &=2x-1\end{aligned}$$

من أجل كل x من $[0;+\infty[$ لدينا:

$$\begin{aligned} g\circ f(x)&=g\left[f(x)\right]\\ &=g\left(2x^2+1\right)\\ &=\sqrt{\left(2x^2+1\right)-1}\\ &=\sqrt{2x^2}\\ &=\sqrt{2}\,x\end{aligned}$$

اتجاه التغير

1. اتجاه تغير الدالة: $f+k$

مبرهنة: f دالة رتيبة تماما على مجال I و k عدد حقيقي.
للدالتين f و $f+k$ نفس اتجاه التغير على المجال I.

برهان: ليكن a و b عددين من المجال I حيث: $a<b$.
إذا كانت f متزايدة تماما على المجال I فإن $f(a)<f(b)$. بإضافة k إلى طرفي المتباينة نحصل على: $f(a)+k<f(b)+k$ أي: $(f+k)(a)<(f+k)(b)$. إذن الدالة $f+k$ متزايدة تماما على المجال I.

ملاحظة: نتبع برهانا مماثلا إذا كانت f متناقصة تماما على المجال I.

2. اتجاه تغير الدالة: λf

مبرهنة: f دالة رتيبة تماما على مجال I و λ عدد حقيقي غير معدوم.
- إذا كان $\lambda>0$ يكون للدالتين f و λf نفس اتجاه التغير على المجال I.
- إذا كان $\lambda<0$ يكون اتجاها تغير الدالتين f و λf متعاكسين على المجال I.

برهان: ليكن a و b عددين من المجال I حيث: $a<b$.
إذا كانت f متزايدة تماما على المجال I و كان $\lambda>0$ فإن: $f(a)<f(b)$ و $\lambda f(a)<\lambda f(b)$ أي أن: $(\lambda f)(a)<(\lambda f)(b)$ إذن الدالة λf متزايدة تماما على المجال I.

ملاحظة: نتبع برهانا مماثلا في الحالات الثلاثة الأخرى.

3. اتجاه تغير الدالة: $g\circ f$

مبرهنة: f دالة رتيبة تماما على مجال I و g دالة رتيبة تماما على مجال J حيث: $f(I)\subset J$
- إذا كان للدالتين f و g نفس اتجاه التغير تكون الدالة $g\circ f$ متزايدة تماما على I.
- إذا كان اتجاها تغير الدالتين f و g متعاكسين تكون الدالة $g\circ f$ متناقصة تماما على I.

برهان: ليكن a و b عددين من المجال I حيث: $a<b$.
إذا كانت f متزايدة تماما على I و كانت g متزايدة تماما على J فإن: $f(a)<f(b)$ و $g\left[f(a)\right]<g\left[f(b)\right]$
($f(a)$ و $f(b)$ عنصران من J) ومنه $(g\circ f)(a)<(g\circ f)(b)$. إذن الدالة $g\circ f$ متزايدة تماما على المجال I.

ملاحظة: نتبع برهانا مماثلا في الحالات الثلاثة الأخرى.

تمرين محلول 7

أدرس اتجاه تغير كل من الدالتين الآتيتين:

1) f هي الدالة المعرفة على $]-\infty;0[$ بـ: $f(x)=-\frac{3}{x}+2$

2) g هي الدالة المعرفة على $[1.5;+\infty[$ بـ: $g(x)=(-2x+3)^2$

طريقة: عند دراسة اتجاه تغير دالة f يمكن أن نحاول كتابة f على الشكل $u+k$ ، λu أو $v\circ u$ حيث: u و v دالتان مرجعيتان.

حل:

1. إذا اعتبرنا الدالة h المعرفة على $]-\infty;0[$ بـ: $h(x)=\frac{1}{x}$ يكون لدينا: $f=-3h+2$.

للدالتين f و $-3h$ نفس اتجاه التغير ومنه فاتجاها تغير الدالتين f و h متعاكسين.

بما أن h متناقصة تماما على $]-\infty;0[$ فإن f متزايدة تماما على $]-\infty;0[$.

2. إذا اعتبرنا الدالتين u و v المعرفتين على $[1.5;+\infty[$ و $]-\infty;0]$ على الترتيب بـ:

$u(x)=-2x+3$ و $v(x)=x^2$ و علما أنه من أجل كل x من $[1.5;+\infty[$ ، $u(x)\leq 0$ يكون لدينا: $g=v\circ u$.

بما أن الدالة u متناقصة تماما على $[1.5;+\infty[$ و الدالة v متناقصة تماما على $]-\infty;0]$ فإن الدالة g متزايدة تماما على المجال $[1.5;+\infty[$.

تمرين محلول 8

f و g دالتان معرفتان على $\mathbb{R}$.

1) **أدرس اتجاه تغير الدالة $(f+g)$ في الحالتين التاليتين:**

أ) $f(x)=3x+1$ و $g(x)=-2x+3$ ب) $f(x)=2x+1$ و $g(x)=-3x+5$

2) **أدرس اتجاه تغير الدالة $(f\times g)$ علما أن:** $f(x)=x-\sqrt{2}$ و $g(x)=x+\sqrt{2}$

حل:

1. أ) لدينا: $(f+g)(x)=-2x+3+3x+1=x+4$ ومنه الدالة $(f+g)$ متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

ب) لدينا: $(f+g)(x)=2x+1-3x+5=-x+6$ ومنه الدالة $(f+g)$ متناقصة تماما على $\mathbb{R}$.

2. لدينا: $(f\times g)(x)=(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})=x^2-2$. للدالتين $(f\times g)$ و الدالة " مربع " نفس اتجاه التغير و منه فالدالة $(f\times g)$ متناقصة تماما على $]-\infty;0]$ و متزايدة تماما على $[0;+\infty[$

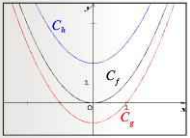
تعليق: لا يمكن إعطاء قواعد عامة تمكن من استنتاج اتجاه تغير الدالتين $(f+g)$ و $(f\times g)$ في كل الحالات إلا أن ذلك يكون ممكنا إذا أضيفت شروط على الدالتين f و g.

التمثيل البياني

1. التمثيل البياني للدالة: $f+k$

مبرهنة: إذا كان (C_f) و (C_{f+k}) التمثيلين البيانيين في معلم $(O;\vec{i};\vec{j})$ للدالتين f و $(f+k)$ على الترتيب حيث k عدد حقيقي فإن (C_{f+k}) هو صورة (C_f) بالانسحاب الذي شعاعه $k\vec{j}$.

برهان: نعتبر النقطتين $M(x,f(x))$ من (C_f) و $M'(x,(f+k)(x))$ من (C_{f+k}). بما أن: $(f+k)(x)=f(x)+k$ فإن الشعاع $\overrightarrow{MM'}$ مركبتاه $(0,k)$ و $\overrightarrow{MM'}=k\vec{j}$. إذن M' هي صورة M بالانسحاب الذي شعاعه $k\vec{j}$. و منه المنحنى (C_{f+k}) هو صورة المنحنى (C_f) بالانسحاب الذي شعاعه $k\vec{j}$.



مثال: نعتبر الدوال f ، g و h المعرفة على $\mathbb{R}$ كالآتي:

$f(x)=x^2$ ، $g(x)=x^2-1$ و $h(x)=x^2+2$

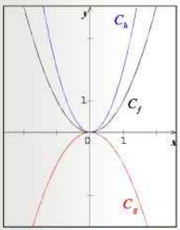
لدينا $g=f-1$ ومنه (C_g) هو صورة (C_f) بالانسحاب الذي شعاعه $-\vec{j}$.

لدينا $h=f+2$ ومنه (C_h) هو صورة (C_f) بالانسحاب الذي شعاعه $2\vec{j}$.

2. التمثيل البياني للدالة: λf

مبرهنة: ليكن (C_f) و $(C_{\lambda f})$ التمثيلين البيانيين في معلم $(O;\vec{i};\vec{j})$ للدالتين f و (λf) على الترتيب حيث λ عدد حقيقي غير معدوم. و لتكن M نقطة من (C_f) فاصلتها x.

نحصل على نقطة من $(C_{\lambda f})$ ذات الفاصلة x بضرب ترتيب النقطة M في العدد λ.



برهان: إذا كانت $M(x,f(x))$ نقطة من (C_f) فإن $M'(x,\lambda f(x))$ نقطة من $(C_{\lambda f})$ لأن $(\lambda f)(x)=\lambda.f(x)$.

مثال: نعتبر الدوال f ، g و h المعرفة على $\mathbb{R}$ كالآتي:

$f(x)=x^2$ ، $g(x)=-x^2$ و $h(x)=2x^2$

و لتكن (C_f) ، (C_g) و (C_h) تمثيلاتها البيانية في معلم $(O;\vec{i};\vec{j})$.

لدينا $g=-f$ و $h=2f$

ملاحظة: إذا كان $\lambda=-1$ يكون المنحنيان (C_f) و (C_{-f}) ، المرسومان في معلم متعامد، متناظرين بالنسبة لمحور الفواصل.

تمرين محلول 9

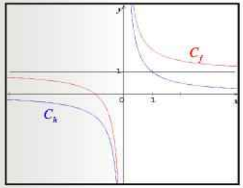
لتكن f الدالة المعرفة على $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$ بـ: $f(x)=\frac{x+1}{x}$

1. تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي غير معدوم x لدينا: $f(x)=\frac{1}{x}+1$
2. أرسم في معلم ، التمثيل البياني للدالة f انطلاقا من التمثيل البياني للدالة " مقلوب ".

حل:

1. من أجل $x\neq 0$ لدينا: $f(x)=\frac{x}{x}+\frac{1}{x}=1+\frac{1}{x}$
2. إذا اعتبرنا الدالة h المعرفة على $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$ بـ: $h(x)=\frac{1}{x}$ يكون لدينا: $f=h+1$

إذن، في معلم $(O;\vec{i};\vec{j})$، المنحنى الممثل للدالة f هو صورة القطع الزائد الممثل للدالة h بالانسحاب الذي شعاعه $\vec{j}$



تمرين محلول 10

نعتبر الدالتين f و g المعرفتين على ℝ بـ: $f(x)=x^2-4$ و $g(x)=|f(x)|$. نسمي (C_f) و (C_g) تمثيلاهما البيانيان على الترتيب في معلم $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1. ارسم المنحنى (C_f) انطلاقا من (C_h) التمثيل البياني للدالة $h:x\mapsto x^2$ (h هي الدالة " مربع ")
2. بين كيف يمكن استنتاج (C_g) انطلاقا من (C_f) ثم ارسمه.

حل:

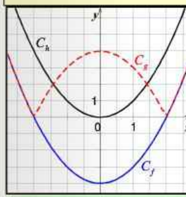
1. (C_f) هو صورة (C_h) بالانسحاب الذي شعاعه $-4\vec{j}$ (التمرين1)
2. إذا كان $f(x)\geq 0$ فإن $g(x)=f(x)$

و إذا كان $f(x)\leq 0$ فإن $g(x)=-f(x)$

إذن بالنسبة للأعداد x التي تحقق $f(x)\geq 0$ يكون (C_g) منطبقا على (C_f)

و بالنسبة للأعداد x التي تحقق $f(x)\leq 0$ يكون (C_g) منطبقا على (C_{-f})

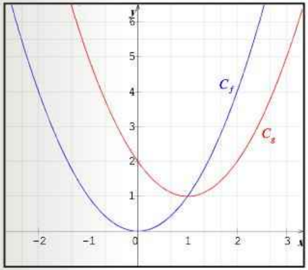
و نعلم أن (C_{-f}) هي نظيرة (C_f) بالنسبة لمحور الفواصل.



طريقة: لرسم التمثيل البياني للدالة $|f|$ نحتفظ بجزء (C_f) الواقع فوق محور الفواصل، و نرسم النظير بالنسبة إلى محور الفواصل لجزء (C_f) الواقع تحت محور الفواصل .

التمثيل البياني للدالة: $x\mapsto f(x+b)+k$

1. مثال باستعمال راسم منحنيات



باستعمال راسم منحنيات تحصلنا في الشكل المقابل على (C_f) و (C_g) التمثيلين البيانيين للدالتين f و g المعرفتين على ℝ كما يلي:

$f(x)=x^2$ و $g(x)=(x-1)^2+1$

لتكن M نقطة من (C_f) فاصلتها x

لتكن M' نقطة من (C_g) فاصلتها $x+1$.

أثبت أن $\overrightarrow{MM'}$ شعاع ثابت

2. الحالة العامة

لتكن f و g دالتين معرفتين على D حيث: من أجل كل x من D لدينا: $g(x)=f(x+b)+k$ حيث b و k عددان حقيقيان معلومان.نرمز بـ: (C_f) و (C_g) إلى تمثيليهما البيانيين على الترتيب في معلم $(O,\vec{i},\vec{j})$. نعتبر النقطتين $M(x,f(x))$ من (C_f) و $M'(x-b,g(x-b))$ من (C_g)

أ) بين أن: $\overrightarrow{MM'}=-b\vec{i}+k\vec{j}$ ثم استنتج التحويل النقطي الذي يحول النقطة M إلى النقطة M'.

ب) حدد طريقة لرسم المنحنى (C_g) انطلاقا من المنحنى (C_f).

3. حالة خاصة ($k=0$)

إذا كانت f و g دالتين معرفتين على D حيث: من أجل كل x من D لدينا: $g(x)=f(x+b)$ حيث b عدد حقيقي معلوم و إذا كان (C_f) و (C_g) تمثيليهما البيانيين على الترتيب في معلم للمستوي، بين كيف يتم استنتاج المنحنى (C_g) انطلاقا من المنحنى (C_f).

4. تطبيق

نعتبر الدالتين g و h المعرفتين على المجال $[-1;+\infty[$ بـ:

$g(x)=\sqrt{x+1}$ و $h(x)=\sqrt{x+1}+2$

و ليكن (C_g) و (C_h) تمثيليهما البيانيين على الترتيب في معلم للمستوي.

ا) انطلاقا من التمثيل البياني (C_f) للدالة " **الجذر التربيعي** " $f:x\to\sqrt{x}$ ارسم المنحنى (C_g).

ب) حدد طريقتين لرسم المنحنى (C_h) ثم ارسمه.

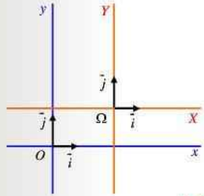
أعمال موجهة

تغيير المعلم

1. **دساتير تغيير المعلم**

$(O;\vec i,\vec j)$ معلم للمستوي و Ω نقطة من المستوي حيث (x_0, y_0) هي احداثياها بالنسبة إلى المعلم $(O;\vec i,\vec j)$. و ليكن $(\Omega;\vec i,\vec j)$ معلم جديد للمستوي.

إذا كانت M نقطة من المستوي حيث (x, y) هي احداثياها بالنسبة إلى المعلم $(O;\vec i,\vec j)$ و حيث (X,Y) هي احداثياها بالنسبة إلى المعلم $(\Omega;\vec i,\vec j)$ بين أن:



$\begin{cases} x = X + x_0 \\ y = Y + y_0 \end{cases}$ دساتير تغيير المعلم

2. **دراسة مثال أول**

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=x^2+4x+3$ وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المعلم $(O;\vec i,\vec j)$

ولتكن Ω النقطة ذات الإحداثيات $(-2,-1)$ بالنسبة إلى المعلم $(O;\vec i,\vec j)$

- ❖ بعد تعيين دساتير تغيير المعلم بين أن معادلة (C_f) بالنسبة إلى المعلم $(\Omega;\vec i,\vec j)$ هي: $Y=X^2$ ثم ارسمه.
- ❖ إذا كان المعلم $(O;\vec i,\vec j)$ متعامدا عين معادلة محور تناظر المنحنى (C_f)

3. **دراسة مثال ثاني**

نعتبر الدالة f المعرفة على $]-\infty,-1[\cup]-1,+\infty[$ بـ: $f(x)=\frac{x+2}{x+1}$ وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المعلم $(O;\vec i,\vec j)$

ولتكن Ω النقطة ذات الإحداثيات $(-1,1)$ بالنسبة إلى المعلم $(O;\vec i,\vec j)$

- ❖ بعد تعيين دساتير تغيير المعلم بين أن معادلة (C_f) بالنسبة إلى المعلم $(\Omega;\vec i,\vec j)$ هي: $Y=\frac{1}{X}$ ثم ارسمه.
- ❖ عين مركز تناظر المنحنى (C_f)

4. **الحالة العامة**

☒ حدد مختلف المراحل المتبعة لإثبات أن المستقيم ذو المعادلة $x=a$ محور تناظر لمنحنى (C_f) في معلم متعامد $(O;\vec i,\vec j)$.

☒ حدد مختلف المراحل المتبعة لإثبات أن نقطة $\Omega(a,b)$ مركز تناظر لمنحنى (C_f) في معلم $(O;\vec i,\vec j)$.

5. **تطبيق**

بين أن النقطة $\Omega(2,3)$ مركز تناظر للمنحنى (C_f) الممثل في معلم $(O;\vec i,\vec j)$ للدالة f المعرفة على $]-\infty,2[\cup]2,+\infty[$ بـ: $f(x)=\frac{3x}{x-2}$

مسائل محلولة

لتكن f الدالة المعرفة على أكبر مجموعة ممكنة D جزء من $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=\sqrt{\frac{x+2}{x+1}}$

1. بين أن: $D=]-\infty;-2]\cup]-1;+\infty[$
2. بين أن: $f=g\circ h$ حيث g هي الدالة " الجذر التربيعي " و h دالة يطلب تحديدها.
3. تحقق أن من أجل كل x من D لدينا: $h(x)=1+\frac{1}{x+1}$. استنتج اتجاه تغير h على $]-\infty;-2]$ وعلى $]-1;+\infty[$
4. عين اتجاه تغير الدالة f على $]-\infty;-2]$ و على $]-1;+\infty[$
5. باستعمال الحاسبة البيانية مثل بيانيا الدالة f ثم تحقق من صحة الجواب على السؤال 4.

1. **التحقق من أن** $D=]-\infty;-2]\cup]-1;+\infty[$

تكون الدالة f معرفة من أجل قيم x التي تحقق: $\frac{x+2}{x+1}\geq 0$ و $x+1\neq 0$. لندرس حسب قيم x إشارة $\frac{x+2}{x+1}$

x	$-\infty$		-2		-1		$+\infty$
$x+2$		-	0	+		+	
$x+1$		-		-	0	+	
$\frac{x+2}{x+1}$		+	0	-	‖	+	

نستنتج من الجدول هكذا أن: $D=]-\infty;-2]\cup]-1;+\infty[$

2. **تعيين الدالة** h

بإتباع المخطط التالي: $x\mapsto\frac{x+2}{x+1}\mapsto\sqrt{\frac{x+2}{x+1}}$ و علما أن: $g:x\mapsto\sqrt{x}$ فإن: $h:x\mapsto\frac{x+2}{x+1}$

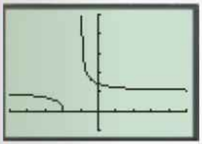
و لدينا فعلا: $f=g\circ h$

3. **تغيرات الدالة** h: لدينا من أجل كل x من D: $h(x)=\frac{x+2}{x+1}=\frac{(x+1)+1}{x+1}=1+\frac{1}{x+1}$

من $h(x)=1+\frac{1}{x+1}$ نستنتج أن اتجاه تغير h هو نفسه اتجاه تغير الدالة: $x\mapsto\frac{1}{x+1}$

نلاحظ كذلك أن الدالة: $x\mapsto\frac{1}{x+1}$ هي مركب الدالة: $x\mapsto x+1$ متبوعة بالدالة: $x\mapsto\frac{1}{x}$

بما أن اتجاهي الدالتين $x\mapsto x+1$ و $x\mapsto\frac{1}{x}$ متعاكسان فإن الدالة $x\mapsto\frac{1}{x+1}$ متناقصة على $]-\infty;-2]$ وعلى $]-1;+\infty[$



4. **تعيين اتجاه تغير الدالة** f

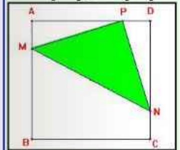
بما أن الدالة g متزايدة و الدالة h متناقصة فإن الدالة f متناقصة على $]-1;+\infty[$ وعلى $]-\infty;-2]$

5. **التمثيل البياني للدالة f و التحقق من صحة النتائج**

القراءة البيانية لمنحنى الدالة f تؤكد فعلا صحة نتائج السؤال الرابع.

مسائل محلولة

$ABCD$ مربع طول ضلعه $2cm$. نعتبر النقط M ، N و P حيث: $M\in[AB]$ ، $N\in[CD]$ و $P\in[AD]$.



نفرض أن النقطة M تتحرك على $[AB]$ مع: $AM=CN=DP$.

نضع $AM=x$ و نرمز بـ $f(x)$ إلى مساحة المثلث MNP.

1. عين D مجموعة تعريف f ثم تحقق أن: $f(x)=(x-1)^2+1$
2. أدرس على $[0;2]$ تغيرات الدالة: $x\mapsto(x-1)^2$ ثم استنتج تغيرات الدالة f على $[0;2]$. شكل جدول تغيرات f ثم عين وضعية M التي تكون من أجلها مساحة المثلث MNP أصغر ما يمكن.
3. اشرح كيف يتم رسم (C_f) التمثيل البياني لـ f انطلاقا من القطع المكافئ: $y=x^2$ ثم ارسمه.

1. **تعيين D و حساب $f(x)$** : بما أن M تتحرك على $[AB]$ و $AB=2$ فإن: $D=[0;2]$

المثلث MNP متساوي الساقين و قائم في P ومنه: $f(x)=\frac{1}{2}MP^2=\frac{1}{2}\left[x^2+(2-x)^2\right]=x^2-2x+2$

لدينا: $(x-1)^2+1=x^2-2x+1+1=x^2-2x+2$ ومنه: $f(x)=(x-1)^2+1$

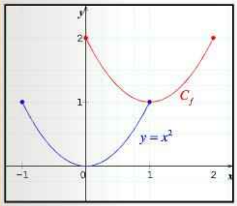
2. **تغيرات الدالة f**

الدالة: $x\mapsto(x-1)^2$ متناقصة على $[0;1]$ و متزايدة على $[1;2]$ و بما أن للدالة: $x\mapsto(x-1)^2+1$ نفس اتجاه تغير $x\mapsto(x-1)^2$ فإن الدالة f متناقصة على $[0;1]$ و متزايدة على $[1;2]$.

x	0	1	2
$f(x)$	2 ↘	1	↗ 2

نلاحظ أن الدالة f تقبل قيمة حدية صغرى عند القيمة 1 لـ x
إذن وضعية النقطة M التي تكون من أجلها مساحة المثلث MNP أصغر ما يمكن هي منتصف القطعة $[AB]$

3. **رسم المنحني (C_f)**



المنحني (C_f) هو صورة القطع المكافئ ذو المعادلة $y=x^2$ بواسطة الانسحاب الذي شعاعه $\vec{u}(1;1)$

نقوم برسم القطع المكافئ ذو المعادلة $y=x^2$ في المجال $[-1;1]$ ثم نستنتج المنحني (C_f)

المنحني (C_f) قطع مكافئ ذروته هي صورة النقطة O ذروة القطع المكافئ ذو المعادلة $y=x^2$ بواسطة الانسحاب الذي شعاعه $\vec{u}(1;1)$. و منه ذروة (C_f) هي النقطة $(1;1)$.

أعمال تطبيقية

التمثيل البياني للدالة kf

5. دراسة مثال

نعتبر الدالة " مربع " f المعرفة بـ: $f(x)=x^2$ و لتكن g الدالة المعرفة بـ: $g=kf$ حيث k عدد حقيقي.

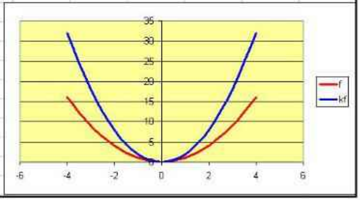
نرمز بـ (C_f) إلى منحنى الدالة f و بـ (C_{kf}) إلى منحنى الدالة $g=kf$.

حضر ورقة حساب مماثلة للورقة الموالية:

التمثيل البياني للدالة kf

k= 2

x	f(x)	kf(x)
-4	16	32
-3	9	18
-2	4	8
-1	1	2
0	0	0
1	1	2
2	4	8
3	9	18
4	16	32



ملاحظات:

- حتى تتغير كل المعطيات و المنحنيات بتغير قيمة k يتم الحجز في الخلية $C5$ كما يلي: $=2F4*B5$ علما أنه يتم حجز $F4$ انطلاقا من لوحة المفاتيح.
- يمكنك تغيير قيم المتغير x و اختيار الخطوة التي تريد.

الأسئلة:

1. قم بتغيير قيم k في الخلية $B2$. ماذا تلاحظ ؟
2. ماذا يمكن القول عن (C_f) و (C_{kf}) لما $k=-1$ ؟ ماذا يحدث لما $k=0$ ؟
3. قارن بين اتجاهي تغيرات f و kf لما $k>0$ ثم لما $k<0$.

6. **دراسة أمثلة أخرى** غير الدالة f بأخذ دوال مرجعية أخرى مع تغيير المعطيات وفق طبيعة كل دالة. هل تبقى الملاحظات السابقة نفسها أم تتغير ؟

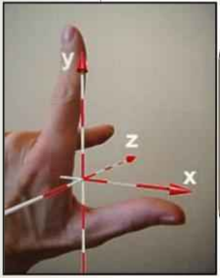
ملاحظة: باستخدام مجدول $Excel$ أو بأي راسم آخر للمنحنيات ، يمكن دراسة التمثيلات البيانية للدوال التالية: $x\mapsto f(x)+b$ ، $x\mapsto f(x+a)$ ، $x\mapsto f(x+a)+b$.

التعليم في الفضاء

10

الكفاءات المستهدفة

- تعليم نقط أعطيت إحداثياتها.
- تعيين معادلة لمستو مواز لأحد مستويات الإحداثيات.
- تعيين معادلات مستقيم معرف بنقطة و شعاع توجيه له.
- إثبات أن أشعة معطاة تنتمي إلى نفس المستوي.
- استعمال مبرهنة فيثاغورس لإيجاد المسافة بين نقطتين.
- استعمال دستور المسافة بين نقطتين لتعيين مجموعة نقط تحقق خاصية ما.



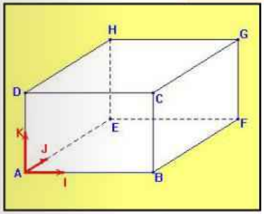
ميشال شال 1793 / 1880

ولد ميشال شال (Michel Chasles) سنة 1793 بمدينة ابيرنان بفرنسا. وبعد ما تفوق في التعليم الثانوي التحق سنة 1812 بالمدرسة المتعددة التقنيات و بعد تخرجه رفض منصبا هاما في الدولة و عاد إلى مسقط رأسه لدراسة تاريخ الرياضيات.

أصدر شال أولى أعماله سنة 1827 و كانت عبارة عن لمحة تاريخية حول الطرائق في الهندسة. عمل سنة 1841 أستاذا بالمدرسة المتعددة التقنيات ثم بجامعة السوربون ابتداء من سنة 1846. نشر بعد ذلك كتابين مهمين في الهندسة و قد اشتهر بالعلاقة التي تحمل اسمه.

توفي ميشال شال سنة 1880 بمدينة باريس.

نشاط أول



$ABCDEFGH$ متوازي مستطيلات حيث:

$AB=3$، $AD=2$ و $AE=4$.

لتكن I، J و K نقط الأحرف $[AB]$، $[AE]$ و $[AD]$ على الترتيب و التي تحقق: $AI=AJ=AK=1$.

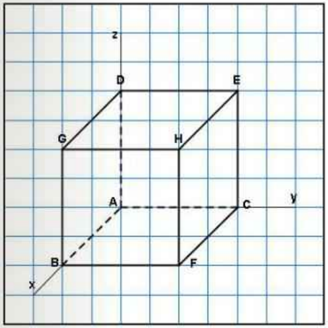
للذهاب مثلا إلى النقطة G انطلاقا من النقطة A يمكننا التنقل بثلاث وحدات طول على الحرف $[AB]$ في اتجاه الشعاع $\overrightarrow{AI}$ ثم بأربع وحدات على الحرف $[BF]$ في اتجاه الشعاع $\overrightarrow{AJ}$ و أخيرا بوحدتين على الحرف $[FG]$ في اتجاه الشعاع $\overrightarrow{AK}$.

قمنا هكذا بتعليم وضعية النقطة G في متوازي المستطيلات $ABCDEFGH$ بثلاثية الأعداد $(3;4;2)$.

نقول أن: $(3;4;2)$ هي إحداثيات النقطة G في المعلم $(A;I;J;K)$.

1. عين إحداثيات بقية رؤوس متوازي المستطيلات $ABCDEFGH$ في المعلم $(A;I;J;K)$.
2. عين إحداثيات النقط I، J و K في المعلم $(A;I;J;K)$. ماذا تمثل النقطة A بالنسبة لهذا المعلم ؟
3. عين، في المعلم $(A;I;J;K)$، إحداثيات النقطتين L و M حيث L منتصف الحرف $[CG]$ و $\overrightarrow{HM}=\frac{2}{3}\overrightarrow{HG}$.

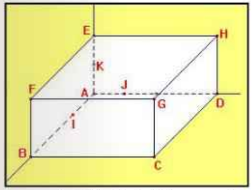
نشاط ثان



$ABFCDGHE$ مكعب.

1. عين إحداثيات رؤوس هذا المكعب في المعلم $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD})$.
2. عين الشروط اللازمة والكافية التي يجب أن تحققها (x,y,z) إحداثيات نقطة M حتى تنتمي إلى:
   - المستوي GDE
   - المستوي ABC
   - المستوي EHF
   - المستقيم (AB)
   - المستقيم (AC)
   - المستقيم (AD)
   - المستقيم (HE)
3. عين إحداثيات منتصفات أحرف المكعب $ABFCDGHE$.

نشاط ثالث



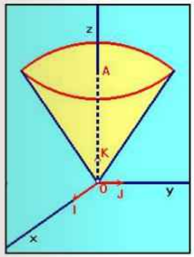
$(A;I,J,K)$ معلم متعامد و متجانس للفضاء.

$ABCDEFGH$ متوازي مستطيلات حيث:

$\vec{AE}=2\vec{AK}$ و $\vec{AD}=4\vec{AJ}$ ، $\vec{AB}=3\vec{AI}$.

1. عين إحداثيات رؤوس متوازي المستطيلات.
2. باستعمال مثلثين قائمين و غير متقايسين بين أن:
$AG^2=AC^2+AE^2$ و $AG^2=AB^2+AD^2+AE^2$
3. أحسب AG^2 ثم استنتج المسافة AG.
4. إذا رمزنا بـ $(x_G;y_G;z_G)$ إلى إحداثيات النقطة G و بـ $(x_A;y_A;z_A)$ إلى إحداثيات النقطة A
أحسب العدد الحقيقي الموجب $\sqrt{(x_G-x_A)^2+(y_G-y_A)^2+(z_G-z_A)^2}$. ماذا تلاحظ ؟
5. باستعمال طريقتين مختلفتين أحسب المسافة MN حيث M منتصف $[EH]$ و N منتصف $[GH]$

نشاط رابع



$(O;I,J,K)$ معلم متعامد و متجانس للفضاء.

ليكن (Γ) المخروط الدوراني الذي رأسه النقطة O، محوره (Oz) و قاعدته الدائرة التي مركزها النقطة $A(0,0,4)$ و نصف قطرها 3.

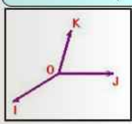
1. لتكن النقطة $C(0,0,c)$ حيث c عنصر من $[0;4]$ و ليكن (P) المستوي الذي يشمل النقطة C و يوازي المستوي (OIJ).
• حدد طبيعة المجموعة (Σ) تقاطع المستوي (P) و المخروط الدوراني (Γ).
• عين معادلة (Σ) بدلالة c في المعلم $(C;\vec{OI},\vec{OJ})$.
• بين أن معادلة (Γ) هي $x^2+y^2-\frac{9}{16}z^2=0$ مع $0\le z\le 4$.
2. لتكن النقطة $B(0,b,0)$ حيث b عنصر من $[-3;3]$ و ليكن (Q) المستوي الذي يشمل النقطة B و يوازي المستوي (OIK).
• عين معادلة المستوي (Q).
• عين في المعلم $(B;\vec{OK},\vec{OI})$ معادلة لـ (Σ') تقاطع المستوي (Q) و المخروط الدوراني (Γ).
• بين أنه يمكن كتابة معادلة (Σ') على الشكل: $x=\frac{4}{3}\sqrt{z^2-\frac{16}{9}b^2}$ حيث $0\le z\le 4$.
• مثل على شاشة آلة حاسبة بيانية المجموعة (Σ') من أجل $b=1$.

التعليم في الفضاء

1. المعلم الديكارتي

تعريف: نسمي معلما للفضاء مبدؤه النقطة O كل رباعية نقط $(O;I,J,K)$ ليست من نفس المستوي.

إذا وضعنا: $\vec{OI}=\vec{i}$ ، $\vec{OJ}=\vec{j}$ و $\vec{OK}=\vec{k}$ نرمز إلى المعلم السابق بالرمز $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

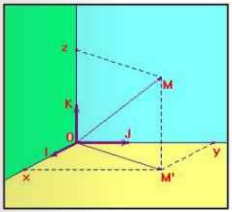


ملاحظات:

• تشكل النقط O، I، J و K رباعي وجوه.
• الأشعة $\vec{i}$، $\vec{j}$ و $\vec{k}$ ليست من نفس المستوي.
• يسمى المستقيم (OI) محور الفواصل و المستقيم (OJ) محور التراتيب بينما يسمى المستقيم (OK) محور الرواقم.
• إذا كانت المستقيمات (OI)، (OJ) و (OK) متعامدة مثنى مثنى نقول أن المعلم $(O;I,J,K)$ متعامد.
• إذا كان $(O;I,J,K)$ معلما متعامدا و كان $OI=OJ=OK=1$ نقول أن $(O;I,J,K)$ متعامد و متجانس.
• نرمز إلى المستوي (OIJ) بـ $P(O;\vec{i},\vec{j})$ و إلى المستوي (OJK) بـ $P(O;\vec{j},\vec{k})$، ...

2. إحداثيات نقطة

مبرهنة: إذا كان $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ معلما للفضاء و كانت M نقطة من الفضاء فإنه توجد ثلاثية أعداد حقيقية وحيدة (x,y,z) بحيث: $\vec{OM}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$



برهان: نضع $\vec{OI}=\vec{i}$ ، $\vec{OJ}=\vec{j}$ و $\vec{OK}=\vec{k}$

النقط O، I، J و K ليست من نفس المستوي و منه المستوي (OIJ) لا يوازي المستقيم الذي يمر من M و حيث $\vec{k}$ شعاع توجيه له فهما إذن متقاطعان ولتكن M' نقطة تقاطعهما.

النقطة M' تنتمي إلى $(O;\vec{i},\vec{j})$ و منه يوجد عددان حقيقيان x و y وحيدين بحيث: $\vec{OM'}=x\vec{i}+y\vec{j}$.

الشعاعان $\vec{M'M}$ و $\vec{k}$ مرتبطان خطيا و منه يوجد عدد حقيقي وحيد z بحيث: $\vec{M'M}=z\vec{k}$. لدينا حسب علاقة شال: $\vec{OM}=\vec{OM'}+\vec{M'M}$ ومنه: $\vec{OM}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$

3. إحداثيات شعاع

تعريف: $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ معلم للفضاء. $\vec{u}$ شعاع و لتكن M النقطة الوحيدة التي تحقق $\vec{OM}=\vec{u}$.

إحداثيات الشعاع $\vec{u}$ هي (x,y,z) إحداثيات النقطة M في المعلم $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.ويمكن أن نكتب $\vec{OM}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$

و هكذا كل شعاع $\vec{u}$ يكتب بطريقة وحيدة على الشكل: $\vec{u}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$

تمرين محلول 1

$(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ معلم متعامد للفضاء حيث: $\overrightarrow{OI}=\vec{i}$ ، $\overrightarrow{OJ}=\vec{j}$ و $\overrightarrow{OK}=\vec{k}$.

علم النقطة M ذات الإحداثيات $(2,3,-3)$.

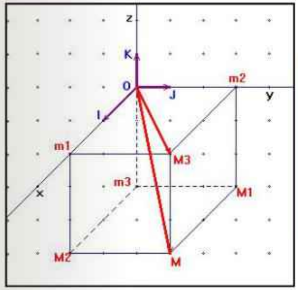
طريقة:

لتعليم نقطة M علمت إحداثياتها (x,y,z) في معلم متعامد $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ يمكننا تعليم النقط m_1، m_2، m_3، M_1، M_2 و M_3 ثم رسم متوازي المستطيلات $m_1Om_2M_3M_2m_3M_1M$

حيث:

$m_1(x,0,0)$، $m_2(0,y,0)$، $m_3(0,0,z)$

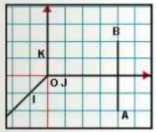
$M_1(0,y,z)$، $M_2(x,0,z)$، $M_3(x,y,0)$

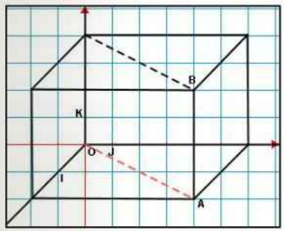


تمرين محلول 2

$(O;I,J,K)$ معلم للفضاء.

بعد إعادة رسم الشكل المقابل، عين بيانيا إحداثيات النقطتين A و B علما أن النقطة A تنتمي إلى المستوي (OIJ) و أن المستقيمين (AB) و (OK) متوازيان.





إحداثيات النقطة A هي $(2,6,0)$

إحداثيات النقطة B هي $(2,6,4)$

الحساب على الإحداثيات

1. خواص الإحداثيات

يتم تمديد كل النتائج الخاصة بالإحداثيات في المستوي إلى الفضاء.

نتائج: $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ معلم للفضاء.

1. إذا كان $\vec{u}(x,y,z)$ و $\vec{v}(x',y',z')$ شعاعين من الفضاء و كان α عددا حقيقيا فإن:
   1. $\vec{u}=\vec{0}$ يعني $x=y=z=0$
   2. $\vec{u}=\vec{v}$ يعني $x=x'$ و $y=y'$ و $z=z'$
   3. إحداثيات $(\vec{u}+\vec{v})$ هي $(x+x',y+y',z+z')$ و إحداثيات $\alpha\vec{u}$ هي $(\alpha x,\alpha y,\alpha z)$
2. إذا كانت $A(x_A,y_A,z_A)$ و $B(x_B,y_B,z_B)$ نقطتين من الفضاء فإن:
   1. إحداثيات الشعاع $\overrightarrow{AB}$ هي $(x_B-x_A,y_B-y_A,z_B-z_A)$
   2. إحداثيات منتصف القطعة المستقيمة $[AB]$ هي $\left(\frac{x_A+x_B}{2},\frac{y_A+y_B}{2},\frac{z_A+z_B}{2}\right)$

2. الأشعة من نفس المستوي

$(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ معلم للفضاء. $\vec{u}(a,b,c)$، $\vec{v}(a',b',c')$ و $\vec{w}(a'',b'',c'')$ ثلاثة أشعة من الفضاء.

تكون الأشعة $\vec{u}$، $\vec{v}$ و $\vec{w}$ من نفس المستوي إذا وفقط إذا وجد عددان حقيقيان x و y بحيث $\vec{w}=x\vec{u}+y\vec{v}$

و هذا يعني أن الجملة $\begin{cases} ax+a'y=a'' \\ bx+b'y=b'' \\ cx+c'y=c'' \end{cases}$ تقبل حلا (x,y) في $\mathbb{R}^2$.

3. معادلات مستقيم معرف بنقطة و شعاع توجيه له

$(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ معلم للفضاء. ليكن (D) المستقيم الذي يشمل النقطة $A(x_A,y_A,z_A)$ و $\vec{u}(a,b,c)$ شعاع توجيه له.

$M(x,y,z)\in(D)$ يعني $\overrightarrow{AM}=\alpha\vec{u}$ $(\alpha\in\mathbb{R})$ أي $x-x_A=\alpha a$ و $y-y_A=\alpha b$ و $z-z_A=\alpha c$

و هذا يعني إذا كان $abc\neq 0$ أن $\frac{x-x_A}{a}=\frac{y-y_A}{b}=\frac{z-z_A}{c}$ أي أن مثلا: $\begin{cases} b(x-x_A)-a(y-y_A)=0 \\ c(x-x_A)-a(z-z_A)=0 \end{cases}$

أما إذا كان أحد الأعداد a، b أو c معدوما فإن مثلا في حالة $c=0$: $\begin{cases} b(x-x_A)-a(y-y_A)=0 \\ z=z_A \end{cases}$

أما إذا انعدم عددان من الأعداد a، b و c فإن مثلا في حالة $a=b=0$: $\begin{cases} x=x_A \\ y=y_A \end{cases}$ و يبقى z كيفي.

حالات خاصة: نرمز إلى محور الفواصل بـ (Ox)، إلى محور التراتيب بـ (Oy) وإلى محور الرواقم بـ (Oz) الجدول التالي يحدد الشروط الكافية و اللازمة التي يجب أن تحققها (x,y,z) إحداثيات نقطة M لكي تنتمي إلى المحور المعني:

المحور	(Ox)	(Oy)	(Oz)
مميزاته	$y=z=0$	$z=x=0$	$x=y=0$

تمرين محلول3

$\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ معلم ديكارتي للفضاء. نعتبر النقط $A\left(2,1,-3\right)$، $B\left(2,5,1\right)$، $C\left(4,0,-2\right)$ و $H\left(5,-\frac{15}{2},-\frac{17}{2}\right)$.

1. عين إحداثيات النقطة D بحيث يكون $ABCD$ متوازي أضلاع.
2. بين أن النقط I، D و H في استقامية علما أن النقطة I هي منتصف القطعة المستقيمة $[AB]$.

حل:

1. القول أن $ABCD$ متوازي أضلاع يعني (مثلا) $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$. إحداثيات الشعاع $\overrightarrow{BC}$ هي $(2,-5,-3)$

إذا فرضنا أن إحداثيات النقطة D هي (x,y,z) فإن إحداثيات الشعاع $\overrightarrow{AD}$ هي $(x-2,y-1,z+3)$.

$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$ يعني $x-2=2$ و $y-1=-5$ و $z+3=-3$ أي $x=4$ و $y=-4$ و $z=-6$

إحداثيات النقطة D هي إذن $(4,-4,-6)$

2. إحداثيات النقطة I هي $(2,3,-1)$، إحداثيات $\overrightarrow{IH}$ هي $\left(3,-\frac{21}{2},-\frac{15}{2}\right)$ و إحداثيات $\overrightarrow{ID}$ هي $(2,-7,-5)$.

لدينا: $\overrightarrow{IH}=\frac{3}{2}\overrightarrow{ID}$ و منه النقط I، D و H في استقامية.

تمرين محلول 4

$\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ معلم ديكارتي للفضاء. نعتبر النقط $A\left(1,-2,2\right)$، $B\left(2,-1,\frac{3}{2}\right)$ و $C\left(-1,-4,3\right)$.

1. عين معادلات للمستقيم (AC).
2. هل تنتمي النقط O، A، B و C إلى نفس المستوي ؟

حل:

1. من الواضح أن الشعاع $\overrightarrow{AC}\left(-2,-2,1\right)$ شعاع توجيه للمستقيم (AC).

القول أن النقطة $M\left(x,y,z\right)$ تنتمي إلى المستقيم (AC) يعني وجود عدد حقيقي α بحيث $\overrightarrow{AM}=\alpha\overrightarrow{AC}$

اي أن $x-1=-2\alpha$ و $y+2=-2\alpha$ و $z-2=\alpha$ أي $\frac{x-1}{-2}=\frac{y+2}{-2}=z-2$

لينا مثلا: $\begin{cases}x-y-3=0\\x+2z-5=0\end{cases}$ معادلات للمستقيم (AC).

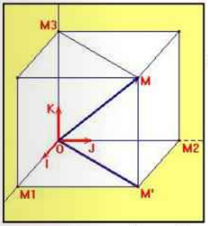
2. القول أن النقط O، A، B و C تنتمي إلى نفس المستوي يعني أن الأشعة $\overrightarrow{OA}$، $\overrightarrow{OB}$ و $\overrightarrow{OC}$ من نفس المستوي.

هل يوجد إذن عددان حقيقيان x و y يحققان مثلا: $x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}$ ؟ أي: $\begin{cases}x+2y=-1\\-2x-y=-4\\2x+\frac{3}{2}y=3\end{cases}$

نجد بعد حل الجملة: $x=3$ و $y=-2$. نستنتج أن النقط O، A، B و C تنتمي إلى نفس المستوي.

المسافة بين نقطتين

1. العبارة التحليلية لطويلة شعاع



$\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ معلم متعامد و متجانس للفضاء. نعتبر الشعاع $\vec{u}\left(x,y,z\right)$ و لتكن M النقطة التي تحقق $\overrightarrow{OM}=\vec{u}$. نعلم أن $\left\|\vec{u}\right\|=OM$.

نعتبر M_1، M_2، M_3 و M' النقط المعرفة كما يلي:

$\overrightarrow{OM_1}=x\vec{i}$، $\overrightarrow{OM_2}=y\vec{j}$، $\overrightarrow{OM_3}=z\vec{k}$ و $\overrightarrow{OM'}=\overrightarrow{OM_1}+\overrightarrow{OM_2}$

باستعمال مبرهنة فيثاغورس في المثلث القائم OMM' نحصل على:

$OM^2=OM'^2+M'M^2$ و بما أن $M'M^2=OM_3^2$ فإن:

$$OM^2=OM'^2+OM_3^2$$

باستعمال مبرهنة فيثاغورس في المثلث القائم OM_1M' نحصل على: $OM'^2=OM_1^2+M_1M'^2$ و بما أن: $M_1M'^2=OM_2^2$ فإن: $OM'^2=OM_1^2+OM_2^2$ نجد هكذا أن: $OM^2=OM_1^2+OM_2^2+OM_3^2$ و منه:

$$OM^2=x^2+y^2+z^2 \text{ اي } \left\|\vec{u}\right\|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

مبرهنة: في معلم متعامد و متجانس تحسب طويلة الشعاع $\vec{u}\left(x,y,z\right)$ بـ: $\left\|\vec{u}\right\|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

مثال: طويلة الشعاع $\vec{u}\left(-2,1,3\right)$ هي $\left\|\vec{u}\right\|=\sqrt{(-2)^2+1^2+3^2}$ و منه $\left\|\vec{u}\right\|=\sqrt{14}$.

2. المسافة بين نقطتين

علما أن $AB=\left\|\overrightarrow{AB}\right\|$ و بتطبيق المبرهنة السابقة على الشعاع $\overrightarrow{AB}$ نحصل على المبرهنة التالية:

مبرهنة: في معلم متعامد و متجانس تحسب المسافة بين النقطتين $A\left(x_A,y_A,z_A\right)$ و $B\left(x_B,y_B,z_B\right)$ بـ:

$$AB=\sqrt{\left(x_B-x_A\right)^2+\left(y_B-y_A\right)^2+\left(z_B-z_A\right)^2}$$

مثال: المسافة بين النقطتين $A\left(1,-1,2\right)$ و $B\left(0,-2,3\right)$ هي $AB=\sqrt{(0-1)^2+(-2+1)^2+(3-2)^2}=\sqrt{3}$

ملاحظة: عند إجراء الحسابات غالبا ما يفضل مربع المسافة على المسافة.

3. معادلة سطح كرة مركزها مبدأ المعلم

$\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ معلم متعامد و متجانس للفضاء. α عدد حقيقي موجب تماما. (S) سطح الكرة التي مركزها O و نصف قطرها α . لتكن $M\left(x,y,z\right)$ نقطة كيفية من الفضاء.

$M\in(S)$ يعني $OM=\alpha$ اي $OM^2=\alpha^2$ و هذا يعني $x^2+y^2+z^2=\alpha^2$

إذن $x^2+y^2+z^2=\alpha^2$ هي معادلة لسطح الكرة (S) التي مركزها O و نصف قطرها α.

تمرين محلول 5

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ النقط $A\left(8,5,2\right)$، $B\left(4,8,2\right)$ و $C\left(5,1,2\right)$.

1. احسب المسافات AB، AC و BC.
2. بين أن المثلث ABC قائم و متقايس الساقين.

حل:

1. لدينا: $AB=\sqrt{\left(4-8\right)^2+\left(8-5\right)^2+\left(2-2\right)^2}$ و منه $AB=5$

بإتباع نفس الطريقة نجد: $AC=5$ و $BC=\sqrt{50}$

2. لدينا من جهة: $AB=AC$ و منه المثلث ABC متقايس الساقين.

لدينا من جهة ثانية: $AC^2+AB^2=BC^2$ $\left(5^2+5^2=\left(\sqrt{50}\right)^2\right)$ و منه المثلث ABC قائم في النقطة A.

نستنتج مما سبق أن المثلث ABC قائم في النقطة A و متساوي الساقين.

تمرين محلول 6

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.نعتبر النقط $A\left(3,-2,2\sqrt{3}\right)$، $B\left(4,3,0\right)$ و $C\left(1,5,2\right)$.

1. عين معادلة لسطح الكرة $\left(S\right)$ التي مركزها النقطة O و تشمل النقطة A.
2. هل تنتمي النقطتان B و C إلى سطح الكرة $\left(S\right)$ ؟
3. عين إحداثيات نقط تقاطع سطح الكرة $\left(S\right)$ مع محور الرواقم $\left(Oz\right)$.

حل:

1. من الواضح أن نصف قطر سطح الكرة $\left(S\right)$ هي المسافة OA و لدينا: $OA=5$.

سطح الكرة $\left(S\right)$ هي مجموعة النقط $M\left(x,y,z\right)$ التي تحقق $OM=OA$ أي $OM^2=OA^2$

و منه معادلة سطح الكرة $\left(S\right)$ هي: $x^2+y^2+z^2=25$

2. بما أن: $OB^2=4^2+3^2+0=25$ فإن النقطة B تنتمي إلى سطح الكرة $\left(S\right)$.

لدينا: $1^2+5^2+2^2=30$ و $25\neq 30$. و بما أن إحداثيات النقط C لا تحقق معادلة سطح الكرة $\left(S\right)$ نستنتج أن النقطة C لا تنتمي إلى سطح الكرة $\left(S\right)$.

3. نعلم أن معادلة المحور $\left(Oz\right)$ هي: $\begin{cases}x=0\\y=0\end{cases}$

و بالتالي القول أن $M\left(x,y,z\right)$ نقطة مشتركة بين $\left(S\right)$ و $\left(Oz\right)$ يعني: $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=25\\x=0\\y=0\end{cases}$

تقبل هذه الجملة حلين هما $\left(0,0,5\right)$ و $\left(0,0,-5\right)$.

و هكذا يتقاطع سطح الكرة $\left(S\right)$ مع محور الرواقم $\left(Oz\right)$ في النقطتين $E\left(0,0,5\right)$ و $F\left(0,0,-5\right)$.

معادلات المستويات الموازية لأحد مستويات الإحداثيات

$\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ معلم ديكارتي للفضاء.

يدل $P\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ على مستوي الإحداثيات المنسوب إلى المعلم $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ و يدل $P\left(O;\vec{j},\vec{k}\right)$ على مستوي الإحداثيات المنسوب إلى المعلم $\left(O;\vec{j},\vec{k}\right)$ بينما يدل $P\left(O;\vec{k},\vec{i}\right)$ على مستوي الإحداثيات المنسوب إلى المعلم $\left(O;\vec{k},\vec{i}\right)$.

1. معادلات مستويات الإحداثيات

❖ معادلة مستوي الإحداثيات $P\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$

- بين أنه إذا كانت $M\left(x,y,z\right)$ نقطة من $P\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ فإن $z=0$.
- عكسيا بين أن كل نقطة $M\left(x,y,z\right)$ حيث $z=0$ هي نقطة من $P\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

نقول أن $z=0$ هي معادلة $P\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$

❖ أنقل ثم أكمل الجدول التالي

المستوي	$P\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$	$P\left(O;\vec{j},\vec{k}\right)$	$P\left(O;\vec{k},\vec{i}\right)$
معادلته	$z=0$		

2. معادلة لمستو مواز لأحد مستويات الإحداثيات

❖ معادلة المستوي الموازي لـ $P\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$

a عدد حقيقي معطى، $\left(\Gamma\right)$ مجموعة النقط $M\left(x,y,z\right)$ حيث $z=a$ و A النقطة ذات الإحداثيات $\left(0,0,a\right)$.

- إذا كانت $M\left(x,y,z\right)$ نقطة من $\left(\Gamma\right)$ عين إحداثيات $\overrightarrow{AM}$ ثم بين أن M تنتمي إلى $P\left(A;\vec{i},\vec{j}\right)$.
- إذا كانت M نقطة من $P\left(A;\vec{i},\vec{j}\right)$ بين، باستعمال العلاقة $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AM}$، أن M تنتمي إلى $\left(\Gamma\right)$.

نستنتج مما سبق أن $\left(\Gamma\right)=P\left(A;\vec{i},\vec{j}\right)$

- تحقق أن المستويين $\left(\Gamma\right)$ و $P\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ متوازيان.

الخلاصة: مجموعة النقط $M\left(x,y,z\right)$ حيث $z=a$ هي المستوي الذي يشمل النقطة $A\left(0,0,a\right)$ و يوازي مستوي الإحداثيات $P\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$. نقول أن $z=a$ هي معادلة له.

3. تطبيقات

❖ عين معادلة للمستوي $\left(P_1\right)$ الموازي لـ $P\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ والذي يشمل النقطة $A\left(1,0,-3\right)$.

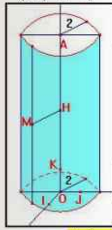
❖ عين معادلة للمستوي $\left(P_2\right)$ الموازي لـ $P\left(O;\vec{j},\vec{k}\right)$ والذي يشمل النقطة $B\left(2,2,-1\right)$.

❖ عين معادلة للمستوي $\left(P_3\right)$ الموازي لـ $P\left(O;\vec{k},\vec{i}\right)$ والذي يشمل النقطة $C\left(0,3,0\right)$.

❖ حدد مجموعة النقط $M\left(x,y,z\right)$ حيث $y=3$ (x و z كيفيان).

معادلة سطح الأسطوانة الدورانية التي محورها أحد محاور الإحداثيات

1. **دراسة مثال:** $(O;I,J,K)$ معلم متعامد و متجانس للفضاء. لتكن (C) الأسطوانة التي محورها (Oz) و قاعدتاهاالدائرتان اللتان نصف قطراهما 2 و مركزاهما O و $A(0,0,5)$.



• لتكن $M(x,y,z)$ نقطة من (C) و لتكن النقطة H مسقطها العمودي على (Oz). بعد تعيين إحداثيات H بين أن إحداثيات M تحقق: $x^2+y^2=4$ مع $0\le z\le 5$.

• عكسيا لتكن $M(x,y,z)$ نقطة من الفضاء تحقق: $x^2+y^2=4$ مع $0\le z\le 5$. بين أن: $MH=2$ ثم استنتج أن النقطة M تنتمي إلى الأسطوانة (C).

الخلاصة: معادلة الأسطوانة (C) هي إذن: $x^2+y^2=4$ مع $0\le z\le 5$.

الحالة العامة: معادلة سطح الأسطوانة الدورانية التي محورها (Oz) ونصف قطر الدائرة، مقطعها بمستو عمودي عل المحور (Oz)، R هي: $x^2+y^2=R^2$ مع z كيفي.

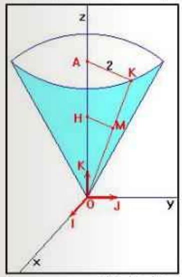
ملاحظة: مقطع أسطوانة دورانية محورها (Oz) بمستو معادلته $z=a$ هي دائرة معادلتاها: $\begin{cases}x^2+y^2=R^2\\ z=a\end{cases}$

تطبيقات: • عين معادلة الأسطوانة الدورانية التي محورها (Oy) و نصف قطر مقطعها بالمستوي ذو المعادلة $y=0$ هو $\sqrt{3}$.

• ما هي مجوعة النقط $M(x,y,z)$ من الفضاء التي تحقق: $z^2+y^2=25$ مع $-2\le x\le 3$.

معادلة سطح المخروط الدوراني الذي محوره أحد محاور الإحداثيات ورأسه o

1. **دراسة مثال:** $(O;I,J,K)$ معلم متعامد و متجانس للفضاء. ليكن (C) المخروط الذي محوره (Oz) و رأسه O و قاعدته الدائرة التي مركزها $A(0,0,4)$ ونصف قطرها 2.



• لتكن $M(x,y,z)$ نقطة من (C) $(M\ne O)$ و لتكن H مسقطها العمودي على (Oz). بين أن $HM^2=\frac{1}{4}OH^2$ ثم استنتج أن إحداثيات M تحقق: $x^2+y^2-\frac{1}{4}z^2=0$ مع $0<z\le 4$. ماذا يمثل $\frac{1}{4}$ بالنسبة للزاوية AOK ؟

• عكسيا لتكن $M(x,y,z)$ نقطة من الفضاء تحقق: $x^2+y^2-\frac{1}{4}z^2=0$ مع $0\le z\le 4$. بين أن M تنتمي إلى المخروط (C).

الخلاصة: معادلة المخروط (C) هي إذن: $x^2+y^2-\frac{1}{4}z^2=0$ مع $0\le z\le 4$.

الحالة العامة: معادلة المخروط الذي محوره (Oz)، رأسه O و قيس نصف زاويته رأسه α هي: $x^2+y^2-\tan^2\alpha\times z^2=0$

تطبيق: عين معادلة المخروط الدوراني الذي محوره (Oy)، رأسه O، ارتفاعه 5 و نصف قطر قاعدته 3.

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ النقطتين $A(3,0,-3)$ و $B(2,0,-2)$.

1. **عين إحداثيات النقطة G بحيث $-2\vec{GA}+3\vec{GB}=\vec{0}$. ماذا تمثل النقطة G بالنسبة للنقطتين A و B ؟**
2. **نرفق بكل نقطة $M(x,y,z)$ العدد الحقيقي $f(M)$ المعرف بـ: $f(M)=-2MA^2+3MB^2$**

و لتكن (Γ_k) مجموعة النقط M من الفضاء التي تحقق: $f(M)=k$ حيث k عدد حقيقي.

- **عبر عن $f(M)$ بدلالة x، y و z ثم عين المجموعتين (Γ_4) و (Γ_{-12}).**
- **ناقش حسب قيم k طبيعة المجموعة (Γ_k).**

1. يمكن إتباع عدة طرق. نقترح فيما يلي الطريقة التالية: نفرض أن إحداثيات G هي (x,y,z).

إحداثيات الشعاع $-2\vec{GA}+3\vec{GB}$ هي إذن $(-x,-y,-z)$ و منه $-2\vec{GA}+3\vec{GB}=\vec{0}$ يعني $x=y=z=o$

إذن: $G(0,0,0)$ النقطة G هي إذن النقطة O مبدأ المعلم.

النقطة G هي مرجح الجملة المثقلة $\{(A;-2),(B;3)\}$.

2. • لدينا: $MA^2=(x-3)^2+(y-0)^2+(z+3)^2$ و $MB^2=(x-2)^2+(y-0)^2+(z+2)^2$

و منه: $MA^2=x^2+y^2+z^2-6x+6z+18$ و $MB^2=x^2+y^2+z^2-4x+4z+8$

نجد هكذا: $f(M)=x^2+y^2+z^2-12$

(Γ_4) هي مجموعة النقط $M(x,y,z)$ من الفضاء التي تحقق: $f(M)=4$ أي: $x^2+y^2+z^2-12=4$

و هذا يعني أن: $x^2+y^2+z^2=16$ و هي معادلة سطح الكرة التي مركزها O و نصف قطرها 4.

(Γ_{-12}) هي مجموعة النقط $M(x,y,z)$ من الفضاء التي تحقق: $f(M)=-12$ أي: $x^2+y^2+z^2-12=-12$

و هذا يعني أن: $x^2+y^2+z^2=0$ أي $x=y=z=o$ ومنه $(\Gamma_{-12})=\{O\}$

• $f(M)=k$ يعني $x^2+y^2+z^2-12=k$ أي $x^2+y^2+z^2=k+12$

بما أن $x^2+y^2+z^2\ge 0$ نقوم بدراسة إشارة $(k+12)$

k	$-\infty$		-12		$+\infty$
إشارة $k+12$		$-$	0	$+$	

نميز إذن ثلاث حالات:

الحالة1: $k<-12$

المجموعة (Γ_k) هي مجموعة خالية.

الحالة2: $k=-12$

المجموعة (Γ_k) هي المجموعة $\{O\}$.

الحالة3: $k>-12$

المجموعة (Γ_k) هي سطح الكرة التي مركزها النقطة O و نصف قطرها $\sqrt{k+12}$

مسائل محلولة

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ النقط $E\left(0,0,-1\right)$ ، $A\left(0,0,2\right)$ ، $B\left(0,0,-4\right)$ ، $C\left(\sqrt{5},0,1\right)$ و $D\left(\sqrt{5},0,-3\right)$. ليكن (S) سطح الكرة التي مركزها E ونصف قطرها 3 .

1. هل تنتمي النقط A ، B ، C و D إلى نفس المستوي ؟
2. ما هي معادلة (S) ؟ تحقق أن A ، B ، C و D تنتمي إلى (S).عين نقط تقاطع (S) مع محاور الإحداثيات.
3. أدرس حسب قيم العدد الحقيقي a الأوضاع النسبية للسطح (S) و المستوي (P_a) ذو المعادلة $z=a$.
4. عين مركز و نصف قطر الدائرة مقطع سطح الكرة (S) بالمستوي (P_{-2}).

1. تنتمي النقط A ، B ، C و D إلى نفس المستوي إذا و فقط إذا كانت الأشعة $\overrightarrow{AB}$ ، $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{AD}$ (مثلا) من نفس المستوي. لدينا $\overrightarrow{AB}\left(0,0,-6\right)$ ، $\overrightarrow{AC}\left(\sqrt{5},0,-1\right)$ و $\overrightarrow{AD}\left(\sqrt{5},0,-5\right)$.

هل يوجد عددان حقيقيان x و y بحيث: $\overrightarrow{AB}=x\overrightarrow{AC}+y\overrightarrow{AD}$ ؟

$\overrightarrow{AB}=x\overrightarrow{AC}+y\overrightarrow{AD}$ يعني $\begin{cases}x\sqrt{5}+y\sqrt{5}=0\\-x-5y=-6\end{cases}$. نجد بعد حل الجملة السابقة: $x=-\dfrac{3}{2}$ و $y=\dfrac{3}{2}$.

نستنتج أن النقط A ، B ، C و D تنتمي إلى نفس المستوي.

2. معادلة (S) هي: $x^2+y^2+(z+1)^2=9$

لدينا(مثلا): $EA^2=EB^2=EC^2=ED^2=9$ و منه النقط A ، B ، C و D تنتمي إلى (S).

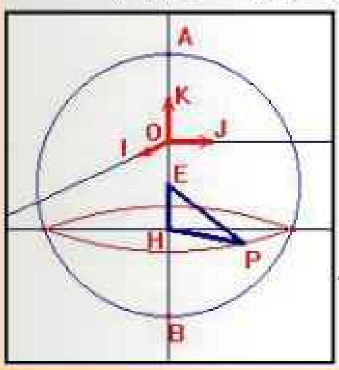
تكون $M\left(x,y,z\right)$ نقطة مشتركة بين (S) و المحور (Ox) يعني $\begin{cases}x^2+y^2+(z+1)^2=9\\y=z=0\end{cases}$ أي $\begin{cases}x^2=8\\y=z=0\end{cases}$

نجد بعد حل هذه الجملة نقطتين مشتركتين إحداثياتهما $\left(2\sqrt{2},0,0\right)$ و $\left(-2\sqrt{2},0,0\right)$.

يتقاطع السطح (S) مع (Oy) في النقطتين $\left(0,2\sqrt{2},0\right)$ و $\left(0,-2\sqrt{2},0\right)$ و يتقاطع مع (Oz) في النقطتين A و B.

3. نلاحظ أن المستوي (P_a) يوازي مستوي الإحداثيات $P\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$. نميز إذن ثلاث حالات:

- إذا كان $a\in\left]-\infty;-4\right[\cup\left]2;+\infty\right[$ يكون السطح (S) و المستوي (P_a) منفصلين.
- إذا كان $a\in\{-4;2\}$ يكون المستوي (P_a) مماسا للسطح (S) في النقطتين A و B.
- إذا كان $a\in\left]-4;2\right[$ فإن المستوي (P_a) يقطع سطح الكرة (P_a) وفق دائرة مركزها ينتمي إلى المحور (Oz) .



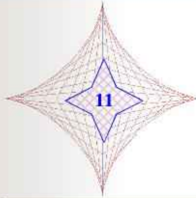
4. (-2) ينتمي إلى $\left]-4;2\right[$ و منه المستوي (P_{-2}) يقطع سطح الكرة (S) و ذلك وفق دائرة نرمز إلى مركزها بـ H .

بما أن النقطة تنتمي إلى كل من المحور (Oz) و المستوي (P_{-2}): $z=-2$

فإن إحداثيات النقطة H هي $(0,0,-2)$.

النقطة P تنتمي إلى السطح (S) و منه $EP=3$. بتطبيق مبرهنة فيثاغورس في المثلث EHP يكون لدينا: $EP^2=EH^2+HP^2$. نجد بعد الحساب $HP=2\sqrt{2}$.

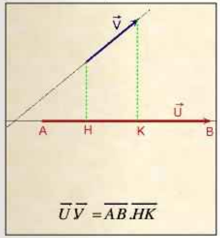
مقطع (S) بالمستوي (P_{-2}) هي الدائرة التي مركزها H و نصف قطرها $2\sqrt{2}$



الجداء السلمي في المستوي

الكفاءات المستهدفة

- حساب الجداء السلمي لشعاعين.
- إثبات علاقات تتعلق بالتعامد.
- كتابة معادلة مستقيم علم شعاع ناظمي له و نقطة منه.
- تعيين معادلة دائرة.
- حساب مسافات و أقياس زوايا.



هو غياث الدين بن مسعود بن محمد الكاشاني و المدعو الكاشي. ولد في أواخر القرن الثامن الهجري في مدينة كاشان (إيران). درس الكاشي النحو و الصرف و الفقه و المنطق، ثم درس الرياضيات و تفوق فيها. و لا غرابة في ذلك فإن والده كان من أكبر علماء الرياضيات و الفلك.

و قد عاش الكاشي معظم حياته في مدينة سمرقند و فيها بنا مرصدا سماه " مرصد سمرقند ".

مؤلفاته: وضع الكاشي مصنفات في علوم مختلفة نذكر منها:

كتاب " الزيج الخقاني " و فيه ضبط لجداول النجوم.

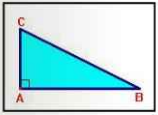
"رسالة في الحساب"، "رسالة في الهندسة"، "رسالة الجيب و الوتر" و " رسالة عن إهليجي القمر و عطارد".

و كان كتابه " مفتاح الحساب " منهلا استقى منه علماء الشرق و الغرب على حد سواء و اعتمدوا عليه في تعليم أبنائهم في المدارس و الجامعات عدة قرون، كما استخدموا كثيرا من المبرهنات و القوانين التي أتى بها و برهنها و ابتكرها.

الكاشي 839هـ / 1436 م

نشاط أول

من مميزات المثلثات القائمة "' مبرهنة فيثاغورس الشهيرة "



ABC مثلث قائم في النقطة A يعني $AB^2+AC^2=BC^2$

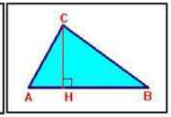
لدينا $AB^2+AC^2=BC^2$ يعني $AB^2+AC^2-BC^2=0$

سوف نهتم بصفة خاصة بالعدد w المعرف بـ: $w=\frac{1}{2}\left(AB^2+AC^2-BC^2\right)$

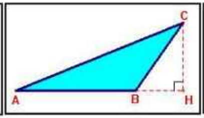
من الواضح أنه إذا كان ABC مثلثا قائما يكون $w=0$. نتساءل إذن عن قيمة العدد w إذا لم يكن المثلث ABC قائما.

من أجل ذلك نعتبر مثلثا كيفيا ABC و لتكن النقطة H المسقط العمودي للنقطة C على المستقيم (AB).

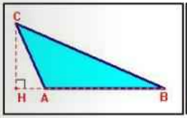
نميز ثلاث حالات حسب وضعية النقط A ، B و H.



الوضعية1



الوضعية2

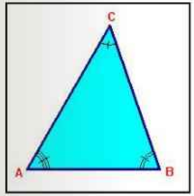


الوضعية3

1. بين أن: $BC^2=HB^2+HC^2$ و أن: $AC^2=HA^2+HC^2$ ثم استنتج أن:
$$w=\frac{1}{2}\left(AB^2+HA^2-HB^2\right)$$
2. • **الوضعية1**: بكتابة $HB=AB-HA$ بين أن: $w=AB\times AH=AB\times AC\cos BAC$
   • **الوضعية2**: بين أن: $w=AB\times AH=AB\times AC\cos BAC$
   • **الوضعية3**: بين أن: $w=-AB\times AH=AB\times AC\cos BAC$
3. بفرض $\vec{AB}=\vec{u}$ و $\vec{AC}=\vec{v}$ بين أن: $w=\frac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2-\|\vec{u}-\vec{v}\|^2\right)$
4. نذكر أنه إذا كان $(O;I,J)$ معلما متعامدا و متجانسا للمستوي و كان $\vec{u}(x,y)$ شعاعا من المستوي فإن:
$$\|\vec{u}\|=\sqrt{x^2+y^2}$$
بفرض $\vec{u}(x,y)$ و $\vec{v}(x',y')$ بين أن: $w=xx'+yy'$

يسمى العدد w الجداء السلمي للشعاعين $\overline{AB}$ و $\overline{AC}$

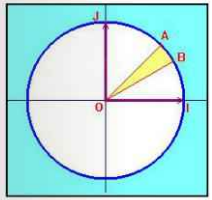
نشاط ثان



ABC مثلث حيث: $AB=4cm$ ، $AC=5cm$ و $CAB=60°$

1. تحقق أن $BC^2=\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)^2$ ثم أحسب المسافة BC.
2. أحسب القيمة المضبوطة للعدد $\cos ABC$ ثم عين قيمة مقربة إلى 0.01 للزاوية ABC.
3. عين قيمة مقربة إلى 0.01 للزاوية BCA.

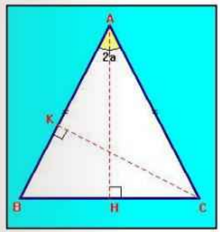
نشاط ثالث



$(O;I,J)$ معلم متعامد و متجانس للمستوي. نعتبر النقطتين A و B الصورتين على الترتيب للعددين $\frac{\pi}{4}$ و $\frac{\pi}{6}$ على الدائرة المثلثية التي مركزها النقطة O.

1. عين قيسا بالراديان للزاوية $\left(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OA}\right)$ ثم بين أن:
$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\cos\frac{\pi}{12}$$
2. أحسب، بعد تعيين إحداثيات كل من $\overrightarrow{OA}$ و $\overrightarrow{OB}$ ، $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$.
3. استنتج مما سبق القيمة المضبوطة للعدد $\cos\frac{\pi}{12}$.

نشاط رابع



ABC مثلث متساوي الساقين حيث:
$$AB=AC=\alpha \quad \text{و} \quad A=2a\ rad$$
نسمي S مساحة المثلث ABC، H المسقط العمودي للنقطة A على (BC) و K المسقط العمودي للنقطة C على (AB).

1. تحقق أن: $S=AH\times BH$ ثم استنتج أن:
$$S=\alpha^2\sin a\cos a$$
2. أحسب S بدلالة $\sin 2a$ و α
3. استنتج مما سبق عبارة $\sin 2a$ بدلالة $\sin a$ و $\cos a$.

الجداء السلمي

1. الجداء السلمي لشعاعين

تعريف: الجداء السلمي لشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ هو العدد الحقيقي الذي نرمز إليه بالرمز $\vec{u}\cdot\vec{v}$ و المعرف بـ:
- $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$ إذا كان $\vec{u}=\vec{0}$ أو $\vec{v}=\vec{0}$
- $\vec{u}\cdot\vec{v}=\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos(\vec{u},\vec{v})$ إذا كان $\vec{u}\neq\vec{0}$ و $\vec{v}\neq\vec{0}$

حالات خاصة: •إذا كان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مرتبطين خطيا و كان لهما نفس الاتجاه فإن $\vec{u}\cdot\vec{v}=\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|$ لأن $\cos(\vec{u},\vec{v})=1$

•إذا كان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مرتبطين خطيا و كانا اتجاهاهما متعاكسين فإن $\vec{u}\cdot\vec{v}=-\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|$ لأن $\cos(\vec{u},\vec{v})=-1$

•نرمز إلى الجداء السلمي $\vec{u}\cdot\vec{u}$ بـ $\vec{u}^2$ و نسميه المربع السلمي للشعاع $\vec{u}$ و هكذا $\vec{u}^2=\|\vec{u}\|^2$ و بصفة خاصة إذا كانت A و B نقطتين فإن $\overrightarrow{AB}^2=\|\overrightarrow{AB}\|^2=AB^2$

مبرهنة: إذا كان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ شعاعين فإن: $\vec{u}\cdot\vec{v}=\frac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2-\|\vec{u}-\vec{v}\|^2\right)$ أنظر البرهان في التمرين رقم 48

2. العبارة التحليلية للجداء السلمي

مبرهنة: إذا كانت، في معلم متعامد و متجانس، إحداثيات $\vec{u}$ هي (x,y) و كانت إحداثيات $\vec{v}$ هي (x',y') فإن:
$$\vec{u}\cdot\vec{v}=xx'+yy'$$

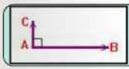
البرهان: إذا كان $(O;\vec{i},\vec{j})$ معلما متعامدا و متجانسا و كان $\vec{u}(x,y)$ و $\vec{v}(x',y')$ شعاعين فإن:

$\|\vec{u}\|^2=x^2+y^2$ ، $\|\vec{v}\|^2=x'^2+y'^2$ و $\|\vec{u}-\vec{v}\|^2=(x-x')^2+(y-y')^2$ $\left[\vec{u}-\vec{v}\,(x-x',y-y')\right]$

بعد التعويض في $\vec{u}\cdot\vec{v}=\frac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2-\|\vec{u}-\vec{v}\|^2\right)$ و بعد إجراء حسابات بسيطة نجد: $\vec{u}\cdot\vec{v}=xx'+yy'$

3. الأشعة المتعامدة

تعريف: القول أن الشعاعين غير المعدومين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متعامدان يعني أنه إذا كان: $\overrightarrow{AB}=\vec{u}$ و $\overrightarrow{AC}=\vec{v}$ يكون المستقيمان (AB) و (AC) متعامدين.



ملاحظة: نصطلح على أن الشعاع المعدوم عمودي على كل الأشعة.

مبرهنة: القول أن الشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متعامدان يعني أن $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$.

البرهان: • إذا كان $\vec{u}=\vec{0}$ أو $\vec{v}=\vec{0}$ فمن الواضح أن: $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$

• إذا كان $\vec{u}\neq\vec{0}$ و $\vec{v}\neq\vec{0}$ فالقول أن $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$ يعني $\cos(\vec{u},\vec{v})=0$ أي $(\vec{u},\vec{v})=\frac{\pi}{2}+k\pi$ حيث k عدد صحيح

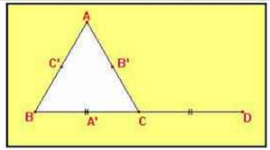
و هذا يدل على أن الشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متعامدان.

تمرين محلول 1

ABC مثلث متقايس الأضلاع حيث $AB=AC=BC=3$ و لتكن النقط A'، B' و C' منتصفات القطع المستقيمة $[BC]$، $[AC]$ و $[AB]$ على الترتيب.

أحسب الجداءات السلمية الآتية: $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$، $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CA}$، $\overrightarrow{CC'}\cdot\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{A'B'}\cdot\overrightarrow{AB}$.

حل:



$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=AB\times AC\cos BAC=3\times3\cos\frac{\pi}{3}=\frac{9}{2}$$

نعتبر النقطة D حيث $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{CD}$ و منه $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{CA}=CD\times CA\cos\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)=3\times3\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{9}{2}$

(CC') هو ارتفاع في المثلث ABC و منه $(CC')\perp(AB)$ و بالتالي فإن $\overrightarrow{CC'}\cdot\overrightarrow{AB}=0$

نعلم أن $\overrightarrow{A'B'}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ و منه الشعاعان $\overrightarrow{A'B'}$ و $\overrightarrow{AB}$ مرتبطين خطيا و اتجاهاهما متعاكسين و بالتالي فإن:

$$\overrightarrow{A'B'}\cdot\overrightarrow{AB}=-A'B'\times AB=-\frac{3}{2}\times3=-\frac{9}{2}$$

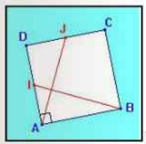
تمرين محلول 2

$ABCD$ مربع. I و J هما منتصفا القطعتين المستقيمتين $[AD]$ و $[DC]$ على الترتيب.

برهن أن المستقيمين (AJ) و (BI) متعامدان.

حل:

طريقة: لإثبات أن مستقيمين (AB) و (CD) متعامدان يمكن إثبات أن $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=0$



لنبين أن $\overrightarrow{AJ}\cdot\overrightarrow{BI}=0$. و من أجل ذلك نعتبر المعلم المتعامد و المتجانس $(A;B,D)$

لدينا: $A(0,0)$، $J\left(\frac{1}{2},1\right)$، $B(1,0)$ و $I\left(0,\frac{1}{2}\right)$ و منه $\overrightarrow{AJ}\left(\frac{1}{2},1\right)$ و $\overrightarrow{BI}\left(-1,\frac{1}{2}\right)$

و هكذا: $\overrightarrow{AJ}\cdot\overrightarrow{BI}=\left(\frac{1}{2}\right)(-1)+(1)\left(\frac{1}{2}\right)=0$

نستنتج إذن أن الشعاعين $\overrightarrow{AJ}$ و $\overrightarrow{BI}$ متعامدان و منه المستقيمان (AJ) و (BI) متعامدان.

قواعد الحساب

1. خواص الجداء السلمي

مبرهنة: من اجل كل ثلاث أشعة $\vec{u}$، $\vec{v}$ و $\vec{w}$ و من أجل كل عدد حقيقي λ لدينا

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{u}\ (1)\qquad \vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}\ (2)\qquad (\vec{u}+\vec{v})\cdot\vec{w}=\vec{u}\cdot\vec{w}+\vec{v}\cdot\vec{w}\ (3)$$

$$(\lambda\vec{u})\cdot\vec{v}=\lambda(\vec{u}\cdot\vec{v})\ (4)\qquad \vec{u}\cdot(\lambda\vec{v})=\lambda(\vec{u}\cdot\vec{v})\ (5)$$

البرهان: نعتبر في معلم متعامد ومتجانس الأشعة $\vec{u}(x,y)$، $\vec{v}(x',y')$ و $\vec{w}(x'',y'')$

1. لدينا $\begin{cases}\vec{u}\cdot\vec{v}=xx'+yy'\\ \vec{v}\cdot\vec{u}=x'x+y'y\end{cases}$ و بما أن $xx'=x'x$ و $yy'=y'y$ فإن $\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{u}$
2. إحداثيات الشعاع $\vec{v}+\vec{w}$ هي $(x'+x'',y'+y'')$. لدينا إذن:

$\begin{cases}\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w})=x(x'+x'')+y(y'+y'')=xx'+xx''+yy'+yy''\\ \vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}=xx'+yy'+xx''+yy''=xx'+xx''+yy'+yy''\end{cases}$ و منه $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$

3. إحداثيات الشعاع $\lambda\vec{u}$ هي $(\lambda x,\lambda y)$. لدينا إذن:

$$(\lambda\vec{u})\cdot\vec{v}=(\lambda x)x'+(\lambda y)y'=\lambda(xx'+yy')=\lambda(\vec{u}\cdot\vec{v})$$

ملاحظة: يتم، بإتباع نفس الطريقة، البرهان على الخاصيتين (3) و (5).

أمثلة:
- $2\vec{u}\cdot\left(-3\vec{v}+\frac{1}{2}\vec{w}\right)=(2\vec{u})\cdot(-3\vec{v})+(2\vec{u})\left(\frac{1}{2}\vec{w}\right)=-6\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$
- $(2\vec{u}-\vec{v})\cdot(\vec{u}+3\vec{v})=2\vec{u}^2+6\vec{u}\cdot\vec{v}-\vec{v}\cdot\vec{u}-3\vec{v}^2=2\vec{u}^2+5\vec{u}\cdot\vec{v}-3\vec{v}^2$

2. المتطابقات الشهيرة

- لدينا: $(\vec{u}+\vec{v})^2=(\vec{u}+\vec{v})(\vec{u}+\vec{v})=\vec{u}^2+\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{v}\cdot\vec{u}+\vec{v}^2=\vec{u}^2+2\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{v}^2$
- لدينا: $(\vec{u}-\vec{v})^2=(\vec{u}-\vec{v})(\vec{u}-\vec{v})=\vec{u}^2-\vec{u}\cdot\vec{v}-\vec{v}\cdot\vec{u}+\vec{v}^2=\vec{u}^2-2\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{v}^2$
- لدينا: $(\vec{u}+\vec{v})(\vec{u}-\vec{v})=\vec{u}^2-\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{v}\cdot\vec{u}-\vec{v}^2=\vec{u}^2-\vec{v}^2$

$(\vec{u}+\vec{v})^2=\vec{u}^2+2\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{v}^2$ أو $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2=\|\vec{u}\|^2+2\vec{u}\cdot\vec{v}+\|\vec{v}\|^2$

$(\vec{u}-\vec{v})^2=\vec{u}^2-2\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{v}^2$ أو $\|\vec{u}-\vec{v}\|^2=\|\vec{u}\|^2-2\vec{u}\cdot\vec{v}+\|\vec{v}\|^2$

$(\vec{u}+\vec{v})(\vec{u}-\vec{v})=\vec{u}^2-\vec{v}^2$ أو $(\vec{u}+\vec{v})(\vec{u}-\vec{v})=\|\vec{u}\|^2-\|\vec{v}\|^2$

تطبيق: بين أن: $\vec{u}\cdot\vec{v}=\frac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2-\|\vec{u}-\vec{v}\|^2\right)$ و $\vec{u}\cdot\vec{v}=\frac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2-\|\vec{u}\|^2-\|\vec{v}\|^2\right)$

تمرين محلول 3

1. A، B و C ثلاث نقط. بين أنه من أجل كل نقطة M: $\vec{AM}\cdot\vec{BC}+\vec{BM}\cdot\vec{CA}+\vec{CM}\cdot\vec{AB}=0$
2. استنتج أن ارتفاعات مثلث متقاطعة في نقطة H.

حل:

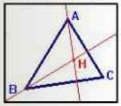
1. نضع: $\alpha=\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BM}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CM}\cdot\overrightarrow{AB}$

لدينا: $\alpha=\overrightarrow{AM}\cdot\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}\right)+\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AM}\right)\cdot\overrightarrow{CA}+\left(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AM}\right)\cdot\overrightarrow{AB}$ و منه:

$$\alpha=\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AB}$$

و بما أن: $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AB}=0$، $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{CA}=0$ و $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{AB}=0$ فإن $\alpha=0$

2. إذا كان ABC مثلثا فإن (مثلا) ارتفاعيه اللذين يشملان A و B متقاطعان في نقطة H لأنهما عموديان على مستقيمين متقاطعين. لنبين أن النقطة H تنتمي إلى الارتفاع الذي يشمل النقطة C.



لدينا حسب السؤال 1 و بأخذ $M=H$: $\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CH}\cdot\overrightarrow{AB}=0$

و بما أن $(AH)\perp(BC)$ و $(BH)\perp(AC)$ فإن $\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BC}=0$ و $\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{CA}=0$

و منه: $\overrightarrow{CH}\cdot\overrightarrow{AB}=0$ و هذا يعني أن $(CH)\perp(AB)$

نستنتج هكذا أن النقطة H تنتمي إلى الارتفاع الذي يشمل النقطة C.

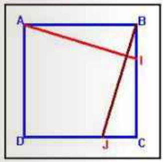
تعريف: تسمى النقطة H **نقطة ارتفاعات** ' *orthocentre* ' المثلث ABC.

تمرين محلول 4

$ABCD$ مربع طول ضلعه a. I و J هما النقطتان المعرفتان بـ: $\overrightarrow{BI}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$ و $\overrightarrow{CJ}=\frac{1}{3}\overrightarrow{CD}$.

1. أحسب الجداءات السلمية التالية: $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$، $\overrightarrow{BI}\cdot\overrightarrow{CJ}$، $\overrightarrow{BI}\cdot\overrightarrow{BC}$ و $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CJ}$
2. بكتابة $\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BI}$ و $\overrightarrow{BJ}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CJ}$ أثبت أن $\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{BJ}=0$. ماذا تستنتج ؟

حل:



1. لدينا $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=0$، $\overrightarrow{BI}\cdot\overrightarrow{CJ}=0$ بينما

$$\overrightarrow{BI}\cdot\overrightarrow{BC}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BC}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}^2=\frac{a^2}{3}$$

و $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CJ}=\overrightarrow{AB}\cdot\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{CD}\right)=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}\cdot\left(-\overrightarrow{AB}\right)=-\frac{a^2}{3}$

2. $\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{BJ}=\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BI}\right)\cdot\left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CJ}\right)$ و منه

$$\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{BJ}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CJ}+\overrightarrow{BI}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BI}\cdot\overrightarrow{CJ}$$

و بالتالي: $\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{BJ}=0-\frac{a^2}{3}+\frac{a^2}{3}+0=0$. نستنتج أن $(AI)\perp(BJ)$.

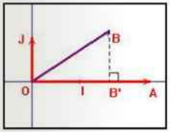
الجداء السلمي و الإسقاط العمودي

1. المسقط العمودي لشعاع على محور أو شعاع

تعريف: $\vec{v}$ شعاع حيث $\vec{v}=\overrightarrow{CD}$. C' و D' المسقطان العموديان على الترتيب للنقطتين C و D على محور $(O;\vec{u})$.
يسمى الشعاع $\vec{v}'$، المعرف بـ $\vec{v}'=\overrightarrow{C'D'}$، المسقط العمودي للشعاع $\vec{v}$ على المحور $(O;\vec{u})$ (أو على الشعاع $\vec{u}$)

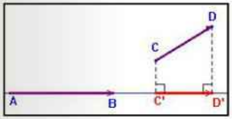
2. الجداء السلمي والمسقط العمودي لشعاع

مبرهنة: إذا كان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ شعاعين حيث $\vec{u}\neq\vec{0}$ و كان $\vec{v}'$ المسقط العمودي للشعاع $\vec{v}$ على $\vec{u}$ فإن:
$$\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{u}\cdot\vec{v}'$$



البرهان: نزود المستوي بمعلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ بحيث يكون الشعاعان $\vec{i}$ و $\vec{u}$ مرتبطين خطيا و يكون لهما نفس الاتجاه.
نضع $\vec{u}=\overrightarrow{OA}$ و $\vec{v}=\overrightarrow{OB}$ و لتكن B' المسقط العمودي لـ B على (OA).
إذن $\vec{v}'=\overrightarrow{OB'}$ هو المسقط العمودي للشعاع $\vec{v}=\overrightarrow{OB}$ على الشعاع $\vec{u}=\overrightarrow{OA}$
لدينا هكذا: $O(0,0)$، $A(x_A,0)$، $B(x_B,y_B)$ و $B'(x_B,0)$ و منه
$\overrightarrow{OA}(x_A,0)$، $\overrightarrow{OB}(x_B,y_B)$ و $\overrightarrow{OB'}(x_B,0)$

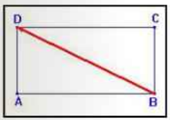
لدينا: $\begin{cases}\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=x_Ax_B+0\times y_B=x_Ax_B\\ \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB'}=x_Ax_B+0\times0=x_Ax_B\end{cases}$ و منه $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB'}$ أي: $\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{u}\cdot\vec{v}'$



نتيجة: إذا كان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ شعاعين غير معدومين و كانتا C' و D' المسقطان العموديان على الترتيب للنقطتين C و D على المستقيم (AB) فإن: $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{C'D'}$

حالات خاصة:
- إذا كان الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ مرتبطين خطيا و من نفس الاتجاه يكون: $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=AB\times CD$
- إذا كان الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ مرتبطين خطيا و كانا اتجاهاهما متعاكسين يكون: $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=-AB\times CD$

مثال: إذا كان $ABCD$ مستطيلا حيث $AB=5$ و $CB=3$ فإن:



- $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{AB}\cdot\left(-\overrightarrow{AB}\right)=-\overrightarrow{AB}^2=-AB^2=-25$

لأن المسقط العمودي للشعاع $\overrightarrow{BD}$ على الشعاع $\overrightarrow{AB}$ هو $\overrightarrow{BA}$

- $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BC}^2=3$

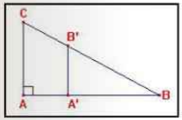
لأن المسقط العمودي للشعاع $\overrightarrow{BD}$ على الشعاع $\overrightarrow{BC}$ هو $\overrightarrow{BC}$

تمرين محلول5

ABC مثلث قائم في A . A' نقطة من القطعة المستقيمة $[AB]$. المستقيم المار من A' و الموازي للمستقيم (AC) يقطع المستقيم (BC) في النقطة B'.

قارن بين العددين $\vec{AB}\cdot\vec{AB'}$ و $\vec{AB}\cdot\vec{A'C}$.

حل:



المسقط العمودي للشعاع $\vec{AB'}$ على الشعاع $\vec{AB}$ هو الشعاع $\vec{AA'}$ و منه

$$\vec{AB}\cdot\vec{AB'}=\vec{AB}\cdot\vec{AA'}=AB\times AA'$$

لأن للشعاعين $\vec{AB}$ و $\vec{AA'}$ نفس الاتجاه.

المسقط العمودي للشعاع $\vec{A'C}$ على الشعاع $\vec{AB}$ هو الشعاع $\vec{A'A}$ و منه

$$\vec{AB}\cdot\vec{A'C}=\vec{AB}\cdot\vec{A'A}=-AB\times AA'$$

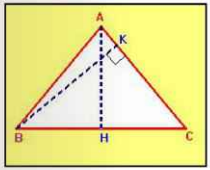
لأن اتجاهي الشعاعين $\vec{AB}$ و $\vec{A'A}$ متعاكسان.

نستنتج مما سبق أن العددين $\vec{AB}\cdot\vec{AB'}$ و $\vec{AB}\cdot\vec{A'C}$ متعاكسان أي $\vec{AB}\cdot\vec{AB'}=-\vec{AB}\cdot\vec{A'C}$

تمرين محلول6

ABC مثلث متساوي الساقين حيث $AB=AC=4$ و $BC=5$. و لتكن H منتصف القطعة المستقيمة $[BC]$.

1. أحسب الجداءات السلمية التالية: $\vec{CA}\cdot\vec{CB}$ ، $\vec{HA}\cdot\vec{CB}$ و $\vec{AB}\cdot\vec{BC}$.
2. لتكن K المسقط العمودي للنقطة B على (AC). أحسب المسافة CK.



حل:

1. •بما أن المسقط العمودي لـ $\vec{CA}$ على $\vec{CB}$ هو $\vec{CH}$ فإن:

$$\vec{CA}\cdot\vec{CB}=\vec{CH}\cdot\vec{CB}=CH\times CB=\frac{5}{2}\times5=\frac{25}{2}$$

• بما أن $(HA)\perp(CB)$ فإن: $\vec{HA}\cdot\vec{CB}=0$

•بما أن المسقط العمودي لـ $\vec{AB}$ على $\vec{CB}$ هو $\vec{HB}$ فإن:

$$\vec{AB}\cdot\vec{BC}=\vec{HB}\cdot\vec{BC}=-HB\times BC=-\frac{5}{2}\times5=-\frac{25}{2}$$

2. بما أن المسقط العمودي للشعاع $\vec{CB}$ على $\vec{CA}$ هو $\vec{CK}$ فإن: $\vec{CA}\cdot\vec{CB}=\vec{CA}\cdot\vec{CK}$

لدينا من جهة ثانية حسب السؤال1 $\vec{CA}\cdot\vec{CB}=\frac{25}{2}$

لدينا هكذا: $\vec{CA}\cdot\vec{CK}=\frac{25}{2}$ أي $CA\times CK=\frac{25}{2}$ و علما أن $CA=4$

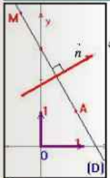
نجد في الأخير: $CK=\frac{25}{8}$

تطبيقات الجداء السلمي

1. الشعاع الناظمي لمستقيم

تعريف: القول أن الشعاع غير المعدوم $\vec{n}$ شعاع ناظمي لمستقيم (D) يعني أن $\vec{n}$ عمودي على شعاع توجيه لـ(D)

2. معادلة مستقيم علم شعاع ناظمي له و نقطة منه



$(O;\vec{i},\vec{j})$ معلم متعامد و متجانس. $\vec{n}(a,b)$ شعاع غير معدوم و $A(x_0,y_0)$ نقطة من المستوي و ليكن (D) المستقيم الذي يشمل A و $\vec{n}$ شعاع ناظمي له. (D) هي إذن مجموعة النقط M من المستوي بحيث: $\vec{AM}\cdot\vec{n}=0$. إذا فرضنا $M(x,y)$ يكون لدينا $\vec{AM}(x-x_0,y-y_0)$

و بالتالي $\vec{AM}\cdot\vec{n}=a(x-x_0)+b(y-y_0)$

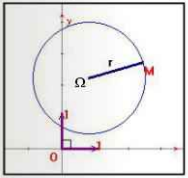
إذن تكون $M(x,y)$ نقطة من (D) إذا وفقط إذا كان $a(x-x_0)+b(y-y_0)=0$

أي $ax+by-(ax_0+by_0)=0$ أو $ax+by+c=0$ بوضع $c=-(ax_0+by_0)$

مبرهنة: في معلم متعامد و متجانس يكون لكل مستقيم حيث الشعاع غير المعدوم $\vec{n}(a,b)$ شعاع ناظمي له معادلة من الشكل: $ax+by+c=0$ حيث c عدد حقيقي.

ملاحظة: إذا كانت $ax+by+c=0$ معادلة لمستقيم (D) فإن $\vec{u}(-b,a)$ شعاع توجيه له و منه الشعاع $\vec{n}(a,b)$ شعاع ناظمي للمستقيم (D) لأن فعلا $\vec{n}$ و $\vec{u}$ متعامدان مادام $\vec{n}\cdot\vec{u}=0$.

3. معادلة دائرة



المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

❖ **معادلة دائرة علم مركزها و نصف قطرها**

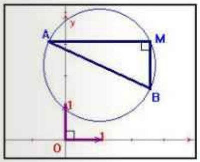
لتكن (C) الدائرة التي مركزها $\Omega(x_0,y_0)$ و نصف قطرها r $(r>0)$.

(C) هي مجموعة النقط $M(x,y)$ حيث: $\Omega M=r$ أي $\Omega M^2=r^2$

و هذا يعني أن: $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$

مبرهنة: في معلم متعامد و متجانس معادلة الدائرة (C) التي مركزها $\Omega(x_0,y_0)$ و نصف قطرها r $(r>0)$ هي:

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$$



❖ **معادلة دائرة علم قطر لها**

لتكن (C) الدائرة التي قطرها $[AB]$. (C) باستثناء A و B هي مجموعة النقط M بحيث يكون المثلث AMB قائما في M أي $\vec{MA}\cdot\vec{MB}=0$.

لدينا كذلك $\vec{MA}\cdot\vec{MB}=0$ إذا كانت M منطبقة على A أو على B.

الدائرة التي قطرها $[AB]$ هي مجموعة النقط M حيث $\vec{MA}\cdot\vec{MB}=0$

تمرين محلول7

$(O;\vec{i},\vec{j})$ معلم متعامد و متجانس. نعتبر المثلث ABC حيث: $A(1,1)$، $B(-2,3)$ و $C(3,2)$.

أكتب معادلة للارتفاع المتعلق بالضلع $[BC]$

حل: ليكن (D) الارتفاع المتعلق بالضلع $[BC]$ في المثلث ABC. إذن (D) هو المستقيم الذي يشمل النقطة A و $\overrightarrow{BC}$ شعاع ناظمي له. و بما أن إحداثيات $\overrightarrow{BC}$ هي $(5,-1)$ فإن معادلة (D) هي من الشكل:

$$5x-y+c=0$$

و بما أن النقطة A تنتمي إلى المستقيم (D) فإن: $5(1)-1+c=0$ و منه $c=-4$

إذن $5x-y-4=0$ هي معادلة للارتفاع المتعلق بالضلع $[BC]$.

تمرين محلول8

$(O;\vec{i},\vec{j})$ معلم متعامد و متجانس.

1. عين معادلة (C) الدائرة التي مركزها $\Omega(-2,1)$ و نصف قطرها $\sqrt{3}$.
2. عين معادلة (C') الدائرة التي قطرها $[AB]$ علما أن $A(-2,-1)$ و $B(-3,2)$.
3. بين أن مجموعة النقط $M(x,y)$ حيث $x^2+y^2-2x-3=0$ دائرة يطلب تعيين مركزها و نصف قطرها.
4. هل (Γ) مجموعة النقط $M(x,y)$ حيث $x^2+y^2+2x-4y+8=0$ دائرة ؟

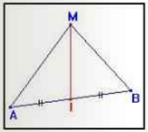
حل:

1. معادلة (C) هي $(x+2)^2+(y-1)^2=\sqrt{3}^2$ أي: $x^2+y^2+4x-2y+2=0$
2. $M(x,y)\in(C')$ يعني أن $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$ أي: $(-2-x)(-3-x)+(-1-y)(2-y)=0$
و منه معادلة (C') هي $x^2+y^2+5x-y+4=0$
3. لتكن (C'') مجموعة النقط $M(x,y)$ التي تحقق $x^2+y^2-2x-3=0$ $(*)$
لدينا $x^2-2x=(x-1)^2-1$ و منه تكتب $(*)$ على الشكل: $(x-1)^2-1+y^2-3=0$
لدينا إذن $(x-1)^2+y^2=2^2$. (C'') هي إذن الدائرة التي مركزها النقطة $I(1,0)$ و نصف قطرها 2 .
4. نكتب $x^2+y^2+2x-4y+8=0$ على الشكل $(x^2+2x)+(y^2-4y)+8=0$
و بما أن $x^2+2x=(x+1)^2-1$ و $y^2-4y=(y-2)^2-4$ يكون لدينا: $(x+1)^2+(y-2)^2=-3$
الطرف الأول للمساواة موجب بينما طرفها الثاني سالب و بالتالي لا توجد نقط $M(x,y)$ إحداثياها تحقق هذه المساواة.
المجموعة (Γ) هي إذن مجموعة خالية.

ملاحظة: لكل دائرة معادلة من الشكل $x^2+y^2+ax+by+c=0$ لكن ليس كل معادلة من هذا الشكل معادلة لدائرة

حساب أطوال و أقياس زوايا

4. مبرهنة المتوسط



A و B نقطتان. I منتصف القطعة المستقيمة $[AB]$. M نقطة كيفية من المستوي.

لدينا: $MA^2+MB^2=\overrightarrow{MA}^2+\overrightarrow{MB}^2=\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)^2+\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)^2$

و منه: $MA^2+MB^2=2\overrightarrow{MI}^2+2\overrightarrow{MI}\cdot\left(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}\right)+\overrightarrow{IA}^2+\overrightarrow{IB}^2$

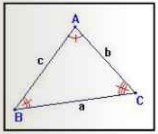
و بما أن: $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}$ و $IA=IB=\frac{1}{2}AB$ أي $\overrightarrow{IA}^2=\overrightarrow{IB}^2=\frac{1}{4}AB^2$

فإن: $MA^2+MB^2=2MI^2+\frac{1}{2}AB^2$

مبرهنة: A و B نقطتان و I منتصف القطعة المستقيمة $[AB]$. من أجل كل نقطة M لدينا:

$$MA^2+MB^2=2MI^2+\frac{1}{2}AB^2$$

5. العلاقات المترية في مثلث



ABC مثلث. نضع $AB=c$، $AC=b$، $BC=a$، $BAC=A$، $CBA=B$، و $ACB=C$ و لتكن S مساحة المثلث ABC.

❖ مبرهنة الكاشي

لدينا: $BC^2=\overrightarrow{BC}^2=\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)^2=\overrightarrow{AC}^2+\overrightarrow{AB}^2-2\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}$

و بما أن: $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}=AC\times AB\cos A$، $\overrightarrow{AC}^2=b^2$ و $\overrightarrow{AB}^2=c^2$ فإن: $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$

و بإتباع نفس الطريقة نثبت أن $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$ و $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$

مبرهنة: ABC مثلث حيث $AB=c$، $AC=b$ و $BC=a$. لدينا العلاقات التالية:

(1) $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$ (2) $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$ (3) $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$

❖ قاعدة المساحة (بالنسبة للبرهان أنظر التمرين رقم 105 الصفحة 306)

مبرهنة: ABC مثلث حيث $AB=c$، $AC=b$، $BC=a$ و S مساحة المثلث ABC. لدينا العلاقات التالية:

$$S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}ab\sin C$$

❖ قانون الجيوب(بالنسبة للبرهان أنظر التمرين رقم 105 الصفحة 306)

مبرهنة: ABC مثلث حيث $AB=c$، $AC=b$ و $BC=a$. لدينا العلاقات التالية:

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$$

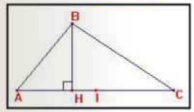
تمرين محلول9

ABC مثلث حيث: $AB=5$، $AC=8$ و $BC=7$.

1. عين (Γ) مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق: $MA^2+MC^2=38$
2. أحسب A و عين قيمة مقربة إلى 0.1 لكل من B و C.
3. أحسب المسافة BH حيث H هي المسقط العمودي للنقطة B على (AC)

حل:

1. لتكن النقطة I منتصف القطعة المستقيمة $[AC]$. بتطبيق مبرهنة المتوسط يكون لدينا:
$MA^2+MC^2=2MI^2+\frac{1}{2}AC^2$. إذن القول أن M نقطة من (Γ) يعني أن: $2MI^2+\frac{1}{2}AC^2=38$
أي $2MI^2+32=38$ أو $MI^2=3$. و بالتالي فإن (Γ) هي الدائرة التي مركزها النقطة I و نصف قطرها $\sqrt{3}$.
2. بتطبيق مبرهنة الكاشي في المثلث ABC يكون لدينا: $BC^2=AB^2+AC^2-2AB\times AC\cos A$
أي $49=64+25-2\times5\times8\times\cos A$ و منه $\cos A=\frac{1}{2}$. و بما أن $0<A<180^\circ$ فإن: $A=60^\circ$.
بتطبيق مبرهنة الكاشي و بعد الحساب نجد: $\cos B=\frac{1}{7}$ و باستعمال آلة حاسبة نقرأ: $B\approx81.2^\circ$.
نعلم أن $A+B+C=180^\circ$ و منه $C\approx38.8^\circ$.



3. لدينا من جهة $S=\frac{1}{2}AC\times BH$
و لدينا حسب قاعدة المساحة $S=\frac{1}{2}AB\times AC\sin A$
و منه $AH=AB\sin A$ إي $AH=5\times\frac{\sqrt{3}}{2}$ لأن $\sin60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$

تمرين محلول10

ABC مثلث حيث: $BC=8$، $B=50^\circ$ و $C=70^\circ$.

1. أحسب A.
2. أحسب AB و AC ثم عين مدور كل منهما إلى 10^{-2}.

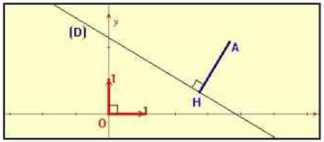
حل:

1. من $A+B+C=180^\circ$ نجد $A=60^\circ$.
2. بتطبيق قانون الجيوب في المثلث ABC يكون لدينا: $\frac{AB}{\sin C}=\frac{AC}{\sin B}=\frac{BC}{\sin A}$
و منه $AB=\frac{BC\sin C}{\sin A}=\frac{8\sin70^\circ}{\sin60^\circ}$ و $AC=\frac{BC\sin B}{\sin A}=\frac{8\sin50^\circ}{\sin60^\circ}$
نجد هكذا باستعمال آلة حاسبة أن مدور AB إلى 10^{-2} هو 8.68 بينما مدور AC إلى 10^{-2} هو 7.08.

المسافة بين نقطة و مستقيم

تعريف: المسافة بين نقطة A و مستقيم (D) هي المسافة AH بين A و النقطة H مسقطها العمودي على (D).

نعتبر في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;I,J)$ نقطة $A(x_0,y_0)$ و مستقيما (D) معادلته $ax+by+c=0$ حيث $(a,b)\neq(0,0)$.
لتكن النقطة H المسقط العمودي للنقطة A على (D) وليكن $\vec{n}$ الشعاع الناظمي للمستقيم (D) الذي إحداثيتاه هما (a,b).



الهدف: حساب المسافة AH بدلالة a، b، c، x_0 و y_0.

1. بين أن $|\vec{n}\cdot\vec{AH}|=\|\vec{n}\|\times AH$ ثم استنتج أن $|\vec{n}\cdot\vec{AH}|=\sqrt{a^2+b^2}\times AH$ (1)
2. علما أن النقطة H تنتمي إلى المستقيم (D) و بفرض أن إحداثيتيها هي (x,y) بين أن:
$|\vec{n}\cdot\vec{AH}|=|ax_0+by_0+c|$ (2)
3. استنتج من (1) و (2) أن: $AH=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

مبرهنة: في معلم متعامد و متجانس المسافة بين نقطة $A(x_0,y_0)$ و مستقيم (D) معادلته $ax+by+c=0$ هي:
$$\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

تطبيقات:

❖ أحسب المسافة بين النقطة $A(2,3)$ و المستقيم (D) ذو المعادلة: $y=2x+1$

❖ عين معادلة الدائرة (C) التي مركزها $\Omega(-2,1)$ و تمس المستقيم (D) ذو المعادلة: $x+y-2=0$

❖ لتكن (C') مجموعة النقط $M(x,y)$ و التي تحقق المعادلة: $x^2+y^2-2x-6y-3=0$

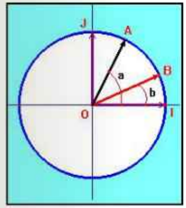
- بين أن (C') دائرة يطلب تعيين مركزها و نصف قطرها.
- هل المستقيم (D') ذو المعادلة $3x+2y+4=0$ مماس للدائرة (C') ؟

دساتير الجمع

1. **حساب** $\cos(a-b)$، $\cos(a+b)$، $\sin(a-b)$ و $\sin(a+b)$

$(O;I,J)$ معلم متعامد و متجانس للمستوي. نعتبر النقطتين A و B من الدائرة المثلثية التي مركزها النقطة O بحيث:

$$(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OA})=a \text{ و } (\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OB})=b$$



☒ عين إحداثيات الشعاعين $\overrightarrow{OA}$ و $\overrightarrow{OB}$ ثم باستعمال العبارة التحليلية للجداء السلمي أحسب: $\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OA}$

☒ لدينا حسب علاقة شال: $(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OA})=(\vec{i},\overrightarrow{OA})-(\vec{i},\overrightarrow{OB})$. بين، باستعمال التعريف المناسب للجداء السلمي، أن: $\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OA}=\cos(a-b)$

نستنتج مما سبق أن: $\cos(a-b)=\cos a\cos b+\sin a\sin b$ (1)

☒ باستبدال العدد b بـ $(-b)$ في النتيجة (1) بين أن:

$\cos(a+b)=\cos a\cos b-\sin a\sin b$ (2)

☒ علما أن $\sin x=\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$ و $\cos x=\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$ بين أن:

$\sin(a-b)=\sin a\cos b-\cos a\sin b$ (3) ثم استنتج أن: $\sin(a+b)=\sin a\cos b+\cos a\sin b$ (4)

أكتب النتائج السابقة على شكل مبرهنة

تطبيق: • تحق أن $\frac{\pi}{12}=\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}$ ثم أحسب القيم المضبوطة لـ $\cos\frac{\pi}{12}$ و $\sin\frac{\pi}{12}$

•استنتج القيم المضبوطة لـ $\cos\frac{5\pi}{12}$ و $\sin\frac{5\pi}{12}$

2. **عبارة** $\cos 2a$ و $\sin 2a$

☒ بين، باستعمال النتائج السابقة، أن: $\cos 2a=\cos^2 a-\sin^2 a$ و $\sin 2a=2\sin a\cos a$

☒ بين أن: $\cos 2a=2\cos^2 a-1=1-2\sin^2 a$

أكتب النتائج السابقة على شكل مبرهنة

تطبيق: •أحسب القيم المضبوطة لـ $\cos\frac{\pi}{8}$ و $\sin\frac{\pi}{8}$

•بين أن: $\cos^2 a=\frac{1+\cos 2a}{2}$ و $\sin^2 a=\frac{1-\cos 2a}{2}$

$(O;\vec{i};\vec{j})$ معلم متعامد و متجانس. (D) المستقيم الذي يشمل النقطة $B(1,1)$ و $\vec{n}(2,1)$ شعاع ناظمي له.

1. عين معادلة للمستقيم (D) ثم بين أنه إذا كانت $M(x,y)$ نقطة من (D) فإن إحداثياها تحقق: $x=-k+1$ و $y=2k+1$ حيث k عدد حقيقي كيفي.
2. عين القيمة الحدية الصغرى للدالة f المعرفة على بـ: $f(k)=5k^2-10k+10$
3. لتكن النقطة $A(2;4)$. أحسب AM^2 بدلالة k ثم استنتج المسافة بين النقطة A و المستقيم (D).

1. معادلة المستقيم (D) هي من الشكل: $2x+y+c=0$ لأن $\vec{n}(2,1)$ شعاع ناظمي له.

بما أن النقطة $B(1,1)$ تنتمي إلى (D) فإن إحداثييها تحقق معادلة (D) أي: $2(1)+1+c=0$ و منه: $c=-3$

نستنتج أن $2x+y-3=0$ هي معادلة للمستقيم (D).

القول أن النقطة $M(x,y)$ تنتمي إلى المستقيم (D) يعني أن الشعاعين $\overrightarrow{BM}$ و $\vec{u}$ مرتبطان خطيا حيث $\vec{u}$ شعاع توجيه للمستقيم (D). نأخذ مثلا $\vec{u}(-1,2)$.

$\overrightarrow{BM}$ و $\vec{u}$ مرتبطان خطيا يعني أنه يوجد عدد حقيقي k بحيث: $\overrightarrow{BM}=k\vec{u}$ أي $\begin{cases}x-1=-k\\y-1=2k\end{cases}$

نجد هكذا أن إحداثيات النقطة $M(x,y)$ تحقق $\begin{cases}x=-k+1\\y=2k+1\end{cases}$

2. لدينا: $f(k)=5k^2-10k+10$ و منه: $f'(k)=10(k-1)$

لدينا:

k	$-\infty$		1		$+\infty$
إشارة $f'(k)$		$-$	0	$+$	

بما أن f' تنعدم مغيرة إشارتها عند القيمة 1 فإن الدالة f تقبل قيمة حدية صغرى عند 1 هي $f(1)$

لدينا: $f(1)=5(1)^2-10(1)+10=5$. إذن القيمة الحدية الصغرى للدالة f على هي 5.

3. لدينا: $AM^2=(x-2)^2+(y-4)^2$

و منه بعد تعويض x بـ $-k+1$ و تعويض y بـ $2k+1$

يكون لدينا: $AM^2=(-k-1)^2+(2k-3)^2$ أي $AM^2=5k^2-10k+10$

المسافة بين نقطة و مستقيم هي أصغر مسافة بين هذه النقطة و نقطة كيفية من هذا المستقيم

نلاحظ أن $AM^2=f(k)$ و منه أصغر قيمة تأخذها AM^2 هي 5

نستنتج هكذا أن المسافة بين النقطة A و المستقيم (D) هي: $\sqrt{5}$.

ABC مثلث. نضع $AB=c$، $AC=b$، $BC=a$، $BAC=A$، $CBA=B$، $ACB=C$.

نرمز بالرمز S إلى مساحة المثلث ABC و بالرمز p إلى نصف محيطه.

1. بين أن $1+\cos A=\frac{2p(p-a)}{bc}$ و أن $1-\cos A=\frac{2(p-b)(p-c)}{bc}$
2. استنتج $\sin A$ بدلالة p، a، b و c ثم بين أن: $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$
3. نفرض: $a=15\,cm$، $b=9\,cm$ و $c=11\,cm$
   - أحسب بـ cm^2 المساحة S ثم عين قيمة مقربة لها إلى 0.01
   - عين قيمة مقربة لـ A إلى 0.01

1. لدينا بتطبيق مبرهنة الكاشي: $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$ و منه $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$

و بالتالي:
$$\begin{cases}1+\cos A=\dfrac{2bc+b^2+c^2-a^2}{2bc}=\dfrac{(b+c)^2-a^2}{2bc}\\[2mm] 1-\cos A=\dfrac{2bc-b^2-c^2+a^2}{2bc}=\dfrac{a^2-(b-c)^2}{2bc}\end{cases}$$

لدينا $p=\frac{1}{2}(a+b+c)$ و منه:
$$\begin{cases}p(p-a)=\frac{1}{4}(a+b+c)(-a+b+c)=\frac{1}{4}\left[(b+c)^2-a^2\right]\\[2mm] (p-b)(p-c)=\frac{1}{4}\left[a-(b-c)\right]\left[a+(b-c)\right]=\frac{1}{4}\left[a^2-(b-c)^2\right]\end{cases}$$

نجد بعد التعويض: $1+\cos A=\frac{2p(p-a)}{bc}$ و $1-\cos A=\frac{2(p-b)(p-c)}{bc}$

2. نعلم أن $\cos^2 A+\sin^2 A=1$ و منه $\sin^2 A=1-\cos^2 A=(1-\cos A)(1+\cos A)$

نجد هكذا $\sin^2 A=\frac{4p(p-a)(p-b)(p-c)}{b^2c^2}$

نعلم أن $S=\frac{1}{2}bc\sin A$ و منه $S^2=\frac{1}{4}b^2c^2\sin^2 A$ أي $S^2=p(p-a)(p-b)(p-c)$

و بما أن الأعداد p، $p-a$، $p-b$ و $p-c$ موجبة فإن $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

تسمى النتيجة السابقة " قاعدة هيرون – Héron –

3. • لدينا: $p=\frac{35}{2}$ و منه بتطبيق قاعدة هيرون يكون لدينا: $S=\sqrt{\frac{35\times5\times17\times13}{16}}=\frac{\sqrt{38675}}{4}cm^2$

نجد هكذا: $S\approx 49,16cm^2$

• نعلم حسب مبرهنة الكاشي أن $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$ و منه $\cos A=-\frac{23}{198}$

باستعمال آلة حاسبة نجد: $A\approx 96,67°$

تعيين مجموعات نقط

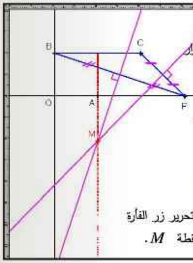
نعتبر في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس (O,A,B) النقطة $C(2;1)$ و لتكن P نقطة متغيرة على محور الفواصل (O,A).

الهدف هو:

1. تعيين (E_1) المحل الهندسي للنقطة M مركزالدائرة المحيطة بالمثلث PBC لما تمسح P المحور (O,A)
2. تعيين (E_2) المحل الهندسي للنقطة H نقطة تقاطع ارتفاعات المثلث PBC لما تمسح P المحور (O,A)

1. تعيين المجموعة (E_1)

❖ التخمين باستعمال برمجية هندسية ديناميكية:



خطوات الانجاز باستعمال برمجية ديكليك $(Declic)$

أنشئ في البداية المعلم المتعامد و المتجانس (O,A,B) باستعمال الأزرار ثم أنشئ النقطة C باختيار التعليمة $point(x,y)$ ضمن فئة créer الموجودة في القائمة العلوية للبرمجية.

أنشئ بواسطة الزر نقطة P متحركة على المحور (O,A).

أنشئ النقطة M تقاطع محورين باستعمال الزر مرتين و الزر .

ثم في القائمة العلوية للبرمجية ضمن فئة Divers أنقر بالفأرة على التعليمة Lieu de points و أنقر على النقطة P و اسحب نحو النقطة M دون تحرير زر الفأرة

بعد ذلك قم بتحريك النقطة P على المحور (O,A) و لاحظ ماذا ترسم النقطة M.

❖ برهان التخمين:

- إذا رمزنا بـ a إلى فاصلة النقطة P عين معادلة لمحور $[BC]$ و معادلة لمحور $[BP]$ بدلالة a.
- عين، بدلالة a، (x,y) إحداثيي النقطة M. بين أنه من أجل كل عدد حقيقي a لدينا: $y-1\le 0$.

2. تعيين المجموعة (E_2)

❖ التخمين:

- بعد إنشاء المعلم المتعامد و المتجانس (O,A,B) أنشئ النقط C، P و H باستعمال الأزرة المناسبة.
- بإتباع نفس الخطوات السابقة قم بتحريك النقطة P على المحور (O,A) و لاحظ ماذا ترسم النقطة H.
- بتخمين عين بيانيا طبيعة المجموعة (E_2).

❖ برهان التخمين:

- ماذا تلاحظ بالنسبة لفاصلتي النقطتين P و H ؟
- إذا رمزنا بـ a إلى فاصلة النقطة P عين معادلة لارتفاع المثلث PBC المتعلق بالضلع $[PC]$.
- عين ترتيب النقطة H بدلالة a.

تعيين مجموعة نقط

(C) دائرة مركزها O و نصف قطرها R. A نقطة ثابتة داخل الدائرة (C) و P نقطة متغيرة على الدائرة (C).
المستقيم العمودي على (AP) في النقطة A يقطع الدائرة (C) في نقطة Q. نسمي M منتصف القطعة $[PQ]$.

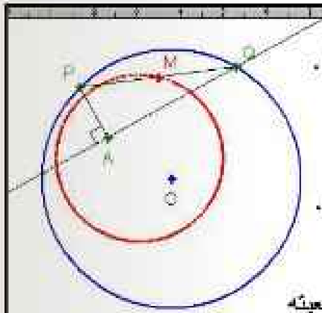
الهدف هو:

تعيين (E) المحل الهندسي للنقطة M منتصف $[PQ]$ لما تمسح النقطة P الدائرة (C).

تعيين المجموعة (E)

❖ **التخمين باستعمال برمجية هندسية ديناميكية:**

خطوات الانجاز باستعمال برمجية ديكليك $(Declic)$



باستعمال الأزرة المناسبة أنشئ كلا من الدائرة (C) و النقط A، P، Q و M.
في القائمة العلوية للبرمجية ضمن فئة Divers أنقر بالفأرة على التعليمة Lieu de points و أنقر على النقطة P و اسحب نحو النقطة M دون تحرير زر الفأرة، بعد ذلك قم بتحريك النقطة P على (C) و لاحظ ماذا ترسم النقطة M.
يظهر جليا أن المحل الهندسي للنقطة M منتصف $[PQ]$ لما تمسح النقطة P الدائرة (C) هي دائرة (C'). إلا أن مركز الدائرة (C') غير معلوم.لتخمين وضعيته نعتبر ثلاث نقط من الدائرة (C') ثم ننشئ محوري قطعتين مستقيمتين. نقطة تقاطعهما O' هي مركز الدائرة (C').
ما هو تخمينك بالنسبة لوضعية المركز O' ؟

❖ **برهان التخمين** (يرتكز البرهان أساسا على مبرهنة المتوسط)

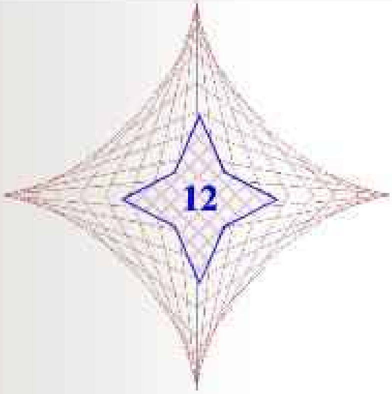
1. أثبت أن المثلث OMP قائم في M و أن $MA = MP$ ثم بين أن $MA^2 + MO^2 = R^2$. استنتج أن:

$$O'M = r \quad \text{حيث} \quad r^2 = \frac{2R^2 - OA^2}{4} \quad (r > 0).$$

2. دراسة المسألة العكسية:

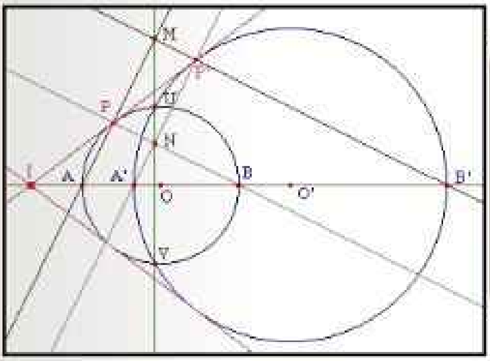
نعتبر نقطة M تحقق $O'M = r$ مع $r^2 = \frac{2R^2 - OA^2}{4}$

- بين أن $MA^2 + MO^2 = R^2$ ثم استنتج أن النقطة M تقع داخل الدائرة (C).
- المستقيم العمودي على (OM) يقطع الدائرة (C) في نقطتين P و Q. بين أن M منتصف $[PQ]$ و أن المثلث APQ قائم في النقطة A. استنتج أن النقطة M تنتمي إلى الدائرة (C').

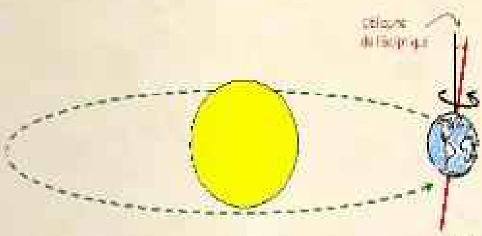


التحويلات النقطية في المستوي
التحاكي

الكفاءات المستهدفة



- استعمال خواص التحاكي لإثبات استقامية نقط.
- توظيف التحويلات النقطية في حل مسائل هندسية.
- تعيين محل هندسي.
- حل مسائل حول الإنشاءات الهندسية.

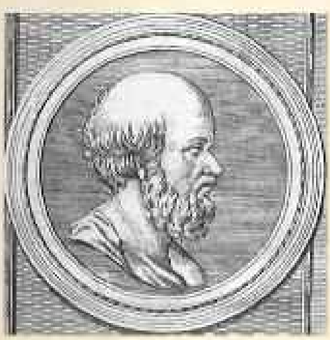


ولد ايراتوستان (*Eratosthene*) بمدينة (*Cyrène*) حاليا بليبيا حوالي 276 قبل الميلاد. انتقل إلى أثينا و فيها درس الرياضيات، علم الفلك، الجغرافيا و الشعر ثم انتقل إلى الإسكندرية ليتولى تسيير مكتبتها بعد وفاة " كاليماك " و ذلك حوالي 240 قبل الميلاد.

من أهم مؤلفاته في الرياضيات نذكر "*Platonicus*" الذي قدم فيه تعاريف في الهندسة و الحساب. و قد اشتهر بطريقته التي تسمح بالحصول على الأعداد الأولية بإقصاء تدريجيا مضاعفات الأعداد الأولية الأولى. (*Crible d 'Eratosthene*).

في علم الفلك تمكن من حساب الزاوية بين محور الكرة الأرضية ومحور دورانها حول الشمس بدقة كبيرة.

أما في الجغرافيا فقد وضع خريطة للعالم و تمكن من حساب محيط للكرة الأرضية حوالي 205 قبل الميلاد.وقد توفي بالأسكندرية حوالي 194 قبل الميلاد.



Erathosthène de Cyrène
Grec (-276 ; -194)

1- تعريف

O نقطة من المستوي ، k عدد حقيقي غير معدوم

نسمي تحاكيا h مركزه O و نسبته k ، و نرمز له بالرمز $h(O,k)$ ، التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة M من المستوي النقطة M' من المستوي حيث $\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}$

النقطة M' هي صورة M بالتحاكي : $M' = h(M)$ أو $M \xrightarrow{h} M'$

نتائج :
- النقط O , M , M' على استقامة واحدة و $OM' = |k|.OM$
- صورة النقطة O هي النقطة نفسها (O نقطة صامدة)

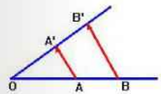
2- الخاصّة المميّزة

مبرهنة ①

h تحاكي مركزه O و نسبته k ، A و B نقطتان. A' و B' صورتاهما على الترتيب بالتحاكي h .

لدينا : $\overrightarrow{A'B'} = k\overrightarrow{AB}$

البرهان :



$h(A) = A'$ و $h(B) = B'$

أي $\overrightarrow{OA'} = k\overrightarrow{OA}$ و $\overrightarrow{OB'} = k\overrightarrow{OB}$ ....(1)

لكن : $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{OB'} - \overrightarrow{OA'}$

(1) معناه $\overrightarrow{A'B'} = k(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA})$

أي $\overrightarrow{A'B'} = k\overrightarrow{AB}$

نتائج :

❶ بما أن $k \neq 0$ فإنه إذا كانت A تختلف عن B فإن A' تختلف عن B' و بالتالي (AB) يوازي $(A'B')$

❷ من أجل كل نقطتين A و B يكون $A'B' = |k|\, AB$

❸ إذا كان G مرجح الجملة $\{ (A , \alpha) , (B , \beta) \}$ فإن صورته بالتحاكي هي G' مرجح الجملة $\{ (A' , \alpha) , (B' , \beta) \}$.

- برهان النتيجة ❸ :

$\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} = \vec{0}$ لكن $\overrightarrow{G'A'} = k\overrightarrow{GA}$ و $\overrightarrow{G'B'} = k\overrightarrow{GB}$

و منه : $\alpha\overrightarrow{G'A'} + \beta\overrightarrow{G'B'} = k(\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB}) = \vec{0}$

(نقول أن التحاكي يحافظ على المرجح لجملة)

تمرين محلول 1

I ، N ، N′ نقط من المستوي حيث N′ صورة N بالتحاكي h(I , −2) .

1- أكتب العلاقة الشعاعية .

2- A مرجح الجملة (B , −k) و (C , 1) حيث k عدد حقيقي غير معدوم يختلف عن 1

① تحقق أن C صورة B بتحاك يطلب تعيين عناصره المميّزة (المركز و النسبة)

② بيّن أن B صورة C بتحاك يطلب تحديد عناصره .

حل:

1- العلاقة الشعاعية هي : $\overrightarrow{IN'} = -2\,\overrightarrow{IN}$

المركز الصورة النسبة المركز النقطة

لماذا يوجد بالضرورة تحاك k مركزه A يحول B إلى C عندما تكون النقط A,B,C على استقامة واحدة؟

لأن : استقامية النقط تعني وجود k وحيد غير معدوم يحقق $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$ (k وحيد ، h وحيد)

2- ① A مرجح الجملة $(C , 1)$ و $(B , -k)$ يعني $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$

ليكن h التحاكي الذي مركزه A و نسبته k . نضع $B' = h(B)$ أي $\overrightarrow{AB'} = k\overrightarrow{AB}$ و منه $B' = C$

نستنتج أن C صورة B بالتحاكي h الذي نسبته h و مركزه A (استنتج حلا للسؤال ②)

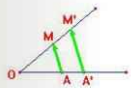
تمرين محلول 2

O ، A ، A′ ثلاث نقط على استقامة واحدة . h التحاكي الذي مركزه O و يحوّل A الى A′ .

أنشئ M′ صورة النقطة M بالتحاكي h في كل حالة من الحالتين :

1- M لا تنتمي الى المستقيم (OA) 2- M نقطة من (OA) تختلف عن O و عن A .

حل:



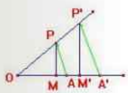
1- $M' = h(M)$ و منه M' نقطة من (OM)

لكن $\overrightarrow{A'M'} = k\overrightarrow{AM}$ (حسب الخاصية المميزة)

و حسب النتيجة (1) من المبرهنة (1) يكون الشعاعان $\overrightarrow{AM}$ و $\overrightarrow{A'M'}$ متوازيين

و منه M' نقطة من (AM) المستقيم الموازي لـــ (AM) و المرسوم من A' .

2- M نقطة من (OA) للحصول على M'



نعتبر نقطة P لا تنتمي الى المستقيم (OA) ننشئ P' صورة P بالتحاكي (P' نقطة تقاطع (OP) مع الموازي لـ (AP) المرسوم من A')

ثم نرسم الموازي لـ (PM) من النقطة P' نحصل على النقطة M' تنتمي الى (OA)

1- صورة مستقيم بواسطة تحاكي :

مبرهنة ②

صورة مستقيم (d) بتحاك هي مستقيم (d') يوازي (d)

تذكير

مستقيم (CD) هو مجموعة النقط M مرجحات ($C , 1-\alpha$) و (D , α)
لما تأخذ α كل القيم على $\mathbb{R}$ مجموعة الأعداد الحقيقية .

برهان ② : نختار نقطتين A و B على المستقيم (d) بحيث A تختلف عن B .
لتكن A' و B' صورتيهما على الترتيب بالتحاكي h . نعلم أن $(A'B')$ يوازي (AB)
* (d) هي مجموعة النقط ($A , 1-\alpha$) و (B , α) لما تمسح α مجموعة الأعداد الحقيقية
لكن التحاكي يحافظ على المرجح و منه $h(M) = M'$ هو مرجح لجملة ($A', 1-\alpha$) و (B', α)
و منه (d') صورة (d) هي مجموعة النقط M' لما تمسح α المجموعة $\mathbb{R}$ فهي المستقيم $(A'B')$
* عندما يكون مركز التحاكي نقطة من (d) فإن (d') هو المستقيم الموازي لـ (d) و الذي يشمل المركز (المركز صامد) و بالتالي (d') هو (d) .

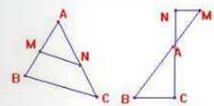
مبرهنة ③ : صورة قطعة مستقيمة [A B] هي قطعة مستقيمة [A' B'] ($\overline{AB} // \overline{A'B'}$)

البرهان ③ : مما سبق [AB] هي مجموعة مرجحات ($A , 1-\alpha$) و (B , α) لما تمسح α كل قيم المجال [0 , 1] و بالتالي [$A'B'$] هي مجموعة مرجحات ($A' , 1-\alpha$) و (B' , α)) لما تمسح α كل قيم المجال [0 , 1]   ($AB // A'B'$)

2- المثلثات المتحاكية :

ABC و AMN مثلثان . M نقطة من (AB)
و N نقطة من (AC) حيث (MN) يوازي (BC)
التحاكي h الذي مركزه A و يحول B الى M يحول كذلك C الى N

التحاكي h الذي يحوّل B إلى M يحوّل (BC) إلى المستقيم الذي يشمل M و يوازي (BC) .
و منه فإن صورة C هي نقطة من هذا المستقيم و هي نقطة من (AC) فهي إذن N .

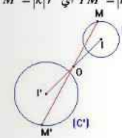


3- صورة دائرة :

مبرهنة ④

صورة دائرة (C) مركزها I و نصف قطرها r بواسطة تحاكي h نسبته k هي دائرة (C') مركزها $I' = h(I)$ و نصف قطرها $r' = |k| r$.

برهان : لتكن M نقطة من (C) فإن $IM = r$ و لتكن $h(M) = M'$ لدينا $I'M' = |k| IM$ أي $I'M' = |k| r$
و منه M' هي نقطة من (C') التي مركزها I' و نصف قطرها $|k| r$.
و بالعكس : لتكن N' نقطة من (C') .
هل توجد نقطة من (C) حيث $h(N) = N'$ ؟
لتكن N النقطة التي تحقق $\overline{I'N'} = k\overline{IN}$ أي $h(N) = N'$
واضح أن N تنتمي إلى (C) لأن $I'N' = |k| IN$ أي $IN = r$

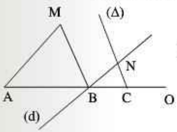


تمرين محلول 1

B هو منتصف القطعة [AO] و C منتصف [BO] ، M نقطة لا تنتمي إلى (AB) .
نرسم من B المستقيم (d) الموازي للمستقيم (AM) و من C المستقيم (Δ) الموازي لـ (BM)
لتكن N نقطة تقاطع (d) مع (Δ)
– بين لماذا تكون النقطة N صورة النقطة M بالتحاكي h الذي مركزه O و نسبته $\frac{1}{2}$

حل:

B هو منتصف القطعة [AO] و C منتصف [BO] أي $h(B) = C , h(A) = B$
لأن $\overline{OB} = \frac{1}{2}\overline{OA}$ و $\overline{OC} = \frac{1}{2}\overline{OB}$
و منه صورة (AM) هو المستقيم (d) و كذلك صورة (BM) هو (Δ)
ملاحظة : ومنه $\overline{ON} = \frac{1}{2}\overline{OM}$. M نقطة تقاطع (AM) و(BM) وN نقطة تقاطع(d) و(Δ)

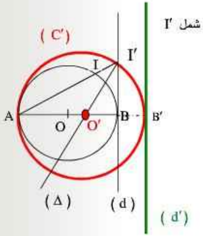


تمرين محلول 2

نعتبر الشكل التالي :
(C) دائرة مركزها O و [AB] قطر لها   (d) مماس للدائرة (C) في النقطة B
I نقطة من (C) تختلف عن A و B   I' نقطة تقاطع المستقيمين (AI) و (d)
نعتبر التحاكي h الذي مركزه A و يحول I الى I'
1- أنشئ O' صورة O بواسطة h .
2- أرسم الدائرة (C') صورة (C) و كذلك المستقيم (d') صورة (d) بواسطة h

حل:

1- صورة المستقيم (OI) بواسطة h هو مستقيم (Δ) يوازي (OI) و شمل I'
لأن I' هي صورة I و بالتالي صورة O هي O' تقع على (Δ)
و من جهة أخرى O' صورة O تقع على المستقيم (AO)
[استقامية النقط A ، O و O']
و منه O' هي نقطة تقاطع (Δ) و (AO)
2- بمعرفة المركز O' يمكن إنشاء (C')
A نقطة صامدة كمركز للتحاكي فهي نقطة من (C) و من (C')
B' نظيرة A بالنسبة لـ O' (d') مماس (C') في B'



خواص التحاكي :

1. الأطوال و المساحات :

التحاكي الذي نسبته العدد الحقيقي k يضاعف الأطوال $|k|$ مرّة و يضاعف المساحات k^2 مرّة

ملاحظة :

عندما يكون $|k| > 1$ يقوم التحاكي بتكبير الأشكال و عندما يكون $1 > k > 0$ فإن الشكل يصغر $|k|$ مرّة بالتحاكي

مثال : نعتبر الدائرة (C) التي نصف قطرها 3 و التحاكي h الذي نسبته $\frac{1}{2}$.

– محيط الدائرة (C) هو 6π بينما مساحتها فهي 9π

لتكن الدائرة (C') صورة (C) بواسطة التحاكي h . نعلم أن نصف قطر (C') هو $\frac{1}{2}\times 3=\frac{3}{2}$

و بالتالي فإن محيط الدائرة (C') هو 3π و مساحتها $\frac{9}{4}\pi^2$

2. الحفاظ على استقامية النقط :

إذا كانت A ، B و C ثلاث نقط على استقامة واحدة و كانت A' ، B' و C' صورها على الترتيب بواسطة تحاك h فإن A' ، B' و C' تكون على استقامة واحدة أيضا.

بالفعل ، لأن صورة المستقيم الذي يشمل A ، B و C هو مستقيم يشمل A' ، B' و C'

3. الحفاظ على التوازي :

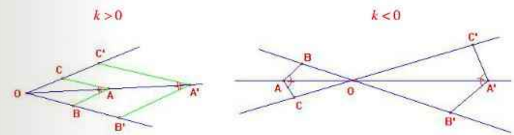
إذا كان المستقيمان (d) و (Δ) متوازيين فإن صورتيهما بواسطة تحاك h هما مستقيمان (d') و (Δ') متوازيان

بالفعل ، (d) يوازي (d') و (Δ) يوازي (Δ') و بالتالي (d') يوازي (Δ')

4. الحفاظ على الزوايا الموجّهة :

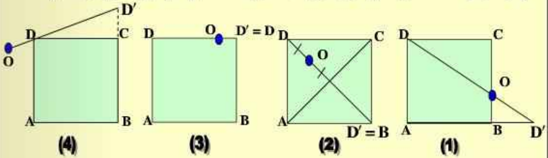
في المستوي الموجه نعتبر النقط A ، B و C صورها بتحاك h هي A' ، B' و C' على الترتيب

لدينا $(\overrightarrow{A'B'},\overrightarrow{A'C'})=(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$ و $BAC=B'A'C'$



تمرين محلول 1

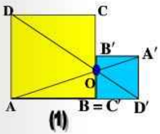
في كل حال من الحالات التالية أنشئ صورة المربع ABCD بواسطة التحاكي الذي مركزه O و يحول D الى D'



حل:

الشكل الأول : لإنشاء المربع يكفي إيجاد صورة النقط A ، D و C مثلا (3 نقط) لأننا نعلم أن صورة مربع بتحاك هو مربع (الحفاظ على الشكل و على التعامد)

* صورة النقطة C هي النقطة C' التي تقع على المستقيم (CO) ، صورة المستقيم (DC) هو مستقيم ($D'C'$) يوازي (DC) و يشمل D' فهو المستقيم (AD') و بالتالي C' تقع على (AD') فهي إذن نقطة تقاطع (CO) و (AD') و D' هي B .
* بالمثل A' صورة A هي نقطة تقاطع المستقيم (AO) مع المستقيم الموازي لـ (AD) و المرسوم من D'
* صورة D هي D' (معطاة) يمكن إنشاء المربع $A'B'C'D'$



" نترك بقية الأشكال للقارئ "

تمرين محلول 2

ABC مثلث مركز ثقله G ، A' ، B' و C' منتصفات القطع [BC] ، [AC] و [AB] على الترتيب

H التحاكي الذي مركزه G حيث $h(A)=A'$ ، $h(B)=B'$ و $h(C)=C'$. نضع $h(A')=M$ و $h(B')=N$ و $h(C')=P$

– قارن بين s و S مساحتي المثلثين MNP و ABC .

حل: نسبة التحاكي الذي مركزه G و يحوّل A الى A' هي $\left(-\frac{1}{2}\right)$ لأن ($\overrightarrow{GA'}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{GA}$)

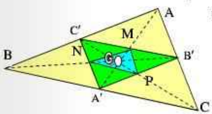
لدينا $h(B)=B'$ و $h(C)=C'$ و منه صورة المثلث ABC هو المثلث $A'B'C'$

لدينا (حسب المعطيات) صورة المثلث $A'B'C'$ هو المثلث MNP

(لأن M ، N و P هي منتصفات أضلاع المثلث $A'B'C'$)

نرمز لمساحة المثلث $A'B'C'$ بالرمز S'

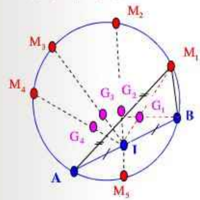
لدينا إذن $S=4S'$ و $S'=4s$ و بالتالي $S=16s$



تعيين محل هندسي

(C) دائرة مركزها O . A ، B نقطتان من (C) ، M نقطة متغيرة على الدائرة (C) تختلف عن A و B
(أي أن M تأخذ كل الوضعيات على (C) عدا A و B) .
I منتصف [AB] ، G مركز ثقل المثلث ABM (أي أن G مرجح (A , 1) ، (B , 1) ، (M , 1))
الهدف : تعيين المحل الهندسي (L) للنقطة G لما تمسح M الدائرة (C) عدا النقطتين A و B .
بعبارة أخرى : تعيين مجموعة النقط G (باعتبار أن G تتغير بتغير M)

❶ **التخمين** : العناصر الثابتة هي : الدائرة (C) ذات المركز O . النقطتان A و B و المنتصف I .
نختار عدة وضعيات للنقطة M و نحدّد وضعيات G المناسبة لها نحصل على النقط $G_5;G_4;G_3;G_2;G_1$
ليست على استقامة واحدة .
تبدو النقط على دائرة (C') أو جزء منها



❷ إثبات التخمين :
نبحث عن العلاقة بين G و M و النقط الثابتة .
النقط I ، G ، M على استقامة واحدة
1- أثبت أن G صورة M بتحاك h مركزه I يُطلب تحديد نسبته k .
2- تعيين المحل الهندسي (L) للنقطة G
هو تعيين صورة (C) عدا A و B بالتحاكي h .
3- عين عندئذ (L) ، حدد النقطة h (O) ثم أنشئ (L)

تعليق: توظيف تحويل نقطي في تعيين مجموعة نقط (محل هندسي) هو طريقة مختصرة إذ يستغنى في هذه الطريقة عن دراسة الحالة العكسية .

في حالة عدم توظيف التحاكي :
نعتبر E مجموعة النقط G حيث G مركز ثقل المثلث MAB و M نقطة من (C) تختلف عن A و B .
1) نثبت أن E غير خالية .
2) نثبت أن E جزء من (L).
3) نثبت أن (L) جزء من E (و بالتالي $E=(L)$).

إنشاء هندسي

ABC مثلث زواياه حادة .

الهدف :

إنشاء مربع $IJKL$ داخل المثلث حيث I و J هما نقطتان من $[BC]$ ، K نقطة من $[AC]$ و L نقطة من $[AB]$

❶ التحليل :

نفرض أن المربع أنجز ، نلاحظ مثلثات متحاكية ، عندئذ استعمال التحاكي ممكن .

نرمز بالرمز h للتحاكي الذي مركزه A و الذي يحوّل L الى B .

- ماهي صورة K ؟ ماهما صورتا I و J ؟
- استنتج $BEDC$ صورة المربع $LIJK$ بواسطة h .

❷ التركيب :

نعتبر المثلث ABC

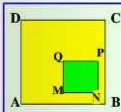
أنشئ المربع $BEDC$ حيث أن النقطتين A و D تقعان في جهتين مختلفتين من المستوي بالنسبة للمستقيم (BC)

المستقيم (AE) يقطع [BC] في النقطة I و المستقيم (AD) يقطع [BC] في النقطة J

العمود في I على (BC) يقطع (AB) في النقطة L و العمود في J على (BC) يقطع (AC) في النقطة K

- تحقق أن المربع $IJKL$ حل للمسألة .
- ما عدد الحلول ؟

① في الشكل المقابل ABCD و MNPQ مربعان أضلاعهما متوازيان مثنى مثنى .



الهدف : إثبات أن المستقيمات (AM) ، (BN) ، (CP) و (DQ) تتقاطع في نقطة واحدة .

② ABCD رباعي محدب ، يتقاطع قطراه [AC] و [BD] في نقطة O

المستقيم الموازي لـ (DC) المرسوم من O يقطع [AD] في النقطة I

المستقيم الموازي لـ (BC) المرسوم من O يقطع [AB] في النقطة J

الهدف : إثبات أن المستقيمين (IJ) و (BD) متوازيان

③ (C) و (C') دائرتان مركزاهما O ، O' على الترتيب و نصفي قطريهما r ، r' على الترتيب ($r \neq r'$) متماستان خارجيا في النقطة I . A نقطة داخل (C) .(d) مستقيم يمر من A و يقطع (C) في نقطتين M و N .
المستقيم (MI) يقطع (C') في M' و المستقيم (IN) يقطع (C') في N' .

الهدف : إثبات أن المستقيم ($M'N'$) يمر من نقطة ثابتة عندما يتغير المستقيم (d) حول النقطة A

الحل : ① المربع MNPQ هو تصغير للمربع ABCD و بالتالي فهما متحاكيان .

لإثبات أن أربعة مستقيمات تتقاطع في نقطة واحدة يجب إثبات أن مستقيمين منهما يمران بنقطة تقاطع المستقيمين الآخرين

* لتكن O نقطة تقاطع (AM) و (DQ)

* ODA و OQM مثلثان متحاكيان ، ليكن h التحاكي الذي مركزه O و الذي يحوّل A الى M .

لإثبات أن (PC) يمر من O يكفي إثبات أن h (C) = P

لتكن C' صورة C بواسطة h ، C' تنتمي الى الموازي لـ (DC) المرسوم من Q من جهة و من جهة أخرى C' تنتمي إلى (OC) .إذن C' نقطة تقاطع (OC) مع (QP) و منه C' هي النقطة P

لأن $\frac{QC'}{DC} = \frac{QM}{AD}$ أي $QM = QC'$. و بنفس الطريقة نثبت أن (BN) يشمل O .

ملاحظة : يمكن أن نثبت التقاطع تحليليا بأخذ معلم متعامد و متجانس ($A , \overline{AB}, \overline{AD}$) و أخذ $M(a, b)$ ثم كتابة معادلات المستقيمات و إثبات أن الجملة تقبل حلا وحيدا .

② نريد إثبات أن مستقيمين متوازيين ، يكفي إذن أن نثبت أن أحدهما صورة للآخر بتحاك h .

نستعمل مثلا التحاكي h الذي مركزه A و يحوّل O إلى C . لدينا h(I) = D (لأن (IO) يوازي (DC)) من جهة و من جهة أخرى لدينا h(J) = B (لأن (JO) يوازي (BC)) و بالتالي فإن (BD) صورة (IJ) بالتحاكي h و منه (BD) يوازي (IJ)

③ يبدو من الشكل أن المثلثين IMN و $IM'N'$ متحاكيان رأساهما I . هل المستقيم ($M'N'$) هو صورة (MN) بتحاك h مركزه I ؟ نفرض أن هذا صحيح ، ما هي عندئذ النتائج المترتبة على ذلك ؟

وضعية النقطة الثابتة المطلوبة تابعة لوضعية A . نعلم أن A تنتمي الى (MN) إذن ($M'N'$) $\in A'$ = h(A) A' النقطة المطلوبة . ماهو التحاكي h الذي مركزه I و يحوّل (MN) الى ($M'N'$) ؟

N ، M نقطتان من (C)، N' ، M' نقطتان من (C') ، يبدو أن h هو التحاكي الذي مركزه I و يحوّل (C) إلى (C')

* نسبة هذا التحاكي هي $-\frac{r'}{r}$ ؛ h(M) = M' حيث $\overrightarrow{IM'} = -\frac{r'}{r}\overrightarrow{IM}$ و h(N) = N' حيث $\overrightarrow{IN'} = -\frac{r'}{r}\overrightarrow{IN}$

* نضع h(A) = A' نعلم أن A' تنتمي إلى ($M'N'$) صورة (MN) لأن A تنتمي إلى (MN)
A' ثابتة لأن A ثابتة .

في معلم متعامد و متجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$ نعتبر الدائرتين (C) و (C') اللتين معادلتيهما الديكارتيتين هما على الترتيب $x^2+y^2-8x-4y+16=0$ و $x^2+y^2-14x+2y+41=0$

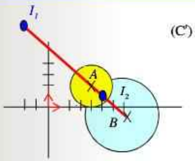
1- عين A و B مركزيهما على الترتيب ثم حدد كل من r و r' نصفي قطريهما على الترتيب .

2- أنشئ (C) و (C') في المعلم $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

3- نفرض وجود تحاك h يحوّل (C) الى (C') ، أثبت أن نسبته k تأخذ قيمتين ممكنتين $\frac{3}{2}$ و $-\frac{3}{2}$

4- واضح من السؤال-3- أن هناك تحاكيين h_1 و h_2 يحولان (C) الى (C') نعتبر I_1 و I_2 مركزيهما على الترتيب
تحقق أن I_1 مرجح (A , -3) و (B , 2) و أن I_2 مرجح (A , 3) و (B , 2) ثم علّم I_1 و I_2 على الشكل

5- تحقق تحليليا أن (C') صورة (C) بكل من h_1 و h_2 .



الحل : ① يمكن كتابة معادلتي الدائرتين على الشكل :

$$(C):(x-4)^2+(y-2)^2=4 \quad \text{و} \quad (C'):(x-7)^2+(y+1)^2=9$$

و منه A(4 , 2) ، B(7 , -1) و r = 2 و $r' = 3$

③ ليكن h تحاك يحول (C) الى (C') إذن h يحوّل A الى B

و لدينا $r' = |k|.r$ أي $|k| = \frac{3}{2}$ هناك قيمتان للعدد k هما $\frac{3}{2}$ و $(-\frac{3}{2})$

④ هناك تحاكيان نسبة الأول h_1 هي $\frac{3}{2}$ و نسبة الثاني h_2 هي $(-\frac{3}{2})$

ليكن I_1 مركز h_1 و I_2 مركز h_2 لدينا: $h_1(A) = B$, $h_2(A) = B$ اي أن $\overrightarrow{I_1B} = \frac{3}{2}\overrightarrow{I_1A}$ و $\overrightarrow{I_2B} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{I_2A}$

يعني : $2\overrightarrow{I_1B} - 3\overrightarrow{I_1A} = \vec{0}$ و $2\overrightarrow{I_2B} + 3\overrightarrow{I_2A} = \vec{0}$ و هاتان العلاقتان توضحان أن I_1 مرجح (A , -3) و (B , 2) و أن I_2 مرجح (A , 3) و (B , 2) .

تعليم I_1 و I_2 بتبسيط العلاقتين :

$2\overrightarrow{I_2B} = -3\overrightarrow{I_2A}$ أي $5\overrightarrow{I_2B} = -3\overrightarrow{BA}$ يعني $\overrightarrow{I_2B} = \frac{3}{5}\overrightarrow{AB}$ و بالمثل نجد $\overrightarrow{I_1B} = 3\overrightarrow{AB}$

⑤ $\overrightarrow{I_1M'} = \frac{3}{2}\overrightarrow{I_1M}$ و $\overrightarrow{I_2M'} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{I_2M}$ نضع $M'(x' , y')$ صورة $M(x , y)$

لدينا A(4 , 2) و B(7 , -1) ينتج I_1 (-2 , 8) ، $I_2 (\frac{26}{5}, \frac{4}{5})$

العبارة التحليلية للتحاكي h_1 هي $\begin{cases} (x'+2) = \frac{3}{2}(x+2) \\ y'-8 = \frac{3}{2}(y-8) \end{cases}$ أي $\begin{cases} x' = \frac{3}{2}x+1 \\ y' = \frac{3}{2}y-4 \end{cases}$

نعوض x' , y' في معادلة (C') نجد : $(\frac{3}{2}x+1-7)^2+(\frac{3}{2}y-4+1)^2 = 9$ أي $(\frac{3}{2}x-6)^2+(\frac{3}{2}y-3)^2 = 9$

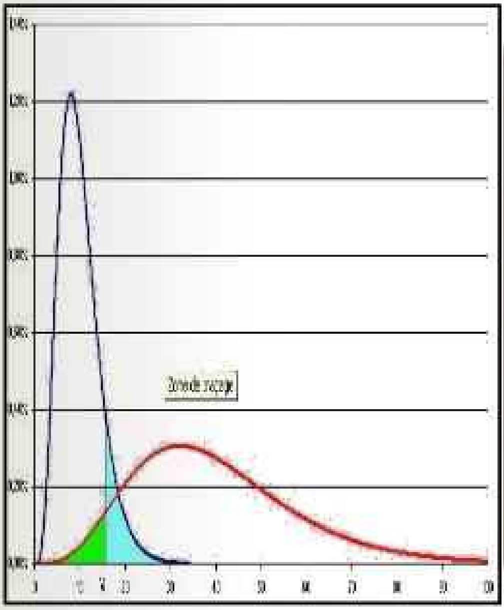
و نجد $x^2+y^2-8x-4y+16=0$ و هي معادلة الدائرة (C)

أي أن الدائرة (C') هي صورة (C) بواسطة التحاكي h_1 (و نفس الطريقة بالنسبة لـ h_2)

14

الاحتمالات

الكفاءات المستهدفة



- وصف تجربة عشوائية بسيطة عدد النتائج الممكنة فيها منته.
- نمذجة بعض الوضعيات البسيطة.
- حساب الأمل الرياضياتي، الانحراف المعياري و التباين لقانون احتمال.
- محاكاة تجارب عشوائية بسيطة.
- حساب احتمال حادثة بسيطة و حادثة مركبة.
- استعمال خواص الاحتمال في حساب احتمالات بعض الحوادث المركبة.
- تعيين قانون الاحتمال لمتغير عشوائي.
- حساب الأمل الرياضياتي، الانحراف المعياري و التباين لمتغير عشوائي.

ولد كلموقوروف (Andrei Kolmogorov) سنة 1903م بمدينة طمبوف (Tombov) و توفي بمدينة موسكو سنة 1987. التحق سنة 1920 بجامعة موسكو و قد لقي باعتراف دولي أول سنة 1922 حين توصل إلى نتيجة هامة حول السلاسل المثلثية. بعد اهتمامه بالمنطق بدأ سنة 1925 العمل في ميدان الاحتمالات بحيث تحصل على شهادة الدكتوراه سنة 1931.
لقد سافر كثيرا عبر أوربا و في سنة 1933 أصدر أعماله التي تضمنت أسس الحساب الاحتمالي و التي اعتبر بسببها إقليدس القرن العشرين.

كولموقوروف 1903 / 1987

الدرس

1- مصطلحات

- نسمي تجربة عشوائية كل تجربة لا يمكن توقع نتيجتها رغم معرفة مجموعة النتائج الممكنة .

* في تجربة عشوائية ، **مجموعة النتائج الممكنة** تسمى **مجموعة الإمكانيات** و يرمز لها بالرمز Ω .

ليكن A **جزءاً من** Ω ، نقول عندئذ أن A **حادثة** .

- إذا احتوت المجموعة الجزئية A على **عنصر وحيد** فإنها تدعى **حادثة أولية** .
- Ω هي الحادثة الأكيدة و $\varnothing$ هي الحادثة المستحيلة . ($\varnothing$ الجزء الخالي)
- إذا كانت A حادثة ما فإن حادثتها العكسية يرمز لها بـ $\overline{A}$ و هي التي تحوي كل عناصر Ω ما عدا عناصر A
- لتكن A و B حادثتين . نرمز بـ $A \cap B$ للحادثة "A و B " و هي التي تحوي العناصر المشتركة بين A و B

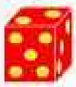
* إذا كانت $A \cap B$ خالية أي $A \cap B = \varnothing$ نقول عندئذ أن الحادثتين A و B غير متلائمتين .

- نرمز بـ $A \cup B$ للحادثة 'A أو B ' و هي التي تحوي عناصر A و عناصر B أيضا .

مثال : نعتبر التجربة العشوائية التالية

نرمي زهرة نرد غير مزيفة ذات ستة أوجه مرقمة من 1 إلى 6 . المجموعة الشاملة هي : $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$

- الحادثة A :' الحصول على رقم زوجي .' أي $A = \{2,4,6\}$
- الحادثة B :' الحصول على رقم أكبر أو يساوي 3 .' أي $B = \{3,4,5,6\}$
- الحادثتان A و B هما مجموعتان جزئيتان من Ω .
- الحادثة C :' الحصول على الرقم 6 .' حادثة أولية لأن $C = \{6\}$
- الحادثة $A \cap B$ هي الحادثة :' الحصول على رقم زوجي أكبر أو يساوي 3 .' أي $A \cap B = \{4,6\}$
- الحادثة $A \cup B$ هي الحادثة :' الحصول على رقم زوجي أو أكبر أو يساوي 3 .' أي $A \cup B = \{2,3,4,5,6\}$



2- قانون الاحتمال

تعريف: **قانون احتمال P لتجربة عشوائية هو إرفاق كل مخرج e_i بعدد موجب p_i مع $i \in \{1,2,3,\dots,n\}$**
بحيث يتحقق ما يلي $p_1 + p_2 + p_3 + \dots + p_n = 1$

- **نمذجة تجربة عشوائية يعني إرفاقها بمجموعة إمكانيات Ω و قانون احتمال P على Ω**

يسمى العدد p_i احتمال تحقق المخرج e_i

ملاحظة1: بما أن كل عدد p_i موجب فهو أصغر من المجموع 1 و منه $0 \le p_i \le 1$ من أجل كل i طبيعي من 1 الى n

ملاحظة2: إحتمال الحادثة A يرمز له بـ $P(A)$ و يساوي مجموع إحتمالات الحوادث الأولية للحادثة A .

مثال : نرمي زهرة النرد (المثال السابق)

مجموعة المخارج هي $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$ بما أن زهرة النرد غير مزيفة (أي أن كل الوجوه لها نفس احتمال الظهور)

فهذا يعني أنه من أجل كل عدد طبيعي i من 1 الى n فإن $p_i = \frac{1}{6}$

و احتمالا الحادثتين A و B هما $p(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ و $p(B) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ على الترتيب .

تمرين محلول 1

يحوي كيس 15 كرية مرقمة من 1 إلى 15 . نسحب عشوائيا كرية واحدة و نسجل رقمها .

1- عين المجموعة الشاملة Ω .

2- عين الحادثة A :' الحصول على رقم مضاعف للعدد 5 .'

3- عين الحادثة B :' الحصول على رقم مضاعف للعدد 3 .'

4- عين الحوادث $A\cap B$ و $\bar{A}$ و $\bar{B}$ ثم استنتج الحادثتين $\bar{A}\cap\bar{B}$ و $\overline{A\cap B}$

حيث $\bar{A}$ و $\bar{B}$ و $\overline{A\cap B}$ هي الحوادث العكسية للحوادث A و B و $A\cap B$ على الترتيب

حل:

1- Ω هي مجموعة كل النتائج الممكنة أي $\Omega=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15\}$

2- مضاعفات العدد 5 المحصورة بين 1 و 15 هي التي تشكل A أي $A=\{5,10,15\}$

3- مضاعفات العدد 3 المحصورة بين 1 و 15 هي التي تشكل B أي $B=\{3,6,9,12,15\}$

4- $A\cap B=\{15\}$ ، $\bar{A}=\{1,2,3,4,6,7,8,9,11,12,13,14\}$ ، $\bar{B}=\{1,2,4,5,7,8,10,11,13,14\}$

$\bar{A}\cap\bar{B}=\{1,2,4,7,8,11,13,14\}$ ، $\overline{A\cap B}=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,\}$

تمرين محلول 2

زهرة نرد مزيفة ذات أربعة أوجه مرقمة من 1 الى 4 .

نرمز بالرمز p_i لاحتمال ظهور الوجه ذي الرقم i مع $i\in\{1,2,3,4\}$. نعلم أن $p_2=\frac{1}{5}$ و أن الحدو p_1,p_2,p_3,p_4

تشكل حدود متتالية حسابية بهذا الترتيب

1- أحسب p_1 ، p_3 و p_4 — 2 – أحسب احتمال ظهور رقم فردي

حل:

1- ليكن r أساس المتتالية

لدينا $p_2=p_1+r$ ، $p_3=p_2+r$ ، $p_4=p_2+2r$

لكن $p_1+p_2+p_3+p_4=1$ و منه $p_2-r+p_2+p_2+r+p_2+2r=1$

أي أن $4p_2+2r=1$ و بالتالي $r=\frac{1-4p_2}{2}=\frac{1}{10}$

$p_1=\frac{1}{5}-\frac{1}{10}=\frac{1}{10}$ و $p_3=p_2+r=\frac{3}{10}$ و $p_4=p_2+2r=\frac{4}{10}$

2- ليكن A الحادثة :" ظهور عدد فردي ."

نعلم أن $p(A)=p_1+p_3$ إذن $p(A)=\frac{2}{5}$

تساوي الإحتمال :

تعريف: نقول عن تجربة أنها متساوية الاحتمال عندما يكون لكل الحوادث الأولية نفس الاحتمال نقول عندئذ أن قانون الاحتمال متساوي التوزيع .

تنبيه يشار إلى تساوي الاحتمال من خلال عبارات تتضمنها نصوص وصف التجربة مثل أن يقال ' زهرة نرد غير مزيفة ' ، ' قطعة نقود متوازنة ' ، ' كريات لا نفرق بينها عند اللمس ' .....

و هذا يعني أن احتمال ظهور أي وجه عند رمي زهرة نرد غير مزيفة هو $\frac{1}{6}$ (كل وجه له نفس الحظ للظهور) أما عند رمي قطعة نقود متوازنة فإن احتمال ظهور ' وجه ' هو $\frac{1}{2}$ و احتمال ظهور ' ظهر' هو $\frac{1}{2}$ أيضا وهكذا بالنسبة للكريات ، فلو فرضنا أن الصندوق يحوي n كرية فإن احتمال ظهور أية كرية هو $\frac{1}{n}$

ملاحظة : تساوي الإحتمال يتعلق كذلك بالمجموعة الشاملة (يعنى بالسؤال المطروح)

مثال : يحوي كيس 5 كريات (3 بيضاء و سوداوين) [لا نفرق بينها باللمس]
نسحب كرية عشوائيا و نسجل لونها [B ابيض ، N أسود]
* إذا أخذنا المجموعة الشاملة $\Omega=\{B,N\}$ فإن المخرجين B و N ليس لهما نفس الاحتمال لأن $p(B)=\frac{3}{5}$ بينما $p(A')=\frac{2}{5}$. لكن لو اعتبرنا المجموعة الشاملة $\Omega=\{B_1,B_2,B_3,N_1,N_2\}$
و ذلك بترقيم الكريات تصبح المخارج متساوية الاحتمال .

2- نتيجة :

في حالة تساوي الاحتمال

كل مخرج $\{e_i\}$ له احتمال p_i حيث $p_i=\frac{1}{n}$

إذا كانت الحادثة A تحوي m عنصرا يكون احتمالها $P(A)$ حيث $P(A)=m\times\frac{1}{n}$

أي أن

$$P(A)=\frac{\text{عدد عناصر } A}{\text{عدد عناصر } \Omega}$$

ملاحظة : بما أن $p_1+p_2+p_3+.....+p_n=1$ فإن $p(\Omega)=1$ و نضع $p(\varnothing)=0$

تمرين محلول 3

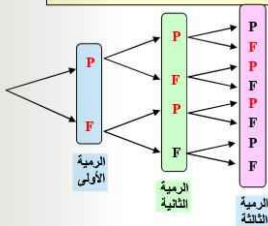
نرمي قطعة نقود متوازنة ثلاث مرات متتالية

نعتبر الحادثة A :" الحصول على ظهرين و وجه ." (في أي ترتيب كان) نرمز للظهر بالرمز P و للوجه بالرمز F

1- أنشئ مخططا يوضح كل الحالات .

2- استنتج احتمال الحادثة A .

حل:



1- - **هناك 8 إمكانيات منها 3 إمكانيات ملائمة للحادثة A و هي PPF – PFP – FPP**

2- بما أن التجربة متساوية الاحتمال فإن احتمال الحادثة A هو : $\dfrac{\text{عدد الحالات الملائمة للحادثة } A}{\text{عدد الحالات الممكنة}}$ أي $P(A)=\dfrac{3}{8}$

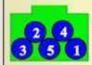
تمرين محلول 4

يحوي صندوق 5 كريات مرقمة من 1 إلى 5 لا نفرق بينها عند اللمس . نسحب على التوالي 3 كريات بالإرجاع [أي بعد كل سحبة نرجع الكرية المسحوبة إلى الكيس] . نسجل بالترتيب الأرقام التي تحملها الكرات المسحوبة (نحصل على قائمة من 3 أرقام ليست بالضرورة مختلفة مأخوذة من بين 1,2,3,4,5) .

1- ماهو عدد القوائم الممكنة ؟ (أي عدد الحالات الممكنة)

2- نعيد التجربة هذه المرّة لكن دون إرجاع الكرية المسحوبة ، ما هو عدد الحالات الممكنة (القوائم) ؟ (ملاحظة : في هذه المرّة تكون القوائم ذات 3 أرقام مختلفة مثنى مثنى)

- ماهو إحتمال الحادثة A :" الكرية الثانية المسحوبة تحمل الرقم 4 ".



حل:

خانة 1   خانة 2   خانة 3

1- لتعداد المخارج الممكنة نستعمل ملأ الخانات

(3 خانات مرقمة 1 ، 2 ، 3 نملأها بالرقم المسحوب)

هناك 5 إمكانيات بالنسبة للخانة 1 من اجل كل إمكانية هناك 5 إمكانيات للخانة 2(اى أن هناك 25 إمكانية للخانتين 1 و 2) ومن اجل كل إمكانية من بين 25 هناك 5 إمكانيات للخانة3.

و بالتالي هناك $5 \times 5 \times 5$ مخرجا ممكنا

2- * بينما في الحالة الثانية هناك $5 \times 4 \times 3$ مخرج ممكن

(الكرية المسحوبة لا ترجع أي أن رقم الخانة 1 لا يمكن أن يتكرر في الخانتين 2 ، 3) و هكذا...

* المخرج الذي يحقق الحادثة A يناسب وضع الرقم 4 في الخانة 2 فيبقى إذن 4 إمكانيات للخانة 1 و لكل إمكانية 3 إمكانيات للخانة 3 .

أي عدد الحالات الملائمة للحادثة A هو 4×3 و منه $P(A)=\dfrac{12}{60}=\dfrac{1}{5}$

1- خواص الإحتمالات :

لتكن Ω المجموعة الشاملة (النتائج الممكنة) لتجربة عشوائية .. نزود Ω بالاحتمال P .

1- من أجل كل حادثة A فإن $0 \le P(A) \le 1$

2- $P(\Omega)=1$ و $P(\varnothing)=0$

3- إذا كانت A و B حادثتين كيفيتين فإن : $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

4- إذا كانت A و B حادثتين غير متلائمتين ($A\cap B=\varnothing$) فإن $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$

5- $P(\bar{A})=1-P(A)$ حيث $\bar{A}$ الحادثة العكسية للحادثة A

6- إذا كانت الحادثة A جزء من الحادثة B ($A\subset B$) فإن $P(A)\le P(B)$

مثال : عند رمي زهرة نرد مكعبة غير مزيفة أوجهها مرقمة من 1 إلى 6 .

نعتبر الحوادث A:" الحصول على رقم زوجي ." ، B:" الحصول على رقم مضاعف لـ 3 ."

$A=\{2,4,6\}$ ، $B=\{3,6\}$ ، $A\cup B=\{2,3,4,6\}$ ، $A\cap B=\{6\}$

$$P(A\cup B)=\frac{2}{3}=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}$$

$\bar{A}$:" الحصول على رقم فردي ." $P(\bar{A})=\frac{1}{2}=1-P(A)$ $\bar{A}=\{1,3,5\}$

تعاريف

لتكن Ω مجموعة النتائج الممكنة لتجربة عشوائية (نعتبر هذه النتائج أعداداً حقيقية) $\Omega=\{e_1,e_2,e_3,\ldots,e_n\}$

ليكن P احتمالا على Ω ، نرمز بالرمز p_i للاحتمال $p_i=P(e_i)$

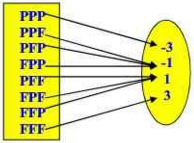
- **أمل** قانون الاحتمال هو العدد E حيث $E=\sum_{i=1}^{n} e_i p_i$
- **تباين** قانون الاحتمال هو العدد V حيث $V=\sum_{i=1}^{n}(e_i-E)^2 p_i$
- **الانحراف المعياري** لقانون الاحتمال هو العدد $\sigma=\sqrt{V}$

يمكن كتابة التباين V على الشكل $V=\sum_{i=1}^{n} e_i^2 p_i - E^2$

ملاحظة : الأمل يمثل الوسط الحسابي في سلسلة إحصائية إذا اعتبرنا أنّ قيم الطبع هي عناصر Ω و التواترات النظرية هي القيم p_i

المتغير العشوائي :

مثال : نرمي قطعة نقود متوازنة 3 مرات متتابعة و نسجل النتيجة " وجه = F " ، " ظهر = P "
مجموعة المخارج هي E = { PPP,PPF,PFP,PFF,FPP,FPF,FFP,FFF }
نعتبر اللعبة التالية : يربح اللاعب دينارا واحدا كلما ظهر (وجه F) و يخسر دينارا واحدا كلما ظهر (ظهر P)



نعتبر الدالة X التي ترفق بكل نتيجة الربح (أو الخسارة) المناسب لها

يسمى X المتغير العشوائي المعرف على E

تعريف1: Ω المجموعة الشاملة لتجربة عشوائية . نسمي متغيرا عشوائيا كل دالة عددية معرفة على Ω

قانون الإحتمال لمتغير عشوائي :

في المثال السابق نبحث عن احتمال الحادثة :" **يكون الربح دينارا واحدا** ." مثلا ، **نعبّر عن هذه الحادثة بالكتابة (X=1)**

تتحقق هذه الحادثة لما تتحقق الحادثة A حيث A = { PFF,FFP,FPF } لكن $P(A)=\frac{3}{8}$

نكتب عندئذ $P(X=1)=\frac{3}{8}$

الجدول التالي يمثل قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X

الربح x	-3	-1	1	3
$P(X=x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

عموما :

X متغير عشوائي معرف على Ω مجموعة النتائج الممكنة لتجربة عشوائية

لتكن I مجموعة قيم X أي $I=\{x_1,x_2,x_3,......,x_n\}$

و ليكن p_i احتمال الحادثة :" X يأخذ القيمة x_i ." أي ($X=x_i$) . نبرهن أن $p_1+p_2+p_3+.....+p_n=1$

تعريف2: **قانون إحتمال لمتغير عشوائي X هو الدالة المعرفة على I (مجموعة قيم X) و التي ترفق بكل قيمة x_i من I العدد $p(X=x_i)$**

تعريف3:

- **الأمل الرياضياتي للمتغير X هو العدد E(X) حيث** $E(X)=\sum_{i=1}^{n}x_ip_i$
- **التباين للمتغير X هو العدد** $V(X)=\sum_{i=1}^{n}(x_i-E(X))^2p_i$
- **الانحراف المعياري للمتغير X هو العدد** $\sigma(X)=\sqrt{V(X)}$

و يمكن كتابة $V(X)=\sum_{i=1}^{n}x_i^2P_i-(E(X))^2$ **حيث** $p_i=p(X=x_i)$

تمرين محلول 5

نفرض أن 100.000 كرية مرقمة من 1 إلى 100.000 موضوعة داخل صندوق .
نسحب كرية عشوائيا و نسجل رقمها x . (الكريات لا يمكن التفريق بينها باللمس)
- ما هو احتمال الحادثتين التاليتين ؟

A :' x ليس مضاعفا للعدد 3 '. B :' x ليس مضاعفا للعدد 3 أو ليس مضاعفا للعدد 5 "

حل:

1- نختار كمجموعة شاملة مجموعة 100.000 كرية . المخارج متساوية الاحتمال فرضا (في النص السحب عشوائي مع عدم التمييز بين الكريات باللمس) إذن كل الكريات لها نفس الحظ للظهور .

لحساب P(A) ينبغي تعداد كل الأعداد التي ليست مضاعفا للعدد 3 من بين 100.000 كرية

ولهذا من الأفضل حساب $P(\bar{A})$ مع $\bar{A}$ هي الحادثة العكسية للحادثة A أي أن $\bar{A}$:' x مضاعف للعدد 3 '.

* أول مضاعف مطلوب هو 3 و آخر مضاعف هو 99999 و منه عدد مضاعفات 3 هو $\frac{99999}{3}=33333$

و منه $P(\bar{A})=\frac{33333}{100000}$ و بالتالي $P(A)=1-P(\bar{A})$

2- $\bar{B}$ هي الحادثة :' x مضاعف للعدد 3 و مضاعف للعدد 5 '. أي :' x مضاعف للعدد 15 '.

(نقبل أن كل مضاعف مشترك لعددين أوليين فيما بينهما a و b هو مضاعف لجداءهما ab)

* عدد مضاعفات 15 هو $\frac{99990}{15}=6666$ و بالتالي $P(B)=1-\frac{6666}{100000}$ أي $P(B)=1-\frac{3333}{50000}$

تمرين محلول 8

نعتبر $\Omega=\{-1,0,2,5,6,10\}$

و نعرف قانون الاحتمال على Ω كما في الجدول

e_i	-1	0	2	5	6	10
p_i	$\frac{4}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{4}{15}$	a

1- عين العدد الحقيقي a

2- أحسب الأمل لهذا القانون

3- أحسب التباين ثم الانحراف المعياري لهذا القانون

حل:

1- حسب التعريف $\frac{4}{15}+\frac{1}{15}+\frac{1}{15}+\frac{2}{15}+\frac{4}{15}+a=1$ ومنه $a=\frac{1}{5}$

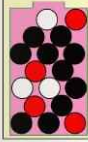
2- $E=(-1)\times\frac{4}{15}+0\times\frac{1}{15}+2\times\frac{1}{15}+5\times\frac{2}{15}+6\times\frac{4}{15}+10\times\frac{1}{5}$

$E=\frac{62}{15}\approx 4,13$

3- $V=(-1)^2\times\frac{4}{15}+0^2\times\frac{1}{15}+2^2\times\frac{1}{15}+5^2\times\frac{2}{15}+6^2\times\frac{4}{15}+10^2\times\frac{1}{5}-E^2$

$V=\frac{3686}{225}$, $\sigma=\sqrt{V}\approx 4,05$

تمرين محلول 9



يحتوي كيس على 3 كريات بيضاء ، 4 كريات حمراء و 10 كريات سوداء لا نميز بينها باللمس .
تُسحب عشوائيا كرية من الصندوق فيربح الساحب دينارا واحدا إذا كانت الكرية سوداء ،
يربح ثلاثة دنانير إذا كانت حمراء و عشرة دنانير إذا كانت الكرية بيضاء .
نعرف المتغير العشوائي X الذي يأخذ قيمة الربح المحتمل في اللعبة
1- عين القيم الممكنة للمتغير X 2- عرّف قانون الاحتمال للمتغير X
3- أحسب الأمل الرياضياتي للمتغير X 4- أحسب الانحراف المعياري للمتغير X

حل:

1- قيم X الممكنة هي : 1 ، 3 ، 10

2- الحادثة "X=1" هي ' سحب كرية سوداء " عدد الكريات السوداء 10 و عدد كل الكريات 17

ومنه $P(X=1)=\dfrac{10}{17}$ (حالة تساوي احتمال)

بنفس الطريقة نجد : $P(X=3)=\dfrac{4}{17}$ و $P(X=10)=\dfrac{3}{17}$

تجمع النتائج في الجدول التالي :

X_i	1	3	10
$P(X=X_i)$	$\frac{10}{17}$	$\frac{4}{17}$	$\frac{3}{17}$

3- $E(X)=\dfrac{10}{17}+3\times\dfrac{4}{17}+10\times\dfrac{3}{17}=\dfrac{52}{17}\approx 3,06$ و يمثل هذا العدد متوسط الربح في اللعبة

4- $V(X)=1^2\times\dfrac{10}{17}+3^2\times\dfrac{4}{17}+10^2\times\dfrac{3}{17}-\left(\dfrac{52}{17}\right)^2=\dfrac{3178}{289}$

و بالتالي : $\sigma(X)=\dfrac{\sqrt{3178}}{17}\approx 3,32$

تمرين محلول 10

نقترح اللعبة التالية : يدفع اللاعب M دينارا ثم يرمي زهرة نرد غير مزيفة ذات 12 وجها مرقمة من 1 الى 12
إذا ظهر رقم زوجي يحصل اللاعب على دينارين اثنين ، إذا ظهر احد الارقام 7 ، 9 ، 11 يحصل اللاعب على ثمانية دنانير اما إذا ظهر أحد الأرقام 1 ، 3 ، 5 فانه يحصل على ثلاثة دنانير .
1- عين قيمة M حتى تكون اللعبة عادلة (الأمل الرياضياتي معدوم)
2- اذا كان M = 4 ، هل المشاركة في هذه اللعبة هي لصالح اللاعب ؟

حل:

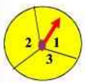
1- القيم الممكنة هي : 2-M ، 3-M ، 8-M باعتبار X هو الربح المحتمل

X_i	2-M	3-M	8-M
$P(X=X_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

$E(X)=0$ يعني $M=\dfrac{15}{4}\approx 3,75$

إذا كان الدفع للمشاركة يقدر بـ 4 دنانير فليس من مصلحة اللاعب المشاركة

بائعة البيض



تريد بائعة بيض توزيع n بيضة
(n عدد طبيعي غير معدوم)
على ثلاث سلات C_1 ، C_2 C_3 بالطريقة التالية :
تدير قرصا موزعا الى ثلاث قطاعات متساوية المساحة
مرقمة من 1 الى 3 و حيث استقر السهم
فإنها تضع البيضة في السلة التي تحمل الرقم المناسب
(أي الذي استقر عليه السهم) .

[تدير القرص من أجل كل بيضة ثم تضعها في السلة المناسبة]

نقبل في هذا التمرين أن : من أجل كل حادثتين A و B فإن: $P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$

نرمز بالرمز V_k للحادثة :' في نهاية توزيع كل البيض تبقى السلة C_k فارغة '. مع $k\in\{1,2,3\}$

1- بين أن $P(V_1)=P(V_2)=P(V_3)=\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$ حيث $P(V_k)$ يرمز لاحتمال الحادثة V_k

2- ماهي الحادثة $V_1\cap V_2$ ؟ أحسب إحتمالها

3- ماهي الحاثة $V_1\cap V_2\cap V_3$ ؟ أحسب احتمالها .

4- نقبل أن :

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(A\cap B)-P(A\cap C)-P(B\cap C)+P(A\cap B\cap C)$$

أحسب $P(V_1\cup V_2\cup V_3)$

5- نعتبر الحادثة M :" كل سلة تحوي بيضة على الأقل ".

– ماهي الحادثة $\overline{M}$ الحادثة العكسية للحادثة M ؟

– استنتج أن : $P(M)=1-3\,\dfrac{2^n-1}{3^n}$. ما هي نهاية $P(M)$ لما يؤول n الى إلى ما لا نهاية ؟

– عين العدد n حتى يكون $P(M)$ أكبر تماما من 0,99

(يمكن استعمال مجدول أو الحاسبة +Ti83 لتعيين حدود المتتالية)

الموعد

إتفقا شخصان A و B أن يلتقيا في مكان ما بين الساعة الثامنة مساء (20^H) والساعة التاسعة مساء (21^H) . كل شخص يختار عشوائيا وقت مجيئه خلال هذه الساعة المحددة و لا ينتظر الآخر أكثر من ربع ساعة.

في هذه المسألة نريد حساب الإحتمال P كي يلتقيا

النموذج

نقسم الساعة إلى 4n مجالا زمنيا و نحاكي وقتي مجيئي A و B بسحبتين متتاليتين و بالإرجاع من صندوق يحوي كريات مرقمة كما يلي :

1 2 3 .... 4n

هناك إذن $(4n)^2$ مخرجا

إذا كان a و b رقمين مسحوبين ، نعتبر الحادثتين

G: " $|a-b| \le n$ " و F: " $|a-b| \le n-1$ "

و ليكن $x_n = P(F)$ و $y_n = P(G)$ إحتمالي وقوعهما

1- اشرح لماذا تحقق الحادثة F يستلزم لقاء A و B. استنتج أن $x_n \le p$

2- اشرح لماذا لقاء A و B يستلزم تحقق الحادثة G . استنتج أن : $p \le y_n$

(نقول أن x_n هو إحتمال التشاؤم و y_n هو احتمال التفاؤل)

3- بين أن عدد المخارج الملائمة للحادثة F يساوي على التوالي $n ; n+1 ; ..... ; 2n-2$ عندما يساوي a على الترتيب $1 ; 2 ; ..... ; n-1$.

- أحسب هذا العدد عندما يكون $n \le a \le 3n+1$ ثم عندما يكون a مساويا على التوالي $3n+2 ; 3n+3 ; ..... ; 4n$.

4- استنتج أن : $x_n = \frac{15n-7}{16n}$

5- بنفس الطريقة أحسب y_n بدلالة n

6- إعط قيمة مدورة الى 10^{-2} للعدد p ثم قارن مع محاكاة التجربة .

مسألة محلولة 1 :

يحتوي صندوق على 90 كرية حيث :

- ألوان الكريات هي : الأحمر ، الأسود و الأبيض .
- 30 كرية على الأقل حمراء .
- عدد الكريات الحمراء و السوداء معا هو 60 على الأقل

يشارك شخص في لعبتين و قبل البدء في أية لعبة يُخيّر بين قاعدتين :

اللعبة الأولى

يسحب اللاعب كرية واحدة و حسب لونها و القاعدة المختارة يربح اللاعب :

	كرية حمراء	كرية بيضاء	كرية سوداء
القاعدة A	100 DA	0 DA	0 DA
القاعدة B	0 DA	100DA	0 DA

اللعبة الثانية

يسحب اللاعب كرية واحدة و حسب لونها و القاعدة المختارة يربح اللاعب :

	كرية حمراء	كرية بيضاء	كرية سوداء
القاعدة C	100DA	0 DA	100 DA
القاعدة D	0 DA	100 DA	100 DA

1- ماهي القاعدة المناسبة للرّبح أكثر بالنسبة للعبة الأولى ؟

2- ماهي القاعدة المناسبة للرّبح أكثر بالنسبة للعبة الثانية ؟

الحل :

عموما يختار المشاركون بالنسبة للعبة الأولى القاعدة A و بالنسبة للعبة الثانية للقاعدة D

بتوظيف الأمل الرياضياتي يتبين أن الإختيار مناسب !

نرمز بالرموز $P(R)$ ، $P(N)$ ، $P(B)$ لاحتمالات سحب كرية حمراء ، سوداء و بيضاء على الترتيب .

حسب المعطيات لدينا :

$$P(R) \ge \frac{1}{3} \quad و \quad P(R)+P(N) \ge \frac{2}{3} \quad و \quad P(R)+P(N)+P(B)=1$$

بالنسبة للعبة الأولى

نعتبر x_1 و x_2 المتغيرين العشوائيين المناسبين للربح حسب القاعدتين A و B على الترتيب

$E(x_1) = 100 \times P(R) \ge \frac{100}{3}$

$E(x_2) = 100 \times P(B)$

$P(B) = 1-(P(R)+P(N))$

$P(B) \le 1-\frac{2}{3}$ أي أن $P(B) \le \frac{1}{3}$

و منه $E(x_2) \le \frac{100}{3}$

اختيار القاعدة A أفضل

بالنسبة للعبة الثانية

نعتبر y_1 و y_2 المتغيرين العشوائيين المناسبين للربح حسب القاعدتين C و D على الترتيب

$E(y_1) = 100(P(R)+P(N)) \ge \frac{200}{3}$

$E(y_2) = 100(P(B)+P(N))$

$P(B)+P(N) = 1-P(R) \le 1-\frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

و منه $E(y_2) \le \frac{200}{3}$

اختيار القاعدة D أفضل

مسألة محلولة 2 :

في لعبة يرمي اللاعب قطعة نقود غير مزيفة (متوازنة) ، فإذا كانت النتيجة " وجه " فسيربح 2 دينار و تنتهي اللعبة و إلا فإنه يعيد رمي قطعة النقود مرة أخرى فإذا كانت النتيجة " وجه " فسيربح 2^2 دينارا و تنتهي اللعبة و إلا فإنه يعيد رمي قطعة النقود و هكذا ....

1- نقدم للاعب اقتراحين :

- ربح 10.000.000 دينارا
- المشاركة في اللعبة السابقة (أي ربح 2^n دينارا بعد n رمية ضرورية للحصول على " وجه ")

- أي الاقتراحين أفضل للاعب ؟

2- نقترح الآن اللعبة التالية : يدفع اللاعب مبلغا ماليا و يرمي القطعة النقدية السابقة :

إذا ظهر " ظهر " فإن اللاعب يربح مثل ما دفع و إلا خسر ما دفع .

يشارك لاعب كما يلي : يدفع 10 دنانير و يرمي القطعة إذا ظهر " ظهر " توقف و إلا دفع 20 دينارا و أعاد الرمية فإذا ظهر " ظهر " توقف عن اللعب و إلا دفع 40 دينارا و أعاد اللعب و هكذا...

(إذا ربح توقف عن اللعب و إلا ضاعف الدفع و أعاد اللعب)

ليكن Y المتغير العشوائي الذي يأخذ قيمة عدد الرميات اللازمة للاعب لضمان الربح

① بين أن $P(Y=n)$ يئول إلى 0 عندما يئول n إلى $+\infty$

② هل الربح أكيد (نظريا / واقعيا) ؟

الحل :

1- نحسب الأمل الرياضياتي $E(X)$ باعتبار أن المتغير العشوائي X هو الربح . لدينا قانون الاحتمال :

X	2^1	2^2	2^3	2^4	.....	2^n	.....
$P(X=x)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2^2}$	$\frac{1}{2^3}$	$\frac{1}{2^4}$	.....	$\frac{1}{2^n}$	.....

$$E(X)=2^1\times\frac{1}{2^1}+2^2\times\frac{1}{2^2}+2^3\times\frac{1}{2^3}+.....+2^n\times\frac{1}{2^n}=1+1+1+.....+1=\infty!$$

و عليه فالإقتراح الثاني (المشاركة) أفضل للاعب

2- ① $P(Y=n)=\frac{1}{2^n}$ ، 2^n يئول الى $+\infty$

② نفرض أنه بعد عدد n من الرميات يظهر " ظهر " لأول مرة عندئذ يكون اللاعب قد خسر من الرمية الأولى الى الرمية (n-1) مبلغا يساوي :

$$10+20+40+.....+10\times2^{n-1}=10(1+2+2^2+.....+2^{n-1})$$
$$=10\,(2^n-1)\ \text{DA}$$

و يكون قد ربح في الرمية n المبلغ 10×2^n دينارا و هو نفس المبلغ الذي دفعه لأجل الرمية n و بالتالي بعد n رمية يكون الربح :

$$10\times2^n-10\times(2^n-1)$$

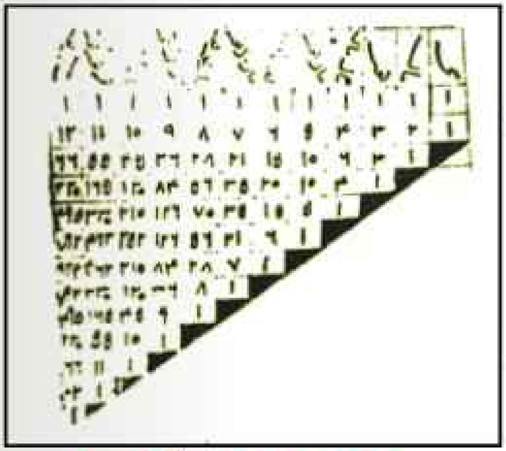
أي 10 دنانير فقط بعد هدر وقت كبير.

واقعيا : لا يمكن الاستمرار في اللعب لضمان الربح ما لم يكن بحوزة اللعب مبلغا كافيا .

الدوال كثيرات الحدود
مسائل الدرجة الثانية

الكفاءات المستهدفة

- التعرف على دالة كثير حدود و على درجتها.
- حل مسائل تستخدم فيها معادلات أو متراجحات من الدرجة الثانية.



مثلث الكرخي لنشر $(a+b)^n$

أبو بكر الكرخي (الكرجي)

هو أبو بكر محمد بن الحسن الكرخي . ولد في كرخ إحدى ضواحي بغداد، ولا يعرف تاريخ ولادته ويعد أحد كبار الرياضياتيين العرب . اهتم الكرخي اهتماماً كبيراً بعلمي الحساب والجبر إلا أنه لم يكن ميالاً لاستعمال الأرقام بل كان يثبت الأعداد مكتوبة بالأحرف على الطريقة اليونانية. اعتمد في أعماله على مؤلفات الخوارزمي خاصة في الجبر ولكنه زاد عليه في المعادلات والإكثار من البراهين سواء في الطول أو في درجات المعادلات .

أوجد الكرخي في كتابه (البديع في الجبر والمقابلة) طرقاً جديدة لإيجاد القيم التقريبية للأعداد والكميات التي لا يمكن استخراج جذورها واستعمل في ذلك طرقاً جبرية تدل على قوة الفكر وسعة العقل ومعرفة تامة بعلم الجبر ، ومن أشهر كتب الكرخي كتاب (الفخري في الجبر والمقابلة) الذي اشتمل على نظريات جديدة لم يسبقه إليها أحد ، تدل على أصالة الكرخي في التفكير ومنها (أن العدد الذي لو أضيف إليه مربع لكان الناتج مربعاً ولو طرح منه مربعه لكان الناتج مربعاً) كما استنبط الكرخي قانونا جديداً لإيجاد الجذر التربيعي . وفي كتاب (الكافي في الحساب) أوجد الكرخي حلولاً متنوعة وفريدة لمعادلات الدرجة الثانية . وتوفي الكرخي في عام 1020م.

الدوال كثيرات الحدود

1. الدالة كثير حدود

تعريف: نسمي دالة كثير حدود (أو كثير حدود) كل دالة f معرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$$

حيث n عدد طبيعي و a_0 ، a_1 ، ... ، a_n أعداد حقيقية ثابتة.

أمثلة:

- كل دالة ثابتة: $x \mapsto k$ ($k \in \mathbb{R}$) هي دالة كثير حدود و بصفة خاصة الدالة المعدومة: $x \mapsto 0$.
- الدوال: $x \mapsto 0,3x^2 + x - \sqrt{2}$ ، $x \mapsto (x+2)(x^2-2)$ ، $x \mapsto x^5$ هي كثيرات حدود.

2. درجة كثير حدود

مبرهنة و تعريف: كل دالة كثير حدود غير معدومة f تكتب بطريقة وحيدة على الشكل:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0 \quad \text{مع} \quad a_n \neq 0$$

يسمى العدد الطبيعي n درجة كثير الحدود f ، تسمى الأعداد a_0 ، a_1 ، ... ، a_n معاملاته و يسمى الحد $a_p x^p$ الذي درجته p .

أمثلة:

- كل دالة ثابتة: $x \mapsto a_0$ ($a_0 \neq 0$) هي كثير حدود درجته 0.
- كل دالة تآلفية: $x \mapsto ax+b$ ($a \neq 0$) هي كثير حدود درجته 1.
- كل دالة: $x \mapsto ax^2+bx+c$ ($a \neq 0$) هي كثير حدود درجته 2 (تسمى أيضا ثلاثي حدود من الدرجة الثانية)

ملاحظة: درجة كثير الحدود المعدوم غير معيّنة.

3. تساوي كثيري حدود

مبرهنة:

- يكون كثير حدود معدوما إذا و فقط إذا كانت كل معاملاته معدومة.
- يكون كثيرا حدود ، غير معدومين، متساويين إذا و فقط إذا كانا من نفس الدرجة و كانت معاملات الحدود من نفس الدرجة متساوية.

مثال: إذا كان لدينا من أجل كل عدد حقيقي x : $ax^3+bx^2+cx+d = 2x^3-x+3$

فإن: $a=2$ ، $b=0$ ، $c=-1$ و $d=3$.

تمرين محلول 1

هل الدوال التالية كثيرات حدود ؟ في حالة الإجابة بنعم حدد درجتها.

أ) $f(x)=(x-1)(2x^2+3)$ ب) $g(x)=\dfrac{x^4+2x^2+1}{x^2+1}$ جـ) $h(x)=(\sin x)^2-3\sin x+2$

طريقة: تكون الدالة f كثير حدود إذا أجبنا بنعم على السؤالين التاليين:

1) هل f معرفة على $\mathbb{R}$ ؟ 2) هل يمكن كتابة $f(x)$ على الشكل: $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0$ ؟

حل:

أ) الدالة f معرفة على $\mathbb{R}$ و لدينا من أجل كل عدد حقيقي x: $f(x)=2x^3-2x^2+3x-3$

إذن الدالة f دالة كثير حدود من الدرجة الثالثة.

ب) الدالة g معرفة على $\mathbb{R}$ لأن من أجل كل عدد حقيقي x، $x^2+1\neq 0$

لدينا من أجل كل عدد حقيقي x: $g(x)=\dfrac{(x^2+1)^2}{x^2+1}=x^2+1$

إذن الدالة g دالة كثير حدود من الدرجة الثانية.

جـ) الدالة h ليست دالة كثير حدود لأنه لا يمكن كتابة $h(x)$ على الشكل: $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0$

تمرين محلول 2

f دالة كثير حدود معرفة بـ: $f(x)=x^3+x^2-4x-4$

1. عين الأعداد الحقيقية a، b و c بحيث يكون من أجل كل عدد حقيقي x:

$$f(x)=(x+1)(ax^2+bx+c)$$

2. حل في $\mathbb{R}$ المعادلة ذات المجهول x: $f(x)=0$

حل:

1. $(x+1)(ax^2+bx+c)=ax^3+bx^2+cx+ax^2+bx+c)=ax^3+(a+b)x^2+(b+c)x+c$

إذن من أجل كل عدد حقيقي x: $ax^3+(a+b)x^2+(b+c)x+c=x^3+x^2-4x-4$

وهذا يعني $\begin{cases}a=1\\a+b=1\\b+c=-4\\c=-4\end{cases}$ أي: $\begin{cases}a=1\\b=0\\c=-4\end{cases}$ ومنه من أجل كل عدد حقيقي x: $f(x)=(x+1)(x^2-4)$

2. $f(x)=0$ يعني $(x+1)(x^2-4)=0$ أي $x+1=0$ أو $x^2-4=0$ أي: $x=-1$ أو $x^2=4$ ومنه

الحلول هي -1 ، -2 ، و 2 إذن مجموعة الحلول هي: $S=\{-2,-1,2\}$

عمليات على كثيرات الحدود

1. عمليات على كثيرات الحدود

تسمح قواعد الحساب الجبري من التوصل إلى النتائج التالية:

نتائج:

1. مجموع، فرق و جداء كثيرات حدود هي كثيرات حدود.
2. مركب كثيري حدود هو كثير حدود.
3. جداء كثيري حدود غير معدومين درجتاهما n و p على الترتيب هو كثير حدود درجته $(n+p)$.

ملاحظة: بصفة عامة حاصل قسمة كثير حدود f على كثير حدود g ليس كثير حدود و تسمى الدالة: $h:x\mapsto\dfrac{f(x)}{g(x)}$ دالة ناطقة.

2. جذر كثير حدود

تعريف: ليكن f كثير حدود درجته أكبر من أو تساوي 1 و α عدد حقيقي.

العدد α جذر لكثير الحدود f يعني $f(\alpha)=0$.

مثال:

ليكن f كثير الحدود المعرف بـ: $f(x)=x^3-x^2-x-2$

لدينا: $f(2)=0$ ومنه 2 هو جذر لكثير الحدود f بينما العدد 0 ليس جذرا له لأن $f(0)\neq 0$ ($f(0)=-2$)

3. تحليل كثير حدود باستعمال العامل $(x-\alpha)$

مبرهنة: ليكن f كثير حدود درجته أكبر من أو تساوي 1 و α عدد حقيقي.

إذا كان $f(\alpha)=0$ (α جذر لكثير الحدود f) فإنه يوجد كثير حدود g بحيث من أجل كل عدد حقيقي x لدينا:

$$f(x)=(x-\alpha)g(x)$$

مثال:

ليكن f كثير الحدود المعرف بـ: $f(x)=x^3-6x^2+11x-6$

لدينا $f(1)=0$ و $f(2)=0$ و $f(3)=0$

و منه الأعداد 1، 2 و 3 هي جذور لكثير الحدود f.

يمكن إذن تحليل f و لدينا:

$$f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)$$

تمرين محلول 3

نعتبر الدالتين كثيري الحدود f و g المعرفتين بـ: $f(x)=2x+1$ و $g(x)=-3x^2+x-1$

1. عين كثيرات الحدود التالية: $f+g$ ، $2f-3g$ و $g\circ f$.
2. عين كثير الحدود $f\times g$ محددا درجته.

حل:

1. بتطبيق قواعد الحساب الجبري نحصل على:
   - $(f+g)(x)=f(x)+g(x)=-3x^2+3x$
   - $(2f-3g)(x)=2f(x)-3g(x)=9x^2+x+5$
   - $(g\circ f)(x)=g[f(x)]=-12x^2-10x-3$
2. $(f\times g)(x)=f(x)\times g(x)=-6x^3-x^2-x-1$ و لدينا درجة $f\times g$ هي 3.

تمرين محلول 4

f دالة كثير حدود معرفة بـ: $f(x)=x^3-x^2-4x+4$

تحقق أن العدد 2 جذر لكثير الحدود f

عين كثير حدود g بحيث يكون من أجل كل عدد حقيقي x: $f(x)=(x-2)g(x)$

حل:

لدينا: $f(2)=0$ و منه العدد 2 جذر لكثير الحدود f. إذن حسب المبرهنة يوجد كثير حدود g بحيث من أجل كل عدد حقيقي x لدينا: $f(x)=(x-2)g(x)$

طريقة: لتعيين $g(x)$ يمكن فرض $g(x)=ax^2+bx+c$ ثم تعيين المعاملات a، b و c باستعمال تساوي كثيري حدود و ذلك بعد نشر و تبسيط و ترتيب العبارة $(x-2)g(x)$ كما يمكن استعمال خوارزمية القسمة.

الطريقة العملية لتعيين $g(x)$:

$$
\begin{array}{rl|l}
 & x^3-x^2-4x+4 & x-2 \\
- & x^3-2x^2 & x^2+x-2 \\
\hline
 & x^2-4x+4 & \\
- & x^2-2x & \\
\hline
 & -2x+4 & \\
- & -2x+4 & \\
\hline
 & 0 &
\end{array}
$$

نجد هكذا: $g(x)=x^2+x-2$

و منه: $f(x)=(x-2)(x^2+x-2)$

المعادلات من الدرجة الثانية

1. المعادلة من الدرجة الثانية

تعريف: نسمي معادلة من الدرجة الثانية، ذات المجهول x، كل معادلة يمكن كتابتها على الشكل: $ax^2+bx+c=0$ حيث a، b و c أعداد حقيقية ثابتة مع $a\neq 0$.

2. الشكل النموذجي لثلاثي الحدود: ax^2+bx+c $(a\neq 0)$

من أجل كل عدد حقيقي x لدينا: $ax^2+bx+c=a\left[x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right]$

و بما أن $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}$ فإن $x^2+\frac{b}{a}x=\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}$

ومنه $ax^2+bx+c=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right]=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]$

بوضع $\Delta=b^2-4ac$ نجد $ax^2+bx+c=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right]$

تعاريف: ليكن ax^2+bx+c ثلاثي حدود من الدرجة الثانية $(a\neq 0)$

- يسمى العدد b^2-4ac مميز ثلاثي الحدود ax^2+bx+c و نرمز إليه بالرمز Δ
- يسمى $a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right]$ الشكل النموذجي لثلاثي الحدود ax^2+bx+c

3. حل المعادلة: $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$

نعتبر المعادلة من الدرجة الثانية ذات المجهول x التالية: $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$

باستعمال الشكل النموذجي نبرهن على المبرهنة التالية:

مبرهنة	إذا كان:	حلول المعادلة $ax^2+bx+c=0$ هي:	يتم تحليل ax^2+bx+c على الشكل:
	$\Delta>0$	$x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ ، $x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$	$a(x-x_1)(x-x_2)$
	$\Delta=0$	$x_1=x_2=\frac{-b}{2a}$	$a(x-x_1)^2$
	$\Delta<0$	لا توجد حلول	لا يمكن تحليل ax^2+bx+c

ملاحظة: إذا كان $\Delta=0$ نقول أن المعادلة $ax^2+bx+c=0$ تقبل حلا مضاعفا.

تمرين محلول 5

نعتبر ثلاثي الحدود من الدرجة الثانية f المعرف بـ: $f(x)=x^2+3x-4$

1. عين الشكل النموذجي لـ $f(x)$
2. بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x لدينا: $f(x)\ge -\frac{25}{4}$. استنتج أن f تقبل على ℝ قيمة حدية يطلب تحديدها.

حل:

1. من أجل كل عدد حقيقي x لدينا: $x^2+3x-4=\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}-4=\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{25}{4}$

و منه $f(x)=\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{25}{4}$ و هو الشكل النموذجي لـ $f(x)$.

2. لمقارنة $f(x)$ بالعدد $-\frac{25}{4}$ نقوم بدراسة إشارة الفرق $\left[f(x)-\left(-\frac{25}{4}\right)\right]$

لدينا من السؤال الأول: $f(x)-(-\frac{25}{4})=\left(x+\frac{3}{2}\right)^2$ وبما أن $\left(x+\frac{3}{2}\right)^2\ge 0$ نستنتج أن $f(x)-(-\frac{25}{4})\ge 0$

إذن من أجل كل عدد حقيقي x لدينا: $f(x)\ge -\frac{25}{4}$.

بما أن $f(x)\ge -\frac{25}{4}$ و $f\left(-\frac{3}{2}\right)=-\frac{25}{4}$ فإن $f(x)\ge f\left(-\frac{3}{2}\right)$ نستنتج أن الدالة f تقبل على ℝ قيمة حدية صغرى هي $-\frac{25}{4}$ و تبلغها من أجل القيمة $-\frac{3}{2}$ للمتغير.

تمرين محلول 6

حل في ℝ المعادلات التالية:

أ) $x^2+2x=0$ ب) $x^2+x+1=0$ جـ) $x^2-4x+4=0$ د) $x^2+x-6=0$

طريقة: عند حل المعادلة $ax^2+bx+c=0$ $(a\ne 0)$ نستعمل بصفة عامة المميز إلا أنه يمكن في بعض الحالات ملاحظة ما إذا كان ثلاثي الحدود ax^2+bx+c يقبل تحليلا ظاهرا.

حل:

أ) $x^2+2x=0$ تعني $x(x+2)=0$ أي $x=0$ أو $x=-2$ ومنه مجموعة الحلول هي $S=\{-2,0\}$

ب) لدينا $a=1$، $b=1$ و $c=1$ ومنه $\Delta=(1)^2-4(1)(1)=-3$ إذن ليس للمعادلة حلول ومنه $S=\varnothing$

جـ) $x^2-4x+4=0$ تكافئ $(x-2)^2=0$ إذن للمعادلة حل مضاعف $x=2$ ومنه $S=\{2\}$

د) لدينا $a=1$، $b=1$ و $c=-6$ ومنه $\Delta=(1)^2-4(1)(-6)=25$ إذن للمعادلة حلان متمايزان:

$x_1=\frac{-1+\sqrt{25}}{2}=2$ و $x_2=\frac{-1-\sqrt{25}}{2}=-3$ ومنه $S=\{-3,2\}$

المتراجحات من الدرجة الثانية

1. المتراجحة من الدرجة الثانية

تعريف: نسمي متراجحة من الدرجة الثانية، ذات المجهول x، كل متراجحة يمكن كتابتها على أحد الشكلين التاليين: $ax^2+bx+c\ge 0$ ، $ax^2+bx+c>0$ حيث a، b و c أعداد حقيقية ثابتة مع $a\ne 0$.

2. إشارة ثلاثي الحدود: ax^2+bx+c $(a\ne 0)$

الحالة1: $\Delta>0$

لدينا $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$ حيث: $x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ و $x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$.

بفرض $x_1<x_2$ نحصل على الجدول المقابل

x	$-\infty$	x_1		x_2	$+\infty$
$x-x_1$	$-$	0	$+$		$+$
$x-x_2$	$-$		$-$	0	$+$
$a(x-x_1)(x-x_2)$	إشارة a	0	إشارة $(-a)$	0	إشارة a

الحالة2: $\Delta=0$

لدينا $ax^2+bx+c=a(x-x_1)^2$ حيث: $x_1=\frac{-b}{2a}$ ومنه $ax^2+bx+c=0$ من أجل $x=x_1$ و إشارته هي إشارة a من أجل كل $x\ne x_1$.

الحالة3: $\Delta<0$

لدينا $ax^2+bx+c=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\left(-\frac{\Delta}{4a^2}\right)\right]$ و بما أن $\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\left(-\frac{\Delta}{4a^2}\right)\right]>0$

فإن من أجل كل عدد حقيقي x، إشارة ax^2+bx+c هي إشارة a .

مبرهنة

$\Delta<0$

المعادلة $ax^2+bx+c=0$ لا تقبل حلولا

من أجل كل عدد حقيقي x، إشارة ax^2+bx+c هي من نفس إشارة a

$\Delta=0$

المعادلة $ax^2+bx+c=0$ تقبل حلا مضاعفا x_1

x	$-\infty$	x_1	$+\infty$
ax^2+bx+c	إشارة a	0	إشارة a

$\Delta>0$

المعادلة $ax^2+bx+c=0$ تقبل حلين متمايزين x_1 و x_2

x	$-\infty$	x_1		x_2	$+\infty$
ax^2+bx+c	إشارة a	0	إشارة $(-a)$	0	إشارة a

$(x_1<x_2)$

تمرين محلول 7

حل في ـ المتراجحات التالية:

ا) $2x^2+4x-6\le 0$ ب) $-x^2+10x-25\ge 0$ ج) $x^2-x+4<0$

طريقة: يؤول حل متراجحة من الشكل $ax^2+bx+c\ge 0$، $ax^2+bx+c>0$، $ax^2+bx+c\le 0$ أو $ax^2+bx+c<0$ إلى دراسة إشارة ثلاثي الحدود ax^2+bx+c

حل:

أ) لدينا $\Delta=64$ ومنه حلول المعادلة $2x^2+4x-6=0$ هما: -3 و 1

مجموعة الحلول هي إذن: $S=[-3;1]$

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
$2x^2+4x-6$		+	0	−	0	+	

ب) لدينا $\Delta=0$ ومنه للمعادلة $-x^2+10x-25=0$ حلا مضاعفا هو 5.

مجموعة الحلول هي إذن: $S=\{5\}$

x	$-\infty$		5		$+\infty$
$-x^2+10x-25$		−	0	−	

ج) لدينا $\Delta=-15$ ومنه ليس للمعادلة $x^2-x+4=0$ حلولا لأن $\Delta<0$

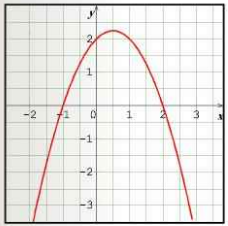
مجموعة الحلول هي إذن: $S=\varnothing$

x	$-\infty$		$+\infty$
x^2-x+4		+	

تمرين محلول 8

1. باستعمال أحد راسمات المنحنيات مثل بيانيا الدالة f المعرفة على ! بـ: $f(x)=-x^2+x+2$
2. استنتج بيانيا حلول المتراجحة $-x^2+x+2\le 0$

حل:



1. انظر الشكل المقابل.
2. نلاحظ أن المنحني الممثل للدالة f يقطع محور الفواصل في نقطتين فاصلتاهما -1 و 2 على الترتيب كما نلاحظ أنه يقع فوق هذا المحور من أجل $x\in[-1;2]$ و يقع تحته من أجل $x\in]-\infty;-1]\cup[2;+\infty[$. لدينا إذن:

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$-x^2+3x-2$		−	0	+	0	−	

إذن مجموعة الحلول هي: $S=]-\infty;-1]\cup[2;+\infty[$

مجموع و جداء حلي معادلة من الدرجة الثانية

نعتبر المعادلة من الدرجة الثانية ذات المجهول الحقيقي x التالية:

$ax^2+bx+c=0$ ..... (1) مع $(a\ne 0)$

نعلم أنه إذا كان $\Delta\ge 0$ فإن المعادلة (1) تقبل حلين (جذرين) x' و x'' حيث:

$$x'=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad \text{و} \quad x''=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

إذا وضعنا $S=x'+x''$ و $P=x'\times x''$ حيث S هو مجموع الحلين و P جداؤهما بين أن:

$$S=-\frac{b}{a} \quad \text{و} \quad P=\frac{c}{a}$$

تطبيق1: حساب أحد الحلّين بمعرفة الآخر

إذا علم أحد الجذرين يمكن حساب الجذر الآخر و ذلك باستعمال المجموع S أو الجداء P

تمرين تطبيقي: نعتبر المعادلة التالية: $2x^2+\alpha x-3=0$ حيث α عدد حقيقي .

عين α حتىيكون (-3) حلا لهذه المعادلة ثم استنتج الحل الآخر.

تطبيق2: تعيين عددين علم مجموعهما و جداؤهما

مبرهنة: يكون مجموع عددين هو S و جداؤهما هو P إذا و فقط إذا كانا حلين للمعادلة ذات المجهول x:

$x^2-Sx+P=0$

أنجز برهانا لهذه المبرهنة.

تمرين تطبيقي: عين بعدي مستطيل مساحته $77cm^2$ و محيطه $36cm$.

هل يوجد مستطيلا مساحته $30cm^2$ و محيطه $20cm$؟

تطبيق3: تعيين إشارة حلي معادلة من الدرجة الثانية

مبرهنة: نعتبر المعادلة: $ax^2+bx+c=0$ ..... (1) مع $(a\ne 0)$.

1. إذا كان $\frac{c}{a}<0$ فإن المعادلة (1) تقبل حلين إشارتاهما مختلفتان.
2. إذا كان $\frac{c}{a}>0$ و $\Delta>0$ و $-\frac{b}{a}>0$ فإن المعادلة (1) تقبل حلين موجبين تماما.
3. إذا كان $\frac{c}{a}>0$ و $\Delta>0$ و $-\frac{b}{a}<0$ فإن المعادلة (1) تقبل حلين سالبين تماما.

أنجز برهانا لهذه المبرهنة.

تمرين تطبيقي: ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي m وجود و إشارة حلول المعادلة ذات المجهول x التالية:

$(m-1)x^2+2(m+1)x+m=0$

أعمال موجهة

المعادلات و المتراجحات مضاعفة التربيع

1. المعادلات مضاعفة التربيع

تعريف: نسمي معادلة مضاعفة التربيع، ذات المجهول x ، كل معادلة يمكن كتابتها على الشكل: $ax^4+bx^2+c=0$
حيث a ، b و c أعداد حقيقية ثابتة مع $a\neq 0$.

بين أن حل المعادلة $ax^4+bx^2+c=0$ يؤول إلى حل الجملة:

$$\begin{cases} X=x^2 \\ aX^2+bX+c=0 \end{cases}$$

يسمى المجهول X مجهولا مساعدا.

بعد حل المعادلة $aX^2+bX+c=0$ نستنتج حلول المعادلة $ax^4+bx^2+c=0$

تطبيق: حل في $\mathbb{R}$ المعادلات ذات المجهول x التالية:

1) $x^4+x^2-6=0$ 2) $x^4-5x^2+4=0$ 3) $2x^4+5x^2+2=0$

2. المتراجحات مضاعفة التربيع

تعريف: نسمي متراجحة مضاعفة التربيع، ذات المجهول x ، كل متراجحة يمكن كتابتها على أحد الشكلين التاليين: $ax^4+bx^2+c\geq 0$ ، $ax^4+bx^2+c>0$ حيث a ، b و c أعداد حقيقية ثابتة مع $a\neq 0$.

يؤول حل متراجحة مضاعفة التربيع إلى دراسة إشارة ax^4+bx^2+c

دراسة مثال:

نعتبر في $\mathbb{R}$ المتراجحة ذات المجهول x : $x^4-7x^2+12<0$ .... (*)

1. نضع: $f(x)=x^4-7x^2+12$
تحقق أن 3 و 4 هما حلا المعادلة ذات المجهول X : $X^2-7X+12=0$
2. بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x لدينا: $f(x)=(x^2-3)(x^2-4)$
3. أدرس حسب قيم x إشارة $f(x)$ (يمكنك استعمال جدول)
4. استنتج حلول المتراجحة (*)

تطبيق: حل في $\mathbb{R}$ المتراجحة ذات المجهول x التالية:

$-x^4+4x^2+5\leq 0$

مسائل محلولة

نهدف إلى حساب المجموعين التاليين: $S_1=1+2+...+n$ و $S_2=1^2+2^2+...+n^2$ حيث n عدد طبيعي.

1. حساب S_1
- عين كثير حدود f من الدرجة الثانية يحقق من أجل كل عدد حقيقي x : $f(x+1)-f(x)=x$
- بين أن: $S_1=f(n+1)-f(1)$ ثم استنتج حساب S_1 بدلالة n .
- أحسب مجموع الألف عدد طبيعي غير المعدومة الأولى.

2. حساب S_2
- عين كثير حدود g من الدرجة الثالثة يحقق من أجل كل عدد حقيقي x : $g(x+1)-g(x)=x^2$
- أحسب S_2 بدلالة n ثم استنتج مجموع مربعات الألف عدد طبيعي غير المعدومة الأولى.

1. حساب S_1
- نفرض $f(x)=ax^2+bx+c$ حيث a ، b و c أعداد حقيقية مع $a\neq 0$

لدينا: $f(x+1)=a(x+1)^2+b(x+1)+c=ax^2+(2a+b)x+a+b+c$

ومنه $f(x+1)-f(x)=(ax^2+(2a+b)x+a+b+c)-(ax^2+bx+c)=2ax+a+b$

يكون $f(x+1)-f(x)=x$ من أجل كل عدد حقيقي x إذا و فقط إذا كان: $\begin{cases}2a=1\\ a+b=0\end{cases}$ أي $\begin{cases}a=\frac{1}{2}\\ b=-\frac{1}{2}\end{cases}$ نجد هكذا: $f(x)=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x+c$ ويمكن مثلا أخذ $c=0$.

و منه $f(x)=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x$

- نلاحظ أن $1=f(2)-f(1)$ ، $2=f(3)-f(2)$ ، ... ، $n=f(n+1)-f(n)$

و منه $1+2+...+n=[f(2)-f(1)]+[f(3)-f(2)]+...+[f(n+1)-f(n)]$

نجد هكذا بعد عملية الاختزال: $S_1=f(n+1)-f(1)$

بما أن $f(1)=0$ و $f(n+1)=\frac{(n+1)^2-(n+1)}{2}=\frac{n(n+1)}{2}$ فإن: $1+2+...+n=\frac{n(n+1)}{2}$

$1+2+...+1000=\frac{1000\times 1001}{2}=500500$

2. حساب S_2 (نتبع نفس الطريقة)
- $g(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x+c$
- $1^2+2^2+...+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
- $1^2+2^2+...+(1000)^2=\frac{1000\times 1001\times 2001}{6}$

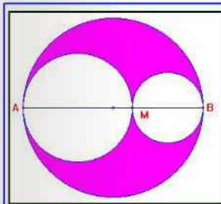
مسائل محلولة

نعتبر دائرة قطرها $[AB]$ حيث $AB=4$. M نقطة من $[AB]$

ننشئ الدائرتين اللتين قطراهما $[AM]$ و $[MB]$.

نرمز بـ S إلى مساحة الحيز الملون و بـ a إلى مساحة القرص الذي قطره $[AB]$. نضع $AM=x$.

1. أحسب S بدلالة x .
2. هل توجد وضعية للنقطة M يكون من أجلها: $S=\frac{1}{2}a$ ؟
3. عين قيم x التي يكون من أجلها: $S>\frac{1}{4}a$.



1. حساب S بدلالة x

إذا رمزنا إلى مساحة القرص الذي قطره $[AM]$ بـ a_1 و إلى مساحة القرص الذي قطره $[MB]$ بـ a_2 فإن:

$$S=a-a_1-a_2$$

لدينا: $a=\pi\left(\frac{4}{2}\right)^2=4\pi$ ، $a_1=\pi\left(\frac{x}{2}\right)^2=\frac{1}{4}\pi x^2$ و $a_2=\pi\left(\frac{4-x}{2}\right)^2=\frac{1}{4}\pi(4-x)^2$ ومنه:

$$S=4\pi-\frac{1}{4}\pi x^2-\frac{1}{4}\pi(4-x)^2$$

بعد النشر و التبسيط نجد: $S=\frac{\pi}{2}(-x^2+4x)$

2. تعيين وضعية M حيث: $S=\frac{1}{2}a$

$S=\frac{1}{2}a$ يكافئ $\frac{\pi}{2}(-x^2+4x)=\frac{1}{2}(4\pi)=2\pi$ أي: $-x^2+4x-4=0$ أي: $x^2-4x+4=0$

لدينا: $x^2-4x+4=0$ يكافئ $(x-2)^2=0$ و منه: $x=2$

وضعية النقطة M التي يكون من أجلها: $S=\frac{1}{2}a$ هي منتصف القطعة $[AB]$.

3. تعيين قيم x التي يكون من أجلها: $S>\frac{1}{4}a$

$S>\frac{1}{4}a$ يكافئ $\frac{\pi}{2}(-x^2+4x)>\frac{1}{4}(4\pi)$ أي: $-x^2+4x-2>0$

لندرس إشارة $-x^2+4x-2$

لدينا $\Delta=8$ و منه $-x^2+4x-2$ يقبل جذرين هما: $x'=2-\sqrt{2}$ و $x''=2+\sqrt{2}$

x	0		$2-\sqrt{2}$		$2+\sqrt{2}$		4
$-x^2+4x-2$		$-$	0	$+$	0	$-$	

مجموعة قيم x التي يكون من أجلها: $S>\frac{1}{4}a$ هي: $]2-\sqrt{2};2+\sqrt{2}[$.

أعمال تطبيقية

خوارزمية هورنر (Horner)

نعتبر دالة كثير حدود من الدرجة الثالثة f حيث: $f(x)=\alpha_3x^3+\alpha_2x^2+\alpha_1x+\alpha_0$ و a عدد حقيقي ثابت.

1. **معاملات هورنر المرفقة بالعدد a**

نضع: $h_3=\alpha_3$، $h_2=\alpha_2+ah_3$،
$h_1=\alpha_1+ah_2$ و $h_0=\alpha_0+ah_1$

تسمى الأعداد h_0، h_1، h_2 و h_3 معاملات هورنر المرفقة بالعدد a.

α_3	$\alpha_2 + ah_3$	$\alpha_1 + ah_2$	$\alpha_0 + ah_1$
h_3	h_2	h_1	h_0

2. **حساب $f(a)$**

تحقق أن: $f(x)=[(\alpha_3x+\alpha_2)x+\alpha_1]x+\alpha_0$ ثم استنتج أن: $f(a)=h_0$

3. **التحليل باستعمال العامل $(x-a)$**

انطلاقا من تحليل $f(x)-f(a)$ بين أن: $f(x)=(x-a)(h_3x^2+h_2x+h_1)+h_0$

4. **استعمال مجدول لتعيين معاملات هورنر**

مثال: نعتبر الدالة f المعرفة بـ: $f(x)=2x^3+x^2-5x+2$

❖ **تنظيم الحساب**

نقوم بحجز معاملات $f(x)$ في خط أفقي انطلاقا مثلا من الخلية $B1$ إلى غاية الخلية $E1$ ثم نحجز قيمة a في الخلية $A2$ و نحجز 0 في الخلية $A3$.

نحجز في الخلية $B2$ الدستور: `=$A$2*A3` و في الخلية $B3$ الدستور: $=B1+B2$

للحصول على معاملات هورنر نحدد الخليتين $B2$ و $B3$ ثم ننقلها بالزالق إلى غاية العمود E.

نقرا هكذا المعاملات المرفقة بالعدد $a=-2$: $h_3=2$، $h_2=-3$، $h_1=1$ و $h_0=0$

	A	B	C	D	E	F	G
1		2	1	-5	2	معاملات f(x)	
2	-2	0	-4	6	-2	قيمة a	
3	0	2	-3	1	0	معاملات هورنر	
4							
5		h3	h2	h1	h0		

القيمة 0   `=$A$2*A3`   =B1+B2

❖ **حساب صور: -2، 1.2، 7 و -25** (يكفي تغيير قيمة a في الخلية $A2$)

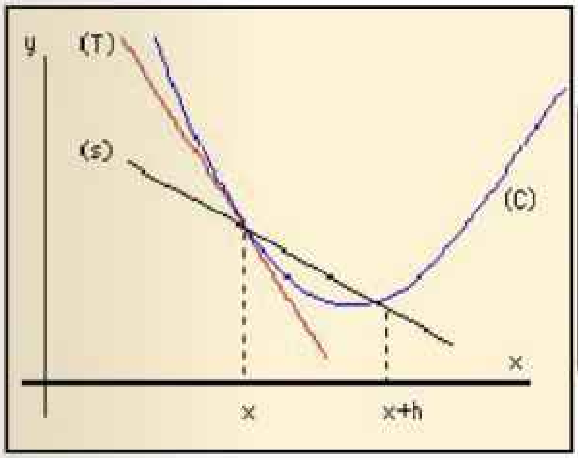
لدينا: $f(-2)=0$، $f(1.2)=0.896$، $f(7)=702$ و $f(-25)=-30498$

❖ **تحليل $f(x)$ باستعمال المعامل $(x+2)$**

بما أن $f(-2)=0$ لدينا: $f(x)=(x+2)(2x^2-3x+1)$

الاشتقاقية

الكفاءات المستهدفة



- حساب العدد المشتق لدالة عند عدد حقيقي
- تعيين معادلة مماس منحن في نقطة منه.
- حساب مشتقات الدوال المرجعية
- حساب مشتقات الدوال $f+g$ ، $f \times g$ ، $\frac{1}{g}$ ، $\frac{f}{g}$ ، $x \mapsto f(ax+b)$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

"ليونارد أولر" من أكبر العلماء الذين عرفهم التاريخ ، استقرّ في البداية بِـسان بيترسبورق ثم في برلين سنة 1741 حيث ترأس أكاديمية العلوم إلى غاية 1766 .

تخصص في علم الفلك (دراسة مسار المجرّات) ، علم الفيزياء (الحقل المغناطيسي ، البصريات ، ...) الرياضيات (الحساب ، الهندسة التفاضلية ، مرورا بالتحليل الرقمي و الوظيفي ، حساب تغيرات البيانات ، المساحات الجبرية...) ، معادلة أولر (حساب التغيرات)

هو من أحد مؤسسي التحليل الوظيفي و المعادلات التفاضلية.

EULER Leonhard
Suisse, 1707-1783

الإشتقاقية.

1.العدد المشتق.

1.1 نهاية حقيقية لدالة عند الصفر.

D_f مجال من مجموعة الأعداد الحقيقية يشمل الصفر .

نقول أن العدد الحقيقي l هو نهاية الدالة f عند النقطة 0 معناه عندما يأخذ x قيما قريبة من 0 بالقدر الكافي فإن العدد $f(x)$ يأخذ قيما قريبة من l بالقدر الذي نريد . و نكتب $\lim_{x\to0} f(x)=l$.

2.1 دالة قابلة للإشتقاق عند عدد.

تعريف: f دالة معرفة على مجال D_f من $\mathbb{R}$. x_0 عدد من D_f. القول أن الدالة f قابلة للإشتقاق عند العدد x_0 معناه الدالة : $g: h \to \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ تقبل نهاية حقيقية l عند 0 . أي $\lim_{h\to0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=l$

يسمى l العدد المشتق للدالة f في العدد x_0 . و نرمز له بـ $f'(x_0)$.

تعاليق:

• العدد $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ يسمى نسبة تزايد الدالة f بين العددين x_0 و x_0+h ، نرمز له بـ $g(h)$ ؛ وهو معرف إذا كان h غير معدوم و x_0+h عنصرا من D_f .

و نكتب $\lim_{h\to0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=f'(x_0)$.

2.الدالة المشتقة لدالة f .

تعريف: f دالة معرفة على مجال D_f من $\mathbb{R}$.

نقول أن الدالة f قابلة للاشتقاق على D_f إذا وفقط إذا كانت قابلة للاشتقاق عند كل نقطة من D_f.

تسمى الدالة التي ترفق بكل x من D_f العدد المشتق $f'(x)$ الدالة المشتقة للدالة f على D_f.

ويرمز لها بـ f' . و نكتب $f':x\to f'(x)$

مثال: f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=x^2$.

ليكن $x_0\in\mathbb{R}$ ، $\lim_{h\to0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{(x_0+h)^2-x_0^2}{h}=\lim_{h\to0}\frac{h(h+2x_0)}{h}=\lim_{h\to0}h+2x_0=2x_0$

إذن f تقبل الاشتقاق عند كل x_0 من $\mathbb{R}$ ولدينا $f'(x_0)=2x_0$.

ومنه f تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة f' معرفة بـ $f'(x)=2x$.

تمرين محلول 1

لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=x^2+2x-1$.

• عين العدد المشتق للدالة f عند $x_0=2$.

حل: من أجل كل عدد حقيقي h يختلف عن 0 لدينا :

$$\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\frac{(2+h)^2+2(2+h)-1-7}{h}$$
$$=\frac{4+4h+h^2+4+2h-8}{h}$$
$$=\frac{h^2+6h}{h}$$
$$=h+6$$
$$\lim_{h\to0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\lim_{h\to0}(h+6)$$
$$=6$$

إذن الدالة f قابلة للاشتقاق عند 2 و $f'(2)=6$.

تمرين محلول 2

f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=-x^2+2$.

أثبت أن الدالة f قابلة للاشتقاق على وعيّن دالتها المشتقة f'.

طريقة: لمعرفة ما إذا كانت دالة f قابلة للاشتقاق عند عدد x_0 يمكننا باستعمال التعريف في البداية حساب نسبة التزايد $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ للدالة f بين العددين المتمايزين x_0 و x_0+h ثم نحسب $\lim_{h\to0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$.

حل:

لدينا $f(x)=-x^2+2$. الدالة f معرفة على $\mathbb{R}$.

ليكن x_0 عدد حقيقي . $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ هي نسبة تزايد الدالة f بين العددين x_0 و x_0+h مع $h\neq0$

ومنه $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\frac{\left[-(x_0+h)^2+2\right]-(-x_0^2+2)}{h}=\frac{-2x_0h-h^2}{h}=-2x_0-h$

وبالتالي: $\lim_{h\to0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\lim_{h\to0}(-2x_0-h)=-2x_0$

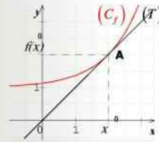
إذن الدالة f قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$. ولدينا $f'(x)=2x$.

التفسير الهندسي للعدد المشتق.

1. مماس لمنحن عند نقطة.

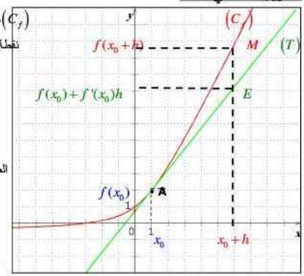
تعريف: f دالة معرفة على مجال D_f من $\mathbb{R}$. x_0 عدد من D_f حيث f قابلة للإشتقاق عند x_0 و $f'(x_0)$ العدد المشتق عند العدد x_0 . ليكن (C_f) رسمها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد $(O,\vec{i},\vec{j})$. مماس المنحنى (C_f) عند النقطة $A(x_0,f(x_0))$ هو المستقيم الذي يشمل A و معامل توجيهه $f'(x_0)$. معادلته هي $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$

المماس (T) هو عبارة عن مستقيم معامل توجيهه $f'(x_0)$ إذن معادلة (T) من الشكل $y=f'(x_0)x+b$ و النقطة $A(x_0,f(x_0))$ تنتمي إلى (T) ومنه وبالتعويض $b=f(x_0)-f'(x_0)x_0$. وبالتالي $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$



2. التقريب التآلفي لدالة:

(C_f) هو الرسم البياني لدالة f قابلة للإشتقاق عند نقطة x_0 و (T) مماس (C_f) عند النقطة $A(x_0;f(x_0))$. نعوض محليا عند x_0 الدالة f بالدالة التآلفية g الممثلة بالمستقيم (T). أي نعوض العدد الحقيقي $f(x_0+h)$ بالعدد $f(x_0)+f'(x_0)h$. من أجل h قريب من الصفر $f(x_0)+f'(x_0)h$ يسمى تقريبا تآلفيا للعدد $f(x_0+h)$. بوضع $x=x_0+h$ ومن أجل x قريب من x_0 فإن $f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$ يسمى تقريبا تآلفيا لـ $f(x)$ بجوار x_0. نقبل أن أحسن تقريب تآلفي بجوار x_0 للدالة f هو الدالة $x\mapsto f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$.



تمرين محلول 3

f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=-x^2+2$.
ليكن (C_f) رسمها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم $(O,\vec{i},\vec{j})$
• عين معادلة لـ (T) مماس المنحنى (C_f) عند النقطة A التي فاصلتها 1 .

حل:

• في التمرين المحلول الأول رأينا أن الدالة f قابلة للاشتقاق عند كل نقطة x من $\mathbb{R}$ و $f'(x)=-2x$ ؛ إذن الدالة f قابلة للاشتقاق عند العدد 1 و $f'(1)=-2$ و بالتالي -2 هو معامل توجيه المماس (T) للمنحنى (C_f) عند A لدينا $f(1)=1$.
معادلة للمماس (T) هي : $y=f'(1)(x-1)+f(1)$.
و نستنتج أن معادلة للمماس (T) هي $y=-2x+3$.

تمرين محلول 4

لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=x^2+2x+1$.
ليكن (C_f) رسمها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم (O,I,J) .
• عين معادلة لـ (T) مماس المنحنى (C_f) عند النقطة A التي فاصلتها 0 .
• عين تقريبا تآلفيا للدالة f بجوار 0 .
• عين قيمة مقربة للعدد $(1.00004)^2$.

حل:

• بنفس الطريقة المعتمدة في التمرين المحلول1 الدالة f قابلة للإشتقاق عند كل نقطة x من $\mathbb{R}$ ، و $f'(x)=2x+2$ ، إذن الدالة f قابلة للإشتقاق عند النقطة 0 و $f'(0)=2$ و بالتالي 2 هو معامل توجيه المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة التي فاصلتها 0. لدينا $f(0)=1$ و منه معادلة للمماس (T) هي: $y=f'(0)(x)+f(0)$.
و نستنتج أن معادلة للمماس (T) هي $y=2x+1$.
• تقريب تآلفي لـ f بجوار 0 هو $f'(0)(x)+f(0)$ أي $2x+1$. و الدالة $g:x\mapsto 2x+1$ هي أحسن تقريب تآلفي لها.
• $1.00004=1+4\times10^{-5}$ و $f(x)=(1+x)^2$ و منه قيمة مقربة للعدد $(1.00004)^2$ هي $1+2\times4\times10^{-5}$ أي 1.00008 إذن قيمة مقربة للعدد $(1.00004)^2$ هي 1.00008

مشتقات الدوال المألوفة :

مبرهنة1: الدالة التآلفية $f:x\to ax+b$ حيث a و b عددان حقيقيان ، قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و دالتها المشتقة هي :

$f':x\to a$

برهان: من أجل كل عدد حقيقي h يختلف عن 0 لدينا :

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\frac{a(x_0+h)+b-ax_0-b}{h}=\frac{ah}{h}=a$$

$\lim\limits_{h\to0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=a$ و منه صحة المبرهنة.

ملاحظة:

* إذا كان $a=1$ و $b=0$ نستنتج أن الدالة $f:x\to x$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و دالتها المشتقة هي : $f':x\mapsto 1$.
* إذا كان $a=0$ نستنتج أن الدالة $f:x\mapsto b$ (الدالة الثابتة) قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و دالتها المشتقة هي : $f':x\mapsto 0$

مبرهنة 2: الدالة $f:x\mapsto x^n$ (n عدد طبيعي غير معدوم) قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و دالتها المشتقة هي :

$f':x\mapsto nx^{n-1}$

مبرهنة 3: الدالة $f:x\mapsto\frac{1}{x}$ قابلة للإشتقاق على $]-\infty,0[$ و على $]0,+\infty[$ و دالتها المشتقة هي :

$f':x\to-\frac{1}{x^2}$

مبرهنة 4: الدالة $f:x\mapsto\sqrt{x}$ قابلة للإشتقاق على $]0,+\infty[$ و دالتها المشتقة هي : $f':x\to\frac{1}{2\sqrt{x}}$

مبرهنة5: (تقبل بدون برهان) الدالة $f:x\mapsto\sin x$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و دالتها المشتقة هي :

$f':x\to\cos x$

مبرهنة 6: (تقبل بدون برهان) الدالة $f:x\mapsto\cos x$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و دالتها المشتقة هي :

$f':x\to-\sin x$

تمرين محلول 5

f و g دالتان معرفتان على المجال $]-\infty,0[$ بـ: $f(x)=x^2$ و $g(x)=\frac{1}{x}$.

ليكن (C_f) و (C_g) رسميهما البيانيين في المستوي المنسوب إلى معلم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

عين المماسات المشتركة للمنحنيين (C_f) و (C_g) .

حل: حسب المبرهنتين 1 و2 ، الدالتان f و g قابلتان للإشتقاق على $]-\infty,0[$ ولدينا:

$f'(x)=2x$ و $g'(x)=-\frac{1}{x^2}$.

$A(x_0,f(x_0))$ نقطة من (C_f) و $B(x_1,g(x_1))$ نقطة من (C_g) .

ليكن (T) مماس (C_f) عند النقطة A و (T') مماس (C_g) عند النقطة B .

معادلة لـ (T): $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$ أي $y=2x_0x-x_0^2$

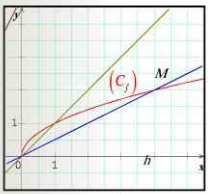
معادلة لـ (T'): $y=g'(x_1)(x-x_1)+g(x_1)$ أي $y=-\frac{1}{x_1^2}x+\frac{2}{x_1}$

(T) و (T') منطبقان معناه $\begin{cases}2x_0=-\frac{1}{x_1^2}\\ -x_0^2=\frac{2}{x_1}\end{cases}$

بحل هذه الجملة نحصل على $x_0=-2$ و $x_1=-\frac{1}{2}$.

و منه معادلة (T) و (T'): $y=-4x-4$.

تمرين محلول 6



الدالة f المعرفة على $[0,+\infty[$ بـ: $f(x)=\sqrt{x}$. قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$ و دالتها المشتقة f' معرفة من أجل كل x من $]0,+\infty[$ كما يلي: $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$.

نريد دراسة قابلية إشتقاق f عند 0. ليكن (C_f) الرسم البياني لـ f في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد $(O,\vec{i},\vec{j})$ (أنظر الشكل المقابل)

M نقطة من (C_f) فاصلتها h . معامل توجيه المستقيم (OM) هو $\frac{f(h)}{h}$ أي $\frac{1}{\sqrt{h}}$.كلما اقترب h من الصفر اقتربت النقطة M من النقطة O و عليه يأخذ $\frac{1}{\sqrt{h}}$ قيما كبيرة أكثر فأكثر

نقر عندئذ أن الوضعية النهائية للمستقيم (OM) هي حامل محور التراتيب .

نقول أن الدالة f غير قابلة للإشتقاق عند النقطة 0 و المنحنى (C_f) يقبل مماسا موازيا لحامل محور التراتيب .

عمليات على الدوال المشتقة:

مشتقة مجموع دالتين:

مبرهنة: u و v دالتان قابلتان للإشتقاق على مجال D من $\mathbb{R}$.الدالة $(u+v)$ قابلة للإشتقاق على D ودالتها المشتقة هي: $(u+v)'=u'+v'$.

برهان: من أجل كل عدد حقيقي h يختلف عن 0 لدينا:

$$\frac{(u+v)(x_0+h)-(u+v)(x_0)}{h}=\frac{u(x_0+h)+v(x_0+h)-u(x_0)-v(x_0)}{h}$$
$$=\frac{u(x_0+h)-u(x_0)}{h}+\frac{v(x_0+h)-v(x_0)}{h}$$

نضع $g_1(h)=\frac{u(x_0+h)-u(x_0)}{h}$ و $g_2(h)=\frac{v(x_0+h)-v(x_0)}{h}$.

بما أن u و v قابلتان للإشتقاق على D لدينا من أجل كل x_0 من D $\lim_{h\to0} g_1(h)=u'(x_0)$ و $\lim_{h\to0} g_2(h)=v'(x_0)$

و منه $\lim_{h\to0}\frac{(u+v)(x_0+h)-(u+v)(x_0)}{h}=u'(x_0)+v'(x_0)$ و منه صحة المبرهنة.

مشتقة جداء دالتين:

مبرهنة: لتكن دالتان u و v قابلتان للإشتقاق على D (D هو مجال أو إتحاد مجالات من $\mathbb{R}$).الدالة $(u.v)$ قابلة للإشتقاق على D و دالتها المشتقة هي : $(u.v)'=u'.v+u.v'$.

برهان: من أجل كل عدد حقيقي h يختلف عن 0 لدينا:

$$\frac{(u.v)(x_0+h)-(u.v)(x_0)}{h}=\frac{u(x_0+h).v(x_0+h)-u(x_0).v(x_0)}{h}$$
$$=\frac{u(x_0+h).v(x_0+h)-u(x_0).v(x_0)+v(x_0+h).u(x_0)-v(x_0+h).u(x_0)}{h}$$
$$=\frac{u(x_0+h)-u(x_0)}{h}v(x_0+h)+\frac{v(x_0+h)-v(x_0)}{h}u(x_0)$$

نضع $g_1(h)=\frac{u(x_0+h)-u(x_0)}{h}$ و $g_2(h)=\frac{v(x_0+h)-v(x_0)}{h}$ بما أن u و v قابلتان للاشتقاق على D لدينا من أجل كل x_0 من D $\lim_{h\to0} g_1(h)=u'(x_0)$ و $\lim_{h\to0} g_2(h)=v'(x_0)$ و $\lim_{h\to0} v(x_0+h)=v(x_0)$

ومنه $\lim_{h\to0}\frac{(u.v)(x_0+h)-(u.v)(x_0)}{h}=u'(x_0).v(x_0)+u(x_0).v'(x_0)$ إذن صحة المبرهنة.

حالة خاصة: الدالة (λu) (حيث λ عدد حقيقي) قابلة للإشتقاق على D و دالتها المشتقة هي : $(\lambda u)'=\lambda u'$.

تمرين محلول 6

لتكن الدالة f المعرفة على $]0,+\infty[$ بـ: $f(x)=x^3+\frac{1}{x}+\sqrt{x}$.

عين الدالة المشتقة f' للدالة f .

حل:

الدالة f هي مجموع ثلاثة دوال u ، v و w . حيث: $u:x\mapsto x^3$ ، $v:x\to\frac{1}{x}$ و $w:x\to\sqrt{x}$.

هذه الدوال الثلاثة قابلة للإشتقاق على $]0,+\infty[$ ونعلم أن : $u':x\mapsto 3x^2$ ، $v':x\mapsto -\frac{1}{x^2}$ و $w':x\to\frac{1}{2\sqrt{x}}$.

إذن الدالة f قابلة للإشتقاق على $]0,+\infty[$. ودالتها المشتقة هي : $f':x\to 3x^2-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{2\sqrt{x}}$.

تمرين محلول 7

لتكن الدالة f المعرفة على $]0,+\infty[$ بـ: $f(x)=(x^3+x+1)\sqrt{x}$.

عين الدالة المشتقة f' للدالة f .

حل:

الدالة f هي جداء دالتين u و v . حيث: $u:x\to x^3+x+1$ ، $v:x\to\sqrt{x}$.

هاتان الدالتان قابلتان للإشتقاق على $]0,+\infty[$ ونعلم أن : $u':x\mapsto 3x^2+1$ ، $v':x\to\frac{1}{2\sqrt{x}}$.

إذن الدالة f قابلة للإشتقاق على $]0,+\infty[$.ودالتها المشتقة f'هي: $f'(x)=(3x^2+1)\sqrt{x}+(x^3+x+1)\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$.

تمرين محلول 8

لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=-7x^3+4x^2+3x-2$.

عين الدالة المشتقة f' للدالة f .

حل:

الدالة f هي دالة كثير حدود .إذن فهي قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$(تطبيق المبرهنات السابقة). و دالتها المشتقة f' حيث :

$$f'(x)=(-7)\times(3x^2)+(4)\times(2x)+(3)\times(1)+0$$
$$f'(x)=-21x^2+8x+3$$

عمليات على الدوال المشتقة (تابع):

مشتقة مقلوب دالة:

مبرهنة: v دالة قابلة للاشتقاق على مجال D من $\mathbb{R}$ و v لا تنعدم على D. الدالة $\left(\frac{1}{v}\right)$ قابلة للاشتقاق على D ودالتها المشتقة هي : $\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}$.

برهان: من أجل كل عدد حقيقي h يختلف عن 0 لدينا :

$$\frac{\left(\frac{1}{v}\right)(x_0+h)-\left(\frac{1}{v}\right)(x_0)}{h} = \frac{\left(\frac{1}{v(x_0+h)}\right)-\left(\frac{1}{v(x_0)}\right)}{h}$$
$$=\left(\frac{v(x_0)-v(x_0+h)}{v(x_0+h).v(x_0).h}\right)$$
$$=\frac{1}{v(x_0+h).v(x_0)}\left(-\frac{v(x_0+h)-v(x_0)}{h}\right)$$

بما أن v قابلة للإشتقاق على D لدينا من أجل كل x_0 من D و $\lim\limits_{h\to 0}\frac{\left(\frac{1}{v}\right)(x_0+h)-\left(\frac{1}{v}\right)(x_0)}{h} = -\frac{v'(x_0)}{\left(v(x_0)\right)^2}$

ومنه صحة المبرهنة.

مشتقة نسبة دالتين:

مبرهنة: لتكن دالتان u و v قابلتان للإشتقاق على D (D هو مجال أو إتحاد مجالات من $\mathbb{R}$) و v لا تنعدم على D.

الدالة $\left(\frac{u}{v}\right)$ قابلة للإشتقاق على D و دالتها المشتقة هي : $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v-uv'}{v^2}$.

برهان: نلاحظ أن $\frac{u}{v}$ يكتب $u\times\frac{1}{v}$ و نطبق مبرهنة مشتقة مقلوب دالة و مبرهنة مشتقة جداء دالتين .

مشتقة الدالة: $f:x\to u(ax+b)$

مبرهنة: (تقبل بدون برهان) u قابلة للإشتقاق على مجال D من $\mathbb{R}$. a و b عددان حقيقيان. E مجموعة الأعداد الحقيقية x حيث $ax+b$ ينتمي إلى D. الدالة $f:x\mapsto u(ax+b)$ قابلة للإشتقاق على E و دالتها المشتقة f' هي : $f':x\mapsto au'(ax+b)$. حيث u' مشتقة الدالة u على D.

ملاحظة: الدالة f هي دالة مركبة من الدالة $k:x\to ax+b$ متبوعة بالدالة u أي $f=u\circ k$.

تمرين محلول 9

لتكن الدالة f المعرفة كما يلي : $f(x)=\frac{3x+5}{2x-4}$.

- عين مجموعة تعريف الدالة f .
- عين الدالة المشتقة f' للدالة f .

حل:

- تكون الدالة f معرفة إذا و فقط إذا كان $2x-4\neq 0$.

$2x-4=0$ معناه $x=2$

لتكن D_f مجموعة تعريف الدالة f و منه $D_f=\mathbb{R}-\{2\}=]-\infty,2[\cup]2,+\infty[$.

- الدالة f هي نسبة دالتين u و v أي $f=\frac{u}{v}$. حيث: $u:x\mapsto 3x+5$ ، $v:x\to 2x-4$.

هاتان الدالتان قابلتان للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و بالتالي على كل من المجالين $]-\infty,2[$ و $]2,+\infty[$ نعلم أن : $u':x\to 3$ ، $v':x\mapsto 2$.

بما أن $v(x)\neq 0$ على D_f وحسب مبرهنة نسبة دالتين فإن الدالة f قابلة للإشتقاق على كل من المجالين $]-\infty,2[$ و $]2,+\infty[$ و دالته المشتقة f' معرفة بـ: $f'(x)=\frac{3(2x-4)-2(3x+5)}{(2x-4)^2}=\frac{-22}{(2x-4)^2}$

تمرين محلول 10

لتكن الدالة f المعرفة على $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ كما يلي : $f(x)=\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$.

- عين الدالة المشتقة f' للدالة f .

حل:

- الدالة f معرفة على $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ لأن على هذا المجال $\cos x\neq 0$.

الدالة f هي نسبة دالتين u و v أي $f=\frac{u}{v}$. حيث: $u:x\mapsto \sin x$ ، $v:x\mapsto \cos x$.

هاتان الدالتان قابلتان للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و بالتالي على $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ ونعلم أن : $u':x\mapsto \cos x$ ، $v':x\mapsto -\sin x$.

بما أن $v(x)\neq 0$ على $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ وحسب مبرهنة نسبة دالتين فإن الدالة f قابلة للإشتقاق على $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$.

دالتها المشتقة f' معرفة بـ :

$$f'(x)=\frac{\cos x\times\cos x-\sin x\times(-\sin x)}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}=1+\tan^2 x$$

جدول ملخص:

الدالة f	مجالات قابلية الإشتقاق	الدالة المشتقة f'
$x \to a$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto 0$
$x \to ax+b$	$\mathbb{R}$	$x \to a$
$x \mapsto x^2$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto 2x$
$x \mapsto x^n \ (n \in \mathbb{N})$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto n x^{n-1}$
$x \mapsto \frac{1}{x}$	$]-\infty, 0[$ و $]0, +\infty[$	$x \mapsto -\frac{1}{x^2}$
$x \mapsto \frac{1}{x^n} \ (n \in \mathbb{N})$	$]-\infty, 0[$ و $]0, +\infty[$	$x \mapsto -\frac{n}{x^{n+1}}$
$x \to \sqrt{x}$	$]0, +\infty[$	$x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$
$x \mapsto \sin x$	$\mathbb{R}$	$x \to \cos x$
$x \to \cos x$	$\mathbb{R}$	$x \to -\sin x$
$u+v$	يجب أخذ شروط كل دالة بعين الاعتبار	$u'+v'$
$u.v$		$u'.v+u.v'$
$\lambda u \ (\lambda \in \mathbb{R})$		$\lambda u'$
$\frac{1}{u}$		$-\frac{u'}{u^2}$
$\frac{u}{v}$		$\frac{u'v-uv'}{v^2}$
$x \mapsto u(ax+b)$		$x \to au'(ax+b)$

تمرين محلول 11

لتكن الدالة f المعرفة كما يلي : $f(x)=\sqrt{2x-6}$.

- عين مجموعة تعريف الدالة f .
- عين الدالة المشتقة f' للدالة f .

حل:

- تكون الدالة f معرفة إذا وفقط إذا كان $2x-6 \geq 0$.

$2x-6 \geq 0$ معناه $x \geq 3$

لتكن D_f مجموعة تعريف الدالة f و منه $D_f=[3,+\infty[$.

- الدالة f هي مركبة من الدالة $v: x \mapsto 2x-6$ تتبعها الدالة $u: x \mapsto \sqrt{x}$.

الدالة v قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و نعلم أن $v': x \mapsto 2$.

الدالة u قابلة للإشتقاق على $]0,+\infty[$ و نعلم أن $v': x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

الدالة v موجبة تماما على $]3,+\infty[$. إذن الدالة f قابلة للإشتقاق على $]3,+\infty[$

وتطبيقا لمبرهنة مشتقة الدالة $x \to u(ax+b)$ نجد أن : $f'(x)=2\times\frac{1}{2\sqrt{2x-6}}$

$=\frac{1}{\sqrt{2x-6}}$

تمرين محلول 12

لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x)=\cos(-4x+3)$.

- عين الدالة المشتقة f' للدالة f .

حل:

- الدالة f هي مركبة من الدالة $v: x \mapsto -4x+3$ تتبعها الدالة $u: x \to \cos x$.

الدالة v قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و نعلم أن $v': x \mapsto -4$.

الدالة u قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و نعلم أن $v': x \to -\sin x$.

الدالة f هي مركبة من الدالة $v: x \to -4x+3$ تتبعها الدالة $u: x \to \cos x$ الدالة f قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$.

وتطبيقا لمبرهنة مشتقة الدالة $x \to u(ax+b)$ نجد أن : $f'(x)=(-4)\times[-\sin(-4x+3)]$

$=4\sin(-4x+3)$

كيفية إنشاء مماس لقطع مكافئ و لقطع زائد.

مسألة1: مماس لقطع مكافئ.

المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(0;\vec{i},\vec{j})$. ليكن (P) لقطع المكافئ الممثل للدالة : $f:x\mapsto\frac{1}{k}x^2$ حيث k عدد حقيقي غير معدوم . لتكن A النقطة من (P) التي فاصلتها a ($a\neq0$).

- عين بدلالة a معادلة للمماس (T) للمنحنى (P) عند النقطة A.
- عين إحداثيتي نقطة تقاطع المماس (T) مع محور الفواصل .
- استنتج إنشاء بسيطا للمماس (T).

تطبيق: المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(0;\vec{i},\vec{j})$. ليكن (P) القطع المكافئ الممثل للدالة : $f:x\mapsto-3x^2$.

- أنشئ (P) .
- أنشئ المماس (T_1) للمنحنى (P) عند النقطة A التي فاصلتها 1.
- أنشئ المماس (T_2) للمنحنى (P) عند النقطة B التي فاصلتها -2 .
- أنشئ المماس (T_3) للمنحنى (P) عند النقطة C التي فاصلتها $-\frac{1}{\sqrt{3}}$.

مسألة2: مماس لقطع زائد.

المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(0;\vec{i},\vec{j})$ ليكن (H) القطع الزائد الممثل للدالة : $f:x\mapsto\frac{1}{x}$. لتكن M نقطة من (H) فاصلتها a ($a\neq0$).

- عين مجموعة تعريف الدالة f .
- عين بدلالة a معادلة للمماس (T) للمنحنى (H) عند النقطة M.
- عين إحداثيتي نقطتي تقاطع المماس (T) مع محوري المعلم . لتكن A و B هاتين النقطتين.
- تأكد أن M منتصف للقطعة $[AB]$.
- استنتج إنشاء بسيطا للمماس (T).
- أنشئ (H).
- أنشئ المماس (T_1) للمنحنى (H) عند النقطة R التي فاصلتها -1.
- أنشئ المماس (T_2) للمنحنى (H) عند النقطة N التي فاصلتها -3 .
- أنشئ المماس (T_3) للمنحنى (H) عند النقطة P التي فاصلتها $-\frac{1}{2}$.

تقريبات تآلفية مألوفة عند0:

تذكير: إذا كانت f دالة قابلة للاشتقاق عند عدد a فإن:

$f(x)\approx f(a)+f'(a)\times(x-a)$ من أجل x قريب من a

أو $f(a+h)\approx f(a)+f'(a)\times h$ من أجل h قريب من 0 $(x=a+h)$

1. أنقل ثم أكمل ملئ الجدول التالي:

$f(x)=$	$(1+x)^2$	$(1+x)^3$	$\sqrt{1+x}$	$\frac{1}{1+x}$	$\frac{1}{(1+x)^2}$	$\cos x$	$\sin x$
التقريب التآلفي عند0	$1+2x$					1	

2. باستعمال التقريب التآلفي المناسب أحسب قيمة مقربة لكل من الأعداد التالية:

$\frac{1}{1,003}$ ، $\frac{1}{0,98}$ ، $(1,003)^3$ ، $(0.98)^3$ ، $(1,002)^2$ ، $(0,99)^2$ ، $\sqrt{1,004}$ ، $\sqrt{0,99}$ ، $\frac{1}{(1.01)^2}$ ، $\frac{1}{(0.99)^2}$.

تطبيق:

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]-1,+\infty[$ بـ:

$f(x)=\frac{1}{x+1}$ و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم $(O;\vec{i},\vec{j})$.

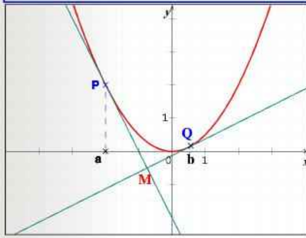
- ❖ عين المعادلة المختصرة لـ (Δ) مماس المنحني (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0 .
- ❖ لتكن g الدالة التي تمثيلها البياني (Δ). عين، باستعمال الآلة الحاسبة البيانية، مجالا محتوى في المجال $\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]$ يكون فيه: $f(x)-g(x)\leq10^{-3}$.
- ❖ بين أنه من أجل كل x من $\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]$ لدينا: $0\leq\frac{1}{x+1}-(1-x)\leq2x^2$ (1)
- ❖ عين، باستعمال العلاقة (1) ، مجالا محتوى في المجال $\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]$ يكون فيه: $f(x)-g(x)\leq10^{-2}$.

الهدف من هذه المسألة هو البحث عن مماسين متعامدين لقطع مكافئ .

المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.لتكن الدالة f المعرفة على

حيث أن $f(x)=\frac{1}{2}x^2$ و ليكن $\left(C_f\right)$ رسمها البياني في المعلم $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

أوجد مجموعة النقط M من المستوي التي منها يمكن إنشاء مماسين للمنحنى $\left(C_f\right)$ متعامدين.



نفرض وجود نقطة M من المستوي منها يمكن رسم مماسين للمنحنى $\left(C_f\right)$متعامدين ونضع $M\left(x_0,y_0\right)$ ليكن (T) أحد المماسين المتعامدين ولتكن النقطة P نقطة التماس ، نضع a فاصلة P ، ليكن (T') المماس الثاني ولتكن النقطة Q نقطة التماس ، نضع b فاصلة Q. (a و b عددان حقيقيان غير معدومين). الدالة f قابلة للاشتقاق على ℝ ودالتها المشتقة f' معرفة كما يلي : $f'(x)=x$.

المماس (T) معادلته: $y=ax-\frac{1}{2}a^2$.

المماس (T')معادلته: $y=bx-\frac{1}{2}b^2$. النقطة M تنتمي إلى (T) ومنه $y_0=ax_0-\frac{1}{2}a^2$ أي $a^2-2ax_0+2y_0=0$.

النقطة M تنتمي إلى (T') ومنه $y_0=bx_0-\frac{1}{2}b^2$ أي $b^2-2bx_0+2y_0=0$.

بما أن (T) و (T') متعامدين فإن جداء معاملي توجيههما يساوي -1 أي $a\times b=-1$.

من الجملة $\left.\begin{matrix} a^2-2ax_0+2y_0=0 \\ b^2-2bx_0+2y_0=0 \\ a\times b=-1 \end{matrix}\right\}$ نستنتج $\left.\begin{matrix} ba^2-2abx_0+2by_0=0 \\ ab^2-2abx_0+2ay_0=0 \\ a\times b=-1 \end{matrix}\right\}$ و منه $y_0=-\frac{1}{2}$

إذن النقطة M تنتمي إلى المستقيم (Δ) الذي معادلته $y=-\frac{1}{2}$.

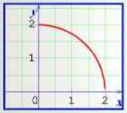
المسألة العكسية: لتكن نقطة $M\left(x_0,-\frac{1}{2}\right)$ تنتمي إلى المستقيم (Δ) الذي معادلته $y=-\frac{1}{2}$. ليكن (T) المماس لـ $\left(C_f\right)$ عند نقطة التماس التي فاصلتها a و يشمل النقطة M ، معادلة لـ (T) $y=ax-\frac{1}{2}a^2$.

النقطة M تنتمي إلى (T) ومنه $-\frac{1}{2}=ax_0-\frac{1}{2}a^2$ ومنه $a^2-2ax_0-1=0$ (معادلة من الدرجة الثانية ذات المجهول a)

المميز x_0^2+1 موجب تماما . و منه المعادلة تقبل حلين وبالتالي يوجد مماسان يشملان M ، من جهة أخرى جداء الحلين يساوي -1 ومنه المماسان متعامدان لأن الحلين هما معاملي توجيه المماسين .

إذن مجموعة النقط M هي المستقيم الذي معادلته $y=-\frac{1}{2}$.

المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$. f دالة معرفة على المجال $[0,2]$ كما يلي: $f(x)=\sqrt{4-x^2}$. $\left(C_f\right)$ رسمها البياني (انظر الشكل)



1) ماذا تخمن بالنسبة :للمماس عند النقطة التي فاصلتها0 ، للمماس عند النقطة التي فاصلتها2 و لوجود محور تناظر.

2) أثبت أن الدالة f قابلة للاشتقاق على $[0;2[$.

- تأكد أن $f(x)$ تكتب على الشكل $f(x)=\sqrt{2-x}\times\sqrt{2+x}$ ثم عين f' مشتقة f على المجال $[0;2[$
- اكتب معادلة المماس لـ $\left(C_f\right)$ عند النقطة التي فاصلتها 0 .

3) علما أن الدالة $x\mapsto\sqrt{x}$ غير قابلة للاشتقاق عند 0 ،عين المماس لـ $\left(C_f\right)$ عند النقطة التي فاصلتها 2.

4) لتكن M نقطة كيفية من $\left(C_f\right)$فاصلتها x ، (D) المستقيم ذو المعادلة $y=x$.نسمي M' نقطة من $\left(C_f\right)$ترتيبها x .عين احداثيي M و M' .

أثبت أن (D) محور القطعة $[MM']$ و استنتج أن (D) محور تناظر للمنحنى $\left(C_f\right)$.

1) التخمين

- المماس عند0 يوازي محور الفواصل ، المماس عند 2 يوازي محور التراتيب ، المنصف الأول محور تناظر.

2) نعتبر u و v حيث $u:x\mapsto 4-x^2$ قابلة للاشتقاق على و $v:x\mapsto\sqrt{x}$ قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$

لدينا $f=\sqrt{u}$ قابلة للاشتقاق على $[0;2[$ لأن $4-x^2>0$ من أجل كل x من المجال $[0;2[$

- $4-x^2=(2-x)(2+x)$

في المجال $[0;2[$ يكون $2-x>0$ و $2+x>0$

ومنه $f(x)=\sqrt{2-x}\sqrt{2+x}$

- حساب $f'(x)$: $f'(x)=\frac{-x}{\sqrt{4-x^2}}$

3) المماس لـ $\left(C_f\right)$ عند النقطة التي فاصلتها 2 يوازي محور التراتيب .

4) $M\left(x;\sqrt{4-x^2}\right)$ ، $M'(x';x)$

حساب x' : $f(x')=x$ و منه $\sqrt{4-x'^2}=x$ و منه $x'=\sqrt{4-x^2}$ ، إذن $M'\left(\sqrt{4-x^2};x\right)$

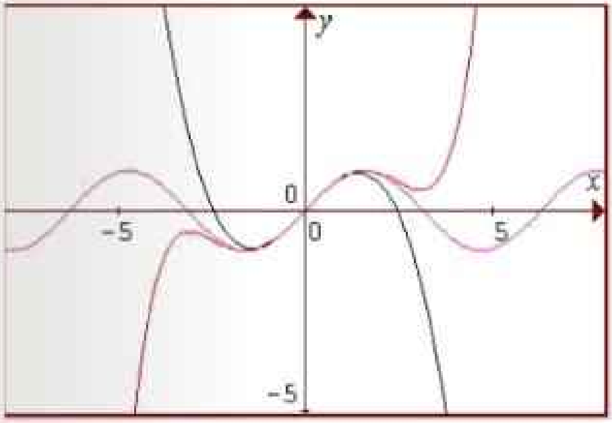
- المثلث OMM' متساوي الساقين إذن (D) محور القطعة $[MM']$

النتيجة : المنحنى $\left(C_f\right)$ يقبل المستقيم (D)كمحور تناظر .

4

تطبيقات الاشتقاقية

الكفاءات المستهدفة



- تعيين اتجاه تغير دالة.
- استعمال المشتق لتعيين القيم الحدية.
- حل مسائل تستخدم فيها دوال ناطقة و دوال صماء.

ولد **إسحاق نيوتن** (Sir Isaac Newton) سنة 1643 بوولسثروب في مقاطعة لينكنشاير (انجلترا).كان فيلسوفا، رياضياتيا و فيزيائيا . قدّم نيوتن ورقة علمية وصف فيها قوة الجاذبية الكونية ومهد الطريق لعلم الميكانيكا الكلاسيكية عن طريق قوانين الحركة. يشارك نيوتن ليبنيز الحق في تطوير علم الحساب التفاضلي والمتفرع من الرياضيات.

نيوتن كان الأول في برهنة أن الحركة الأرضية وحركة الأجرام السماوية تُحكم من قبل القوانين الطبيعية ويرتبط إسم العالم نيوتن بالثورة العلمية. يرجع الفضل لنيوتن بتزويد القوانين الرياضياتية لإثبات نظريات كبلر والمتعلقة بحركة الكواكب. توفي سنة 1727.

إسحاق نيوتن 1643 / 1727

تطبيقات الإشتقاقية.

إتجاه تغير دالة:

مبرهنة:(تقبل بدون برهان) لتكن دالة f معرفة و قابلة للإشتقاق على مجال D_f و f' دالتها المشتقة .

- إذا كانت f' موجبة تماما(يمكن أن تكون f' معدومة من أجل قيم منعزلة من D_f) على المجال D_f فإن الدالة f متزايدة تماما على المجال D_f.
- إذا كانت f' سالبة تماما(يمكن أن تكون f' معدومة من أجل قيم منعزلة من D_f) على المجال D_f فإن الدالة f متناقصة تماما على المجال D_f.
- إذا كانت f' معدومة على المجال D_f فإن الدالة f ثابتة على المجال D_f.

ملاحظة: إذا كانت دالة f إما متزايدة تماما و إما متناقصة تماما على مجال D_f نقول أن الدالة f رتيبة تماما على المجال D_f .

مثال: لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f: x \mapsto -x^3+2$.

الدالة f قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و دالتها المشتقة f' حيث : $f': x \mapsto -3x^2$.

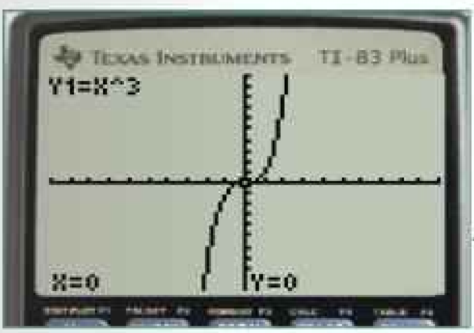
الدالة f' سالبة تماما على $\mathbb{R}^*$ و تنعدم في النقطة المعزولة 0 إذن الدالة f متناقصة تماما على $\mathbb{R}$.

القيم الحدية المحلية لدالة:

مبرهنة:(تقبل بدون برهان) لتكن دالة f معرفة و قابلة للإشتقاق على مجال I و f' دالتها المشتقة .

- إذا انعدمت الدالة المشتقة f' عند قيمة c من I مغيرة إشارتها فإنه يوجد مجال مفتوح I' محتوى في I يشمل c تقبل فيه f قيمة حدية $f(c)$. تسمى $f(c)$ قيمة حدية محلية .

ملاحظات:
- يمكن وجود عدة قيم حدية محلية على I .
- إذا انعدمت الدالة المشتقة f' عند قيمة c من I فإن الرسم البياني للدالة f يقبل مماسا موازيا لحامل محور الفواصل عند النقطة التي فاصلتها c .



تعليق: في صورة شاشة الآلة TI-83 Plus المقابلة، الرسم يمثل الدالة $f: x \mapsto x^3$. مشتقتها $f': x \mapsto 3x^2$، الدالة f' تنعدم عند 0 و لا تغير الإشارة . و $f(0)=0$.

0 ليست قيمة حدية محلية للدالة f .

تمرين محلول 1

لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-2x+1$.

1) أدرس تغيرات الدالة f .

2) عين مجالات من $\mathbb{R}$ تقبل فيها f قيما حدية محلية يطلب تعيينها

طريقة: لدراسة إتجاه تغيرات دالة يمكن أن نعين إشارة دالتها المشتقة بعد التأكد من وجودها و حسابها ثم نلخص كل النتائج في جدول يسمى جدول التغيرات .

حل:

1) الدالة f دالة كثيرة حدود فهي معرفة و قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$. لتكن f' دالتها المشتقة على $\mathbb{R}$.

من أجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}$ ، $f'(x)=x^2-x-2$ وهي ثلاثي حدود من الدرجة الثانية مميزه $\Delta=9$.

-1 و 2 هما جذران له ، يمكن إذن استنتاج إشارته وفق الجدول الآتي:

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

• $f'(x)>0$ على المجال $]-\infty,-1[$ و $f'(-1)=0$ إذن الدالة f متزايدة تماما على المجال $]-\infty,-1]$.

• $f'(x)<0$ على المجال $]-1,2[$ إذن الدالة f متناقصة تماما على المجال $[-1,2]$.

• $f'(x)>0$ على المجال $]2,+\infty[$ و $f'(2)=0$ إذن الدالة f متزايدة تماما على المجال $[2,+\infty[$.

و منه جدول التغيرات الآتي:

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	$f(-1)$	$\searrow$	$f(2)$	$\nearrow$	

$f(-1)=\frac{13}{6}$ و $f(2)=-\frac{7}{3}$

2) من جدول تغيرات الدالة f نلاحظ أن f' تنعدم عند -1 مغيرة إشارتها مثلا على المجال $[-3,0]$ إذن

$f(-1)=\frac{13}{6}$ قيمة حدية محلية للدالة f عند -1 على المجال $[-3,0]$.

بنفس الطريقة $f(2)=-\frac{7}{3}$ قيمة حدية محلية للدالة f عند 2 على المجال $[1,4]$ مثلا .

حصر دالة:

نتائج لتكن دالة f معرفة و قابلة للإشتقاق على مجال $[a,b]$ و f' دالتها المشتقة .

• إذا كانت الدالة f متزايدة تماما على المجال $[a,b]$ فإن من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[a,b]$

$f(a)\le f(x)\le f(b)$

• إذا كانت الدالة f متناقصة تماما على المجال $[a,b]$ فإن من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[a,b]$

$f(b)\le f(x)\le f(a)$

مثال: لتكن الدالة f المعرفة على $[-3,1]$ كما يلي : $f:x\mapsto x^2+2x-3$.

الدالة f قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و دالتها المشتقة f' هي : $f':x\mapsto 2x+2$.

الدالة f' سالبة تماما على $]-3,-1[$ و $f'(-1)=0$ إذن الدالة f متناقصة تماما على المجال $[-3,-1]$.

الدالة f' موجبة تماما على $]-1,1[$ إذن الدالة f متزايدة تماما على المجال $[-1,1]$.

جدول التغيرات:

x	-3		-1		1
$f(x)$	0	$\searrow$	-4	$\nearrow$	0

من أجل كل x من المجال $[-3,-1]$ ، $f(-1)\le f(x)\le f(-3)$ أي $-4\le f(x)\le 0$

من أجل كل x من المجال $[-1,1]$ ، $f(-1)\le f(x)\le f(1)$ أي $-4\le f(x)\le 0$

عنصرحاد من الأعلى – عنصر حاد من الأسفل :

تعريف: لتكن دالة f معرفة على مجال D_f .

• يسمي عدد حقيقي k عنصرا حادا من الأعلى $(Majorant)$ للدالة f على المجال D_f إذا وفقط إذا كان من أجل كل عدد حقيقي x من المجال D_f ، $f(x)\le k$.

• يسمي عدد حقيقي k عنصرا حادا من الأسفل $(Minorant)$ للدالة f على المجال D_f إذا وفقط إذا كان من أجل كل عدد حقيقي x من المجال D_f ، $f(x)\ge k$.

بالنسبة للمثال السابق الدالة f المعرفة على $[-3,1]$ كما يلي : $f:x\mapsto x^2+2x-3$.

0 عنصر حاد من الأعلى و -4 عنصر حاد من الأسفل.

ملاحظة: • القيمة الحدية الكبرى للدالة f على D_f إن وجدت هي العنصر الحاد من الأعلى وهو أصغر العناصر الحادة من الأعلى.

• القيمة الحدية الصغرى للدالة f على D_f إن وجدت هي العنصر الحاد من الأسفل وهو أكبر العناصر الحادة من الأسفل.

تمرين محلول 2

لتكن الدالة f المعرفة على $[-5,0]$ بـ: $f(x)=2x^3-9x^2+12x-100$.

- **أدرس تغيرات الدالة f على المجال $[-5,0]$.**
- **عين عنصرا حادا من الأعلى و عنصرا حادا من الأسفل للدالة f على المجال $[-5,0]$.**

حل: • الدالة f دالة كثير حدود فهي معرفة و قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$. لتكن f' دالتها المشتقة على $\mathbb{R}$.

من أجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}$ $f'(x)=6x^2-18x+12$ وهي ثلاثي حدود من الدرجة الثانية مميزه المختصر $\Delta'=9$. 1 و 2 هما جذرا ثلاثي الحدود ، فهما لا ينتميان إلى مجال الدراسة $[-5,0]$. ونستنتج أن على المجال $[-5,0]$ الدالة المشتقة f' للدالة f موجبة تماما ومنه الدالة f متزايدة تماما على المجال $[-5,0]$. و منه جدول التغيرات:

x	-5	0
$f'(x)$	+	
$f(x)$	-635 ↗	-100

- من جدول التغيرات يتبين : من أجل كل قيمة x من المجال $[-5;0]$ فإن $f(x)\le -100$.

إذن -100 هو عنصرا حادا من الأعلى و هو أصغر القيم الحادة من الأعلى للدالة f على المجال $[-5,0]$.

و منه -100 هو القيمة الحدية الكبرى للدالة f على المجال $[-5,0]$.

- من جدول التغيرات يتبين : من أجل كل قيمة x من المجال $[-5,0]$ فإن $f(x)\ge -635$.

إذن -635 هي قيمة حادة من الأسفل و هي أكبر القيم الحادة من الأسفل للدالة f على المجال $[-5,0]$.

و منه -635 هو القيمة الحدية الصغرى للدالة f على المجال $[-5,0]$.

تمرين محلول 3

لتكن الدالة f المعرفة على $[0,1]$ بـ: $f(x)=x^3-3x^2+4x-1$.

- **أدرس تغيرات الدالة f على المجال $[0,1]$.**
- **أثبت أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا x_0 على المجال $[0,1]$.**

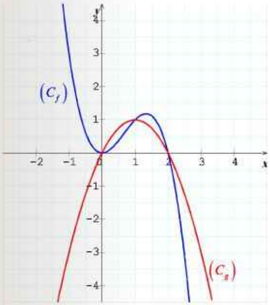
طريقة: **لإثبات أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا x_0 على مجال $[a,b]$. نبين أن الدالة f رتيبة على المجال $[a,b]$ و أن $f(a)$ و $f(b)$ من إشارتين مختلفتين .**
$f(a)$ و $f(b)$ من إشارتين مختلفتين تقر وجود x_0 و الرتابة تقر واحديته.

حل: • الدالة f قابلة للإشتقاق على $[0,1]$ و دالتها المشتقة f' حيث $f'(x)=3x^2-6x+4$.

الدالة f' موجبة تماما على $[0,1]$ ومنه الدالة f متزايدة تماما على $[0,1]$. $f(0)=-1$ و $f(1)=1$ إذن $f(0)$ و $f(1)$ من إشارتين مختلفتين ونستنتج أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا x_0 على المجال $[0,1]$.

المقارنة بين دالتين:

مثال أول باستعمال راسم منحنيات :



باستعمال راسم منحنيات تحصلنا في الشكل المقابل على (C_f) و (C_g) التمثيلان البيانيان للدالتين f و g المعرفتين على ℝ كما يلي:
$f(x)=-x^3+2x^2$ و $g(x)=-x^2+2x$

1) عين بيانيا إحداثيات نقط تقاطع المنحنيين (C_f) و (C_g).

2) عين بيانيا الأوضاع النسبية للمنحنيين (C_f) و (C_g).

3) أدرس إشارة $[f(x)-g(x)]$ على ℝ بدون استعمال الرسم البياني.

4) هل يمكن المقارنة بين $f(x)$ و $g(x)$ بدون اللجوء إلى (C_f) و (C_g)؟

مثال ثاني :

لتكن الدالة f للمتغير الحقيقي x حيث أن : $f(x)=x^3-3x^2+4x-5$.ليكن (C_f) رسمها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) عين معادلة للمماس (C_f) عند النقطة التي فاصلتها 1 .

2) ليكن (D) المستقيم الذي معادلته $y=x-4$.
بين أن $f(x)-(x-4)=(x-1)^3$.

3) أدرس الوضعية النسبية للمنحنى (C_f) و المستقيم (D).

تطبيق:

f و g دالتان معرفتان على ℝ كما يلي :
$x\to f(x)=x^3-x^2+4x-3$ و $g\to g(x)=x^3$ ليكن (C_f) الرسم البياني للدالة f و (C_g) الرسم البياني للدالة g في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

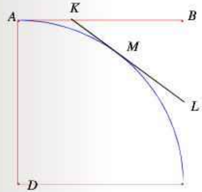
1) أثبت أن الدالتين f و g متزايدتان تماما على ℝ .

2) عين إشارة $[f(x)-g(x)]$.

3) إستنتج الوضعية النسبية للمنحنيين (C_f) و (C_g) .

مسائل الإستمثال:

مسألة أولى:



لتكن $ABCD$ مربع من المستوي حيث $AB=2$.لتكن الدائرة (Γ) التي مركزها D و نصف قطرها 2

لتكن M نقطة من القوس AC ، مختلفة عن A ومختلفة عن C .المماس (T) للدائرة (Γ) عند النقطة M يقطع القطعة $[AB]$ في K و القطعة $[BC]$ في L .

نريد تعيين وضعية M حتى يأخذ الطول KL أصغر قيمة ممكنة . من أجل هذا نضع : $KB=x$ و $LB=y$.

1) أثبت أن $KL^2=x^2+y^2$.

2) أثبت أن $KL=4-x-y$. وأن $KL^2=x^2+y^2-8x-8y+2xy+16$.

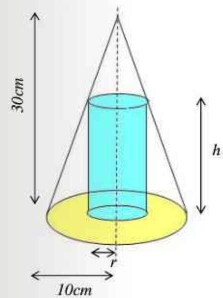
3) استنتج أن $y=\dfrac{4x-8}{x-4}$. استنتج أن $KL=\dfrac{-x^2+4x-8}{x-4}$

5) لتكن الدالة f المعرفة على $[0,2]$ حيث : $f(x)=\dfrac{-x^2+4x-8}{x-4}$

أدرس تغيرات الدالة f و استنتج أن الطول KL يأخذ أصغر قيمة ممكنة من أجل $x=4-2\sqrt{2}$.

عين عندئذ وضعية M.

مسألة ثانية:



مخروط دوراني ارتفاعه 30cm و نصف قطر قاعدته 10 cm

نريد رسم بداخله أسطوانة دورانية يأخذ حجمها $V(r)$ أكبر قيمة ممكنة . كما هو موضح في الشكل المقابل.

نضع ارتفاع الأسطوانة h و نصف قطر قاعدتها r (ب: cm).

1) أثبت أن : $h=3(10-r)$.

2) عبّر عن $V(r)$ حجم الأسطوانة بدلالة r .

3) أدرس تغيرات الدالة V .

4) استنتج قيم h و r حتى يأخذ الحجم $V(r)$ أكبر قيمة ممكنة.

الهدف من هذه المسألة هو حل المتراجحة : $3\sqrt{x}+\dfrac{3}{2x}\geq\dfrac{9}{2}$ باستعمال الإشتقاق.

لتكن الدالة f المعرفة كما يلي $f(x)=3\sqrt{x}+\dfrac{3}{2x}$.

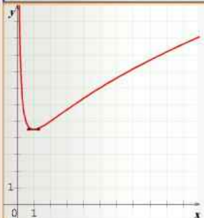
1) **أوجد D_f مجموعة تعريف الدالة f .**

2) **بين أن f قابلة للإشتقاق على D_f . ثم عين دالتها المشتقة f' .**

3) **بين أن $f'(x)=\dfrac{3\sqrt{x^3}-3}{2x^2}$.**

4) **شكل جدول تغيرات الدالة f .**

5) **إستنتج أن من أجل كل x من D_f $f(x)\geq\dfrac{9}{2}$.**



1) $D_f=]0,+\infty[$.

2) الدالة f مجموع دالتين قابلتين للإشتقاق على $]0,+\infty[$ فهي إذن قابلة للإشتقاق على $]0,+\infty[$.

$f'(x)=\dfrac{3}{2\sqrt{x}}-\dfrac{3}{2x^2}$.

3) نجعل مقام العبارة $\dfrac{3}{2\sqrt{x}}$ ناطق و نحصل على :

$f'(x)=\dfrac{3\sqrt{x}}{2x}-\dfrac{3}{2x^2}$.

نوحد المقامين و المقام الموحد هو $2x^2$ و نحصل على $f'(x)=\dfrac{3x\sqrt{x}-3}{2x^2}$

بما أن $x>0$ فإن $x=\sqrt{x^2}$ ومنه $f'(x)=\dfrac{3\sqrt{x^3}-3}{2x^2}$.

4) الدالة $x\mapsto\sqrt{x^3}$ دالة متزايدة على $]0,+\infty[$ لأنها دالة مركبة من الدالة $x\mapsto x^3$ المتزايدة على $]0,+\infty[$ تتبعها الدالة $x\mapsto\sqrt{x}$ المتزايدة على $]0,+\infty[$. ومنه $u:x\mapsto\sqrt{x^3}-1$ متزايدة على $]0,+\infty[$ و $u(1)=0$

و علما أن $2x^2>0$ على المجال $]0,+\infty[$ نستنتج أن : $f'(x)<0$ على $]0,1[$ و $f'(x)\geq 0$ على $[1,+\infty[$.

x	0	1	$+\infty$
$f(x)$	↘	$\dfrac{9}{2}$	↗

5) من جدول التغيرات نستنتج أن $3\sqrt{x}+\dfrac{3}{2x}\geq\dfrac{9}{2}$.

مسائل محلولة

شاحنة تقطع مسافة $200km$ بسرعة v مقدرة بـ km/h ، الشاحنة تستهلك : l/h $\left(5+\frac{v^2}{320}\right)$ من الوقود .

ثمن الوقود هو $16\ DA$ للتر الواحد و يتقاضا السائق أجرتا تقدر بـ $100\ DA$ في الساعة .

1) نسمي t زمن الرحلة .عبر عن t بدلالة v .

2) احسب الكلفة $P(v)$ بدلالة v.

3) ادرس إتجاه تغير الدالة f المعرفة على $]0,120]$ حيث $f(x)=10x+\frac{36000}{x}$.

4) ما هي سرعة الشاحنة حتى تكون الرحلة أقل تكلفة؟

1) $t=\frac{200}{v}$.

2) $P(v)=\left(5+\frac{v^2}{320}\right)\times\frac{200}{v}\times16+100\times\frac{200}{v}$. أي $P(v)=10v+\frac{36000}{v}$.

3) $f(x)=10x+\frac{36000}{x}$.

$D_f=]0,120]$.

الدالة f قابلة للإشتقاق على D_f لأنها مجموع دالتين مرجعيتين : الدالة التآلفية و الدالة مقلوب .

$f'(x)=\frac{10x^2-36000}{x^2}$.

إشارة $f'(x)$ هي إشارة البسط أي إشارة $10x^2-36000$

x	0		60		120
$f'(x)$	||	$-$	0	$+$	

جدول التغيرات

x	0		60		120
$f'(x)$	||	$-$	0	$+$	
$f(x)$	||	$\searrow$	1200	$\nearrow$	

4) من تغيرات الدالة f نستنتج أن الرحلة تكون أقل تكلفة إذا كانت سرعة الشاحنة $60km/h$.

6

المتتاليات العددية

الكفاءات المستهدفة

- وصف ظاهرة بواسطة متتالية.
- التعرف على اتجاه تغير متتالية.
- التعرف على متتالية حسابية (هندسية).
- حساب الحد العام لمتتالية حسابية (هندسية).
- حساب مجموع p حدا متعاقبا.
- حساب نهاية متتالية عددية.

Fibonacci 1170 / 1240

كان ليوناردو دو بيز (*Leonard de Pise*) الملقب بـ *Fibonacci* من أكبر علماء الرياضيات و قد ولد عام 1170م بمدينة بيز (*Pise*) بايطاليا. سافر كثيرا عبر حوض البحر الأبيض المتوسط بهدف تعلم طرق الحساب المستعملة في الشرق و العلاقات الرياضياتية المستخدمة في بناء أهرامات الجيزة بمصر. و إثر عودته إلى ايطاليا أصدر عدة كتب. و يرجع له الفضل في تعريف الغرب بالأرقام العربية بما فيها العدد 0 كما أنه استعمل كلمة sinus.

من خلال اهتمامه بتكاثر أرانب قام بدراسة المتتالية التي تعرف باسمه و التي حدودها هي: 1،1، 2، 3، 5، 8، 13، 21، 34، 55، 89، 144، ...

نلاحظ أنه انطلاقا من الحد الثالث يتم الحصول على حد بجمع الحدين السابقين كما نلاحظ أن النسبة بين حدين متتابعين تؤول إلى العدد الذهبي بقيم أصغر و بقيم أكبر فمثلا:

$55/34 = 1,6167...$ و $89/55 = 1,6181...$ و $144/89 = 1,6179...$ ، ...

المتتاليات العددية.

1.متتالية عددية.

تعريف:متتالية عددية حقيقية u هي دالة ترفق بكل عدد طبيعي n ،أكبر من أو يساوي عدد طبيعي n_0 معطى، العدد $u(n)$

ترميز: نرمز إلى صورة n بالمتتالية u بـ u_n بدلا من $u(n)$.هذا الترميز الجديد يسمى الترميز بدليل .

المتتالية u يرمز لها $(u_n)_{n\geq n_0}$ إذا كانت المتتالية u معرفة من أجل n أكبر من أو يساوي n_0.

المتتالية u يرمز لها $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ أو (u_n) إذا كانت المتتالية u معرفة على $\mathbb{N}$.

u_n هو الحد الذي دليله n و يسمى كذالك الحد العام للمتتالية u .

u_{n_0} هو الحد الأول للمتتالية u إذا كانت معرفة من أجل n أكبر من أو يساوي n_0 .

u_0 هو الحد الأول للمتتالية u إذا كانت معرفة على $\mathbb{N}$.

أمثلة: •المتتالية (u_n) حيث : $u_n=-5n^2+2$ معرفة على $\mathbb{N}$.

•المتتالية v حيث : $v_n=\dfrac{5}{n}$ معرفة على $\mathbb{N}-\{0\}$ و نكتب $(v_n)_{n\geq 1}$.

•المتتالية w حيث : $w_n=\dfrac{n+3}{n-5}$ معرفة من أجل $n\geq 6$ و نكتب $(w_n)_{n\geq 6}$.

ملاحظة: في الحد u_n ، n هو دليل الحد وليس رتبته .

مثال: المتتالية w حيث أن $w_n=\dfrac{n+3}{n-5}$ معرفة من أجل $n\geq 6$ ، 6 هو دليل الحد w_6 وأما رتبته فهي الرتبة الأولى حيث w_6 هو الحد الأول.

رتبة حد u_b ($b\in\mathbb{N}$) من متتالية u بالنسبة إلى الحد u_a (a عدد طبيعي أصغر من b) هو العدد الطبيعي $b-a+1$.

2.طرق توليد متتالية عددية.(يقصد بتوليد متتالية معرفة حدودها)

توليد متتالية عددية بالحد العام:

• إذا كان الحد العام لمتتالية عددية معطى بدلالة n فإنها معرفة تماما . و لحساب حد u_{n_0} من الحدود يكفي تعويض n بالقيمة n_0 .

مثال: المتتالية u المعرفة على $\mathbb{N}$ حيث $u_n=-n^2+3$ معرفة بحدها العام .ويمكن حساب أي حد من الحدود .

ملاحظة: يمكن التعبيرعن الحد العام لهذه المتتالية باستعمال دالة f و نكتب $u_n=f(n)$ حيث $f:x\mapsto -x^2+3$.

توليد متتالية عددية بعلاقة تراجعية:

•لتكن دالة عددية f معرفة على مجال D وحيث أن من أجل $x\in D$ فإن $f(x)\in D$. المتتالية u المعرفة بحدها الأول u_{n_0} و العلاقة $u_{n+1}=f(u_n)$ تسمى متتالية تراجعية. تسمح هذه العلاقة بحساب u_{n+1} إذا علم u_n من أجل كل $n\geq n_0$
الدالة العددية f تسمى الدالة المرفقة بالمتتالية u.

مثال: نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بحدها الأول $u_0=1$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=3u_n$.

لدينا $u_0=1$ و منه $u_1=3u_0=3$ ، $u_2=3u_1=9$ ، $u_3=3u_2=27$ و هكذا ...

تمرين محلول 1

لتكن المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $u_n=-3n^2+1$.

1) أحسب u_0 ، u_1 ، u_2 ، u_3 ، u_{20} و u_{134} .

2) أكتب بدلالة n الحدود u_{n+1} ، u_{2n} ، u_{3n+2}

ملاحظة: المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ من الشكل $u_n=f(n)$ حيث f هي الدالة المرفقة بها . وحيث من أجل كل عدد حقيقي x : $f(x)=-3x^2+1$.

الهدف من التمرين التحكم في حساب حدود متتالية معرفة بهذا الشكل واستخدام الدليل الإستخدام الجيد

حل:

1) $u_0=-3(0)^2+1=1$ ، $u_1=-3(1)^2+1=-2$ ، $u_2=-3(2)^2+1=-11$ ، $u_3=-3(3)^2+1=-26$

$u_{20}=-3(20)^2+1=-1199$ ، $u_{134}=-3(134)^2+1=-53867$.

2) $u_{n+1}=-3(n+1)^2+1=-3n^2-6n-2$ ، $u_{2n}=-3(2n)^2+1=-12n^2+1$

$u_{3n+2}=-3(3n+2)^2+1=-27n^2-36n-11$.

تمرين محلول 2

لتكن المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $u_0=2$ من أجل كل عدد طبيعي n $u_{n+1}=\dfrac{3}{2+u_n}$.

1) أحسب u_1 ، u_2 ، u_3 .

2) أحسب u_{10} ، u_{11} و u_{12} .ثم ضع تخمينا

ملاحظة: المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ من الشكل $u_{n+1}=f(u_n)$ حيث f هي الدالة المرفقة بها . و من أجل كل عدد حقيقي موجب x : $f(x)=\dfrac{3}{2+x}$. هذه الدالة معرفة على $[0,+\infty[$ وبما أن $u_0>0$ فإن المتتالية (u_n) معرفة على $\mathbb{N}$

حل:

1) $u_1=\dfrac{3}{2+u_0}=\dfrac{3}{4}$ ، $u_2=\dfrac{3}{2+u_1}=\dfrac{3}{2+\frac{3}{4}}=\dfrac{12}{11}$ ، $u_3=\dfrac{3}{2+u_2}=\dfrac{3}{2+\frac{12}{11}}=\dfrac{33}{34}$.

2) الحاسبات تبين أن $u_{10}\approx 1$ ، $u_{11}\approx 1$ و $u_{12}\approx 1$.

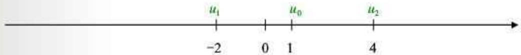
نلاحظ أن (u_n) تستقر على القيمة 1 إنطلاقا من $n=10$.

التمثيل البياني لمتتالية عددية.

1.متتالية معرفة بالحد العام.

- يمكن تمثيل حدود متتالية عددية معرفة بحدها العام على محور

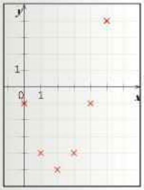
مثال: لتكن المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $u_n=(-2)^n$.



- يمكن تمثيل متتالية عددية معرفة بحدها العام (ترفق هذه المتتالية بدالة f) .

مثال: لتكن المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $u_n=n^2-4n-1$.

(u_n) معرفة كذلك $u_n=f(n)$ حيث: $f:x\to x^2-4x-1$ نعرف f على المجال $[0,+\infty[$ بما أن n عدد طبيعي. في الرسم المقابل النقط الممثلة إحداثياها $(n,f(n))$ من أجل $n=0$ ، $n=1$ ، $n=2$ ، $n=3$ ، $n=4$ و $n=5$ في المستوي المنسوب إلى معلم $(O,\vec{i},\vec{j})$. مجموعة النقط $M(n,f(n))$ هي التمثيل البياني للمتتالية (u_n) .



2.متتالية معرفة بعلاقة تراجعية.

لتكن المتتالية (u_n) المعرفة بحدها الأول u_0 و العلاقة التراجعية $u_{n+1}=f(u_n)$ حيث f دالة معرفة على ‾ . مجموعة النقط $M(u_n,f(u_n))$ هي التمثيل البياني في المستوي المنسوب إلى معلم للمتتالية (كيفية الإنشاء في الصفحة المقابلة) .

إتجاه تغير متتالية عددية.

1.متتالية متزايدة: تكون متتالية $(u_n)_{n\geq n_0}$ متزايدة (متزايدة تماما على الترتيب) إبتداءا من الرتبة n_0 إذا وفقط إذا كان $u_{n+1}\geq u_n$ ($u_{n+1}>u_n$ على الترتيب) من أجل كل عدد طبيعي n أكبر من أو يساوي n_0 .

2.متتالية متناقصة: تكون متتالية $(u_n)_{n\geq n_0}$ متناقصة (متناقصة تماما على الترتيب)إبتداءا من الرتبة n_0 إذا وفقط إذا كان $u_{n+1}\leq u_n$ ($u_{n+1}<u_n$ على الترتيب) من أجل كل عدد طبيعي n أكبر من أو يساوي n_0.

3.متتالية ثابتة: تكون متتالية $(u_n)_{n\geq n_0}$ ثابتة إبتداءا من الرتبة n_0 إذا و فقط إذا كان $u_{n+1}=u_n$. من أجل كل عدد طبيعي n أكبر من أو يساوي n_0.

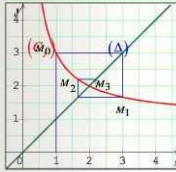
4. متتالية رتيبة: المتتالية الرتيبة على مجال I من $\mathbb{N}$ (رتيبة تماما على الترتيب) هي متتالية متزايدة (متزايدة تماما على الترتيب) على المجال I من $\mathbb{N}$ أو متناقصة (متناقصة تماما على الترتيب) على المجال I من $\mathbb{N}$ (رتيبة تماما على الترتيب) .

تمرين محلول 3

لتكن المتتالية (u_n) المعرفة بحدها الأول $u_0=1$ و العلاقة التراجعية $u_{n+1}=\frac{2+u_n}{u_n}$ حيث n عدد طبيعي

• مثل بيانيا المتتالية (u_n) في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس (O,I,J) .

طريقة: لتمثيل المتتالية (u_n) بيانيا ننشئ الرسم البياني للدالة f المرفقة بالمتتالية (u_n) ثم ننشئ المستقيم ذا المعادلة $y=x$. لأن المتتالية من الشكل $u_{n+1}=f(u_n)$ والتمثيل البياني هو مجموعة النقط $M(u_n,u_{n+1})$.

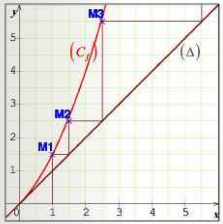


حل: (C_f) هوالرسم البياني للدالة f المرفقة بالمتتالية (u_n) .أي $f(x)=\frac{2+x}{x}$
نعرف الدالة f على المجال $]0,+\infty[$. (Δ) المستقيم ذو المعادلة $y=x$. النقطة $M_0(u_0,u_1)$ أي $M_0(1,3)$ هي أول نقطة نحصل عليها. نسقط M_0 على (Δ) وفق (Ox) ثم نسقط النقطة المحصل عليها على (C_f) وفق (Oy) وبهذا نحصل على النقطة $M_1(u_1,u_2)$ أي $M_1\left(3,\frac{5}{3}\right)$.نكرر العملية للحصول على M_2 ثم M_3 إلى آخره.

تمرين محلول 4

لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq1}$ المعرفة بحدها الأول $u_1=1$ و العلاقة التراجعية $u_{n+1}=\frac{1}{2}u_n^2+u_n$.

• مثل بيانيا المتتالية (u_n) في المستوي المنسوب الى معلم متعامد و متجانس (O,I,J) .



حل: (C_f) هو الرسم البياني للدالة f المرفقة بالمتتالية (u_n) .أي $f(x)=\frac{1}{2}x^2+x$ المعرفة على $[0,+\infty[$. (Δ) المستقيم ذو المعادلة $y=x$.نستعمل نفس الطريقة المستعملة في التمرين السابق 3

تمرين محلول 5

أدرس اتجاه تغير كل من المتتاليتين (u_n) و (v_n) المعرفتين على □ كما يلي $u_n=\frac{n+1}{3^n}$ و $v_n=\frac{2n-1}{n+3}$

طريقة: لدراسة اتجاه تغير متتالية (u_n) يمكن أن:
1) ندرس إشارة $u_{n+1}-u_n$ أو
2) نقارن بين $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ و 1 .
3) إذا وجدت دالة f حيث من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n=f(n)$ ندرس تغيرات الدالة f .

حل: •اتجاه تغير المتتالية (u_n). $u_{n+1}-u_n=\frac{-2n-1}{3^{n+1}}$ إذن $u_{n+1}-u_n<0$ و منه (u_n) متناقصة على □

• (v_n) متزايدة تماما على □ لأن الدالة f حيث $f(x)=\frac{2x-1}{x+3}$ متزايدة تماما على $[0,+\infty[$

المتتاليات الحسابية.

1 . تعريف متتالية حسابية :

تعريف: نقول أن المتتالية (u_n) متتالية حسابية حدها الأول u_0 إذا و فقط إذا وجد عدد حقيقي r بحيث أن من أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1}=u_n+r$.
يسمى r أساس المتتالية (u_n).

ملاحظة: إذا كان $r=0$ فإن المتتالية (u_n) ثابتة و كل حدودها تساوي الحد الأول u_0 .

أمثلة: • المتتالية (u_n) حيث أن $u_n=3n+5$ متتالية حسابية حدها الأول $u_0=5$ أساسها $r=3$.
• مجموعة الأعداد الطبيعية الفردية متتالية حسابية حدها الأول 1 أساسها 2 .

2.الحد العام لمتتالية حسابية :

مبرهنة 1:(تقبل بدون برهان) (u_n) متتالية حسابية حدها الأول u_0 أساسها r.
الحد العام للمتتالية الحسابية (u_n) هو $u_n=u_0+nr$ من أجل كل عدد طبيعي n :

ملاحظات: • إذا كان u_1 الحد الأول فإن عبارة الحد العام هي $u_n=u_1+(n-1)r$.
• بصفة عامة إذا كان u_p الحد الأول (p عدد طبيعي أصغر من n) فإن عبارة الحد العام هي الحد $u_n=u_p+(n-p)r$.
• تعيين الحد العام يعود إلى كتابة u_n بدلالة n .

3.مجموع حدود متتابعة من متتالية حسابية :

مبرهنة 2: (u_n) متتالية حسابية حدها الأول u_0 و أساسها r. ليكن المجموع : $S=u_0+u_1+........+u_{n-1}+u_n$
من أجل كل عدد طبيعي n : $S=(n+1)\left(\frac{u_0+u_n}{2}\right)$
S يساوي عدد الحدود مضروب في نصف مجموع الحد الأول و الحد الأخير .

برهان: ليكن p عدد طبيعي أصغر من n، لدينا $u_p=u_0+pr$ و $u_{n-p}=u_0+(n-p)r$.
و منه $u_p+u_{n-p}=u_0+u_0+nr=u_0+u_n$.
نكتب S بطريقتين ثم نجمع المساوتين طرف بطرف .
$$S=u_0+u_1+........+u_{n-1}+u_n$$
$$S=u_n+u_{n-1}+........+u_1+u_0$$
و منه $2S=u_0+u_n+u_1+u_{n-1}+......+u_{n-1}+u_1+u_n+u_0$
أي $2S=u_0+u_n+u_0+u_n+......+u_0+u_n+u_0+u_n$ بتطبيق $u_p+u_{n-p}=u_0+u_n$
و منه $2S=(n+1)(u_0+u_n)$ إذن $S=(n+1)\left(\frac{u_0+u_n}{2}\right)$.

تمرين محلول 5

لتكن المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $u_n = -7n+12$.

• أثبت أن المتتالية (u_n) متتالية حسابية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول .

طريقة: للبرهان على أن متتالية (u_n) متتالية حسابية يمكن البرهان على أن الفرق بين حدين متتابعين كيفيين عدد ثابت ، هذا العدد الثابت هو أساس المتتالية .

حل: المتتالية (u_n) معرفة على $\mathbb{N}$ إذا حدها الأول u_0 ، $u_0 = 12$. لنحسب $u_{n+1} - u_n$.

$u_{n+1} - u_n = -7(n+1)+12-(-7n+12) = -7$. إذن $u_{n+1} - u_n = -7$ من أجل كل عدد طبيعي n .

و منه المتتالية (u_n) متتالية حسابية أساسها $r = -7$ و حدها الأول $u_0 = 12$.

تمرين محلول 6

لتكن المتتالية (u_n) المعرفة بحدها الأول $u_0 = -2$ و بالعلاقة: $u_{n+1} = u_n - 3n+1$ من أجل كل عدد طبيعي n .

لتكن المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بالعلاقة: $v_n = u_{n+1} - u_n$.

• أثبت أن المتتالية (v_n) متتالية حسابية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول .

حل: بما أن المتتالية (u_n) معرفة على $\mathbb{N}$ فإن المتتالية (v_n) معرفة على $\mathbb{N}$ إذا حدها الأول هو v_0 ، $v_0 = u_1 - u_0$.

$u_1 = u_0 - 3(0)+1 = -1$ و منه $v_0 = u_1 - u_0 = -1-(-2) = 1$. لنحسب $v_{n+1} - v_n$.

لدينا $u_{n+1} - u_n = -3n+1$. إذن : $v_n = -3n+1$

$v_{n+1} - v_n = -3(n+1)+1-(-3n+1) = -3$. إذن من أجل كل عدد طبيعي n : $v_{n+1} - v_n = -3$.

و منه المتتالية (v_n) متتالية حسابية أساسها $r = -3$ و حدها الأول $v_0 = 1$.

تمرين محلول 7

لتكن المتتالية الحسابية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ ، أساسها $r = -2$ ، و حدها الأول $u_0 = 204$.

• أحسب $S = u_{10} + u_{11} + \dots\dots + u_{216} + u_{217}$.

طريقة إيجاد عدد حدود لمتتالية : a و b عددان طبيعيان حيث $a < b$ عدد الحدود u_a ، u_{a+1} ، u_{a+2} ، . . . . ، u_b لمتتالية (u_n) هو: $\boxed{b-a+1}$

حل: عدد الحدود هو $217-10+1 = 208$.

$$u_{10} = u_0 + 10r = 204 - 20 = 184 .$$

$$u_{217} = u_0 + 217(-2) = -230 .$$

$$S = \frac{208}{2}(u_{10} + u_{217})$$
$$= 104(184-230)$$
$$= -4784$$

المتتاليات الهندسية.

1 . تعريف متتالية هندسية :

تعريف: نقول أن المتتالية (u_n) متتالية هندسية حدها الأول u_0 إذا و فقط إذا وجد عدد حقيقي q حيث أن من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = u_n \times q$.

يسمى q أساس المتتالية (u_n) .

ملاحظة: • إذا كان $q = 1$ فإن المتتالية ثابتة جميع حدودها تساوي u_0 .

• إذا كان $q = 0$ فإن حدود المتتالية معدومة إبتداءً من الحد الثاني.

مثال: • المتتالية (u_n) حيث أن $u_n = 2^n$ متتالية هندسية حدها الأول $u_0 = 1$ أساسها $q = 2$.

2. الحد العام لمتتالية هندسية :

مبرهنة 1: (تقبل بدون برهان) (u_n) متتالية هندسية حدها الأول u_0 أساسها q .

عبارة الحد العام للمتتالية الهندسية (u_n) $u_n = u_0 \times q^n$ من أجل كل عدد طبيعي n .

ملاحظات: • إذا كان الحد الأول u_1 عبارة الحد العام $u_n = u_1 \times q^{n-1}$.

• بصفة عامة إذا كان u_p (p عدد طبيعي أصغرمن n) الحد الأول فإن عبارة الحد العام $u_n = u_p \times q^{n-p}$.

• تعيين الحد العام يعود إلى كتابة u_n بدلالة n.

3. مجموع حدود متتابعة من متتالية هندسية :

مبرهنة 2: (u_n) متتالية هندسية حدها الأول u_0 أساسها q. ليكن المجموع : $S = u_0 + u_1 + \dots\dots + u_{n-1} + u_n$

• إذا كان $q = 1$ فإن $S = (n+1)u_0$ من أجل كل عدد طبيعي n .

• إذا كان $q \neq 1$ فإن $S = u_0\left(\dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}\right) = u_0\left(\dfrac{q^{n+1}-1}{q-1}\right)$ من أجل كل عدد طبيعي n .

S يساوي الحد الأول مضروب في النسبة $\left(\dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}\right)$ حيث $n+1$ هو عدد الحدود .

البرهان: • في الحالة $q = 1$ ، S هو مجموع $n+1$ مرة الحد u_0 و منه $S = (n+1)u_0$.

• في الحالة $q \neq 1$.

ليكن المجموع $S = u_0 + u_1 + \dots\dots + u_{n-1} + u_n$

$S = u_0 + u_0 \times q + \dots\dots + u_0 \times q^{n-1} + u_0 \times q^n$

و منه $S = u_0(1+q+\dots\dots+q^{n-1}+q^n)$. نضرب الطرفين في q نحصل على :

$(1-q)S = u_0(1-q+q-q^2+q^2-\dots\dots+q^{n-1}-q^n+q^n-q^{n+1})$ أي : $(1-q)S = u_0(1-q^{n+1})$

و بالتالي $S = u_0\left(\dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}\right) = u_0\left(\dfrac{q^{n+1}-1}{q-1}\right)$.

تمرين محلول 8

لتكن المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $u_n=\frac{1}{2^n}$.

• أثبت أن المتتالية (u_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول .

طريقة: للبرهان على أن متتالية (u_n) هندسية نحاول كتابة u_{n+1} على الشكل $u_{n+1}=u_n\times q$ حيث q عدد حقيقي مستقل عن n أو أن كل الحدود u_n غير معدومة و النسبة $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ عدد ثابت ، هذا العدد الثابت هو أساس المتتالية .

حل: المتتالية (u_n) معرفة على $\mathbb{N}$ إذن حدها الأول هو u_0 ، $u_0=1$.

$$u_{n+1}=\frac{1}{2^{n+1}}=\frac{1}{2^n}\times\frac{1}{2}=u_n\times\frac{1}{2}$$

و منه المتتالية (u_n) متتالية هندسية أساسها $q=\frac{1}{2}$ و حدها الأول $u_0=1$.

تمرين محلول 9

لتكن المتتالية (u_n) المعرفة بحدها الأول $u_0=3$ و بالعلاقة: $u_{n+1}=4u_n+6$ من أجل كل عدد طبيعي n .

لتكن المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بالعلاقة: $v_n=u_n+2$.

• أثبت أن المتتالية (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول .

حل: بما أن المتتالية (u_n) معرفة على $\mathbb{N}$ فإن المتتالية (v_n) معرفة على $\mathbb{N}$ إذن حدها الأول هو $v_0=u_0+2=5$.

نكتب v_{n+1} بدلالة v_n .

$$\begin{aligned} v_{n+1}&=u_{n+1}+2=4u_n+8 \\ &=4(u_n+2)=4v_n \end{aligned}$$

إذن من أجل كل عدد طبيعي n : $v_{n+1}=4v_n$.

و منه المتتالية (v_n) متتالية هندسية أساسها $q=4$ و حدها الأول $v_0=5$.

تمرين محلول10

(u_n) متتالية هندسية معرفة على $\mathbb{N}$ ، أساسها $q=\frac{1}{2}$ ، و $u_5=\frac{1}{32}$.

• أحسب u_{2007} .

• أحسب $S=u_0+u_1+........+u_{28}+u_{29}$.

حل: • نعلم أن من أجل كل عدد طبيعي p أصغر من n : $u_n=u_p\times q^{n-p}$.

اذا $u_{2007}=u_5\times q^{2007-5}=\frac{1}{32}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{2002}=\frac{1}{2^{2007}}$.

• نعلم أنه إذا كان $q\neq1$ لدينا $S=u_0\left(\frac{1-q^{n+1}}{1-q}\right)$ و و منه $S=2\left(1-\frac{1}{2^{30}}\right)$

نهاية متتالية عددية.

1.متتالية عددية متقاربة.

تعريف: (u_n) متتالية عددية و l عدد حقيقي.

نقول أن المتتالية (u_n) تقبل l كنهاية إذا وفقط إذا كان كل مجال مفتوح يشمل l فهو يشمل أيضا كل حدود المتتالية (u_n) ابتداءً من رتبة معينة . ونكتب: $\lim_{n\to+\infty}u_n=l$ أو $\lim u_n=l$ (حيث أن النهاية لا تحسب إلا عند $+\infty$)

في هذه الحالة نقول أن المتتالية (u_n) متقاربة.

ملاحظات: • إذا كانت (u_n) متتالية متقاربة فإن نهايتها وحيدة .

• إذا كانت (u_n) متتالية غير متقاربة فهي متباعدة (نهايتها غير منتهية أو غيرموجودة).

2.نهاية متتالية عددية مرفقة بدالة.

مبرهنة1: لتكن المتتالية (u_n) المعرفة كما يلي $u_n=f(n)$. حيث f دالة معرفة على مجال من الشكل $[\alpha,+\infty[$ حيث α عدد حقيقي . إذا كانت $\lim_{x\to+\infty}f(x)=l$ فإن $\lim_{n\to+\infty}u_n=l$.

3.نهاية غير منتهية لمتتالية عددية.

تعاريف: (u_n) متتالية عددية .

• المتتالية (u_n) تقبل $+\infty$ كنهاية إذا وفقط إذا كان كل مجال مفتوح $]\alpha,+\infty[$ $(\alpha\in\mathbb{R})$ يشمل كل حدود المتتالية (u_n) إبتدءا من رتبة معينة . و نرمز: $\lim_{n\to+\infty}u_n=+\infty$.

• المتتالية (u_n) تقبل $-\infty$ كنهاية إذا وفقط إذا كان كل مجال مفتوح $]-\infty,\alpha[$ $(\alpha\in\mathbb{R})$ يشمل كل حدود المتتالية (u_n) إبتدءا من رتبة معينة . و نرمز: $\lim_{n\to+\infty}u_n=-\infty$.

مثال1: لتكن المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي $u_n=n^2$. ليكن α عدد حقيقي .

n_0 عدد طبيعي أكبر تماما من α لدينا $n^2\in]\alpha,+\infty[$ إبتداءا من $n\ge n_0$ و منه $\lim_{n\to+\infty}u_n=+\infty$.

مثال2: لتكن المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي $u_n=-n^2-1$. ليكن α عدد حقيقي .

n_0 عدد طبيعي أكبر تماما من α لدينا $(-n^2-1)\in]-\infty,\alpha[$ إبتداءا من $n\ge n_0$ و منه $\lim_{n\to+\infty}u_n=-\infty$.

مبرهنة2: لتكن المتتالية (u_n) المعرفة كما يلي $u_n=f(n)$. حيث f دالة معرفة على مجال من الشكل $[\alpha,+\infty[$ حيث α عدد حقيقي .

• إذا كانت $\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ فإن $\lim_{n\to+\infty}u_n=+\infty$.

• إذا كانت $\lim_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$ فإن $\lim_{n\to+\infty}u_n=-\infty$.

ملاحظة: النتائج و النظريات حول نهايات الدوال تبقى صحيحة في المتتاليات .

تمرين محلول12

لتكن المتتالية $(u_n)_{n\ge1}$ المعرفة كما يلي : $u_n=\frac{1}{n}$.

• باستعمال التعريف ، أثبت أن نهاية (u_n) هي 0 .

حل:

لنبرهن على هذا .ليكن مجال $]\alpha,\beta[$ يشمل 0 .ليكن عدد طبيعي p حيث :

$p>\frac{1}{\beta}$ و $p>-\frac{1}{\alpha}$ ، من أجل كل عدد طبيعي n ($n\ge p$)

لدينا $\alpha<-\frac{1}{p}<\frac{1}{n}$ و $\frac{1}{n}<\frac{1}{p}<\beta$ إذا $\alpha<\frac{1}{n}<\beta$ ومنه إبتداءا من الرتبة p $\alpha<u_n<\beta$. و بالتالي.
$\lim_{n\to+\infty} u_n=0$

تمرين محلول13

لتكن المتتالية (u_n) المعرفة على ℕ كما يلي : $u_n=\frac{3n+1}{n+2}$.

• عين نهاية المتتالية (u_n).

حل: المتتالية (u_n) معرفة على الشكل $u_n=f(n)$ حيث f هي الدالة المعرفة على $[0,+\infty[$ كما يلي :

$f(x)=\frac{3x+1}{x+2}$. لدينا $\lim_{x\to+\infty} f(x)=3$ إذا $\lim_{n\to+\infty} u_n=3$.إذن المتتالية (u_n) متقاربة .

تمرين محلول14

لتكن المتتالية (u_n) المعرفة على ℕ كما يلي : $u_n=\frac{n^2+3n+1}{2n+3}$.

• عين نهاية المتتالية (u_n).

حل:

نحول العبارة $u_n=\frac{n^2+3n+1}{2n+3}$.

$$u_n=\frac{n^2\left(1+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}{n\left(2+\frac{3}{n}\right)}=n\times\frac{1+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}}{2+\frac{3}{n}}$$

$\lim_{n\to+\infty} 1+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}=1$ و $\lim_{n\to+\infty} 2+\frac{3}{n}=2$

$\lim_{n\to+\infty}\frac{1+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}}{2+\frac{3}{n}}=\frac{1}{2}$. إذن $\lim_{n\to+\infty} u_n=+\infty$ و المتتالية (u_n) متباعدة .

نهاية متتالية عددية باستعمال الحصر.

مبرهنة1: (u_n) ، (v_n) و (w_n) ثلاث متتاليات عددية و l عدد حقيقي.

إذا كانت $\lim_{n\to+\infty} v_n=l$ و $\lim_{n\to+\infty} w_n=l$ و إذا كان ابتداءً من عدد طبيعي n_0 ، $v_n\le u_n\le w_n$ فإن $\lim_{n\to+\infty} u_n=l$

برهان: ليكن D مجالا يشمل l ، D يشمل كل حدود المتتالية (v_n) انطلاقا من n_1 و D يشمل كل حدود المتتالية (w_n) انطلاقا من n_2 . ليكن n_3 أكبر العددين n_1 و n_2 ، D يشمل كل حدود (v_n) و (w_n) انطلاقا من n_3 و بما أن $v_n\le u_n\le w_n$ فإن D يشمل كل حدود المتتالية (u_n) انطلاقا من n_3 . و بالتالي $\lim_{n\to+\infty} u_n=l$.

مبرهنة2: (u_n) و (v_n) متتاليتان عدديتان . إذا كان ابتداءً من عدد طبيعي n_0 ، $u_n\ge v_n$ و $\lim_{n\to+\infty} v_n=+\infty$

فإن $\lim_{n\to+\infty} u_n=+\infty$

برهان: ليكن $]\alpha,+\infty[$ مجالا . $]\alpha,+\infty[$ يشمل إنطلاقا من n_0 كل حدود المتتالية (v_n) و بما أن $u_{n_0}\ge v_{n_0}$ فإن المجال $]\alpha,+\infty[$ يشمل إنطلاقا من n_0 كل حدود المتتالية (u_n) معينة p ، من أجل $n\ge n_0$ ، $u_n\ge v_n$ ليكن q الأكبر من بين p و n_0 .إذا كان $n\ge q$ فإن $v_n\in]\alpha,+\infty[$ و منه $\lim_{n\to+\infty} u_n=+\infty$.

مبرهنة3: (u_n) و (v_n) متتاليتان عدديتان . إذا كان ابتداءً من عدد طبيعي n_0 ، $u_n\le v_n$ و $\lim_{n\to+\infty} v_n=-\infty$

فإن $\lim_{n\to+\infty} u_n=-\infty$

برهان: نفس البرهان مع المبرهنة 2 بوضع $u_n=-U_n$ و $v_n=-V_n$.

نهاية متتالية هندسية.

مبرهنة: (u_n) متتالية هندسية حدها الأول u_0 وأساسها q .

- إذا كان $q>1$ و $u_0>0$ فإن $\lim_{n\to+\infty} u_n=+\infty$ و المتتالية (u_n) متباعدة .
- إذا كان $q>1$ و $u_0<0$ فإن $\lim_{n\to+\infty} u_n=-\infty$ و المتتالية (u_n) متباعدة .
- إذا كان $-1<q<1$ فإن $\lim_{n\to+\infty} u_n=0$ و المتتالية (u_n) متقاربة .
- إذا كان $q\le-1$ فإن المتتالية (u_n) متباعدة (النهاية غير موجودة).

أمثلة: 1) المتتالية (u_n) المعرفة على ℕ ب : $u_n=3\left(\frac{1}{2}\right)^n$ متتالية متقاربة نحو 0 لأن (u_n) متتالية هندسية حدها الأول $u_0=3$ وأساسها $q=\frac{1}{2}$ و $-1<q<1$ و منه $\lim_{n\to\infty} u_n=0$.

2) المتتالية (v_n) المعرفة على ℕ ب : $v_n=3^n$ متتالية متباعدة لأن (v_n) متتالية هندسية حدها الأول $v_0=1$ وأساسها $q'=3$ و $q'>1$ و منه $\lim_{n\to+\infty} v_n=+\infty$.

3) المتتالية (w_n) المعرفة على ℕ ب : $w_n=(-3)^n$ متتالية متباعدة لأن (w_n) متتالية هندسية حدها الأول $v_0=1$ وأساسها $q''=-3$ و $q'<-1$ و منه النهاية غير موجودة .

تمرين محلول15

لتكن $(u_n)_{n\geq1}$ متتالية تحقق ما يلي : $\frac{2n+1}{n}\leq u_n\leq\frac{4n}{2n+3}$.

• عين نهاية المتتالية $(u_n)_{n\geq1}$.

حل: $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{2n+1}{n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(2+\frac{1}{n}\right)=2$ و $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{4n}{2n+3}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{4}{\left(2+\frac{3}{n}\right)}=2$ و منه $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=2$.

تمرين محلول16

لتكن المتتالية (u_n) المعرفة على ℕ كما يلي : $u_n=n+\sin(n)$.

• عين نهاية المتتالية (u_n).

حل: نعلم من أجل كل عدد طبيعي n : $-1\leq\sin(n)\leq1$ ومنه من أجل كل عدد طبيعي n : $\sin(n)\geq-1$.

إذا $u_n\geq n-1$ و $\lim\limits_{n\to+\infty}n-1=+\infty$ وبالتالي $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=+\infty$

تمرين محلول17

لتكن المتتالية (u_n) المعرفة بحدها الأول $u_0=2$ و العلاقة : $u_{n+1}=1+\frac{2}{5}u_n$.

لتكن المتتالية (v_n) المعرفة كما يلي : $v_n=u_n-\frac{5}{3}$

1) أثبت أن المتتالية (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول.

2) عين نهاية المتتالية (u_n).

حل: 1) لنحسب v_{n+1}.

$$\begin{aligned}v_{n+1}&=u_{n+1}-\frac{5}{3}\\&=1+\frac{2}{5}u_n-\frac{5}{3}\\&=\frac{2}{5}u_n-\frac{2}{3}=\frac{2}{5}\left(u_n-\frac{5}{3}\right)\\&=\frac{2}{5}v_n\end{aligned}$$

إذا أن المتتالية (v_n) متتالية هندسية أساسها $q=\frac{2}{5}$ و حدها الأول $v_0=u_0-\frac{5}{3}=2-\frac{5}{3}=\frac{1}{3}$.

2) أساس المتتالية هو $q=\frac{2}{5}$.

$-1<\frac{2}{5}<1$ إذن المتتالية (v_n) متقاربة و $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=0$ و بالتالي $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\frac{5}{3}$ لأن $u_n=v_n+\frac{5}{3}$

الوسط الحسابي.

$(u_n)_{n\geq1}$ متتالية حسابية حدها الأول u_1 و أساسها r (r عدد حقيقي).

1) بين أن $u_{n+1}+u_{n-1}=2u_n$.

2) إذا كانت a ، b ، c ثلاث حدود متتابعة من متتالية حسابية أثبت أن $a+c=2b$.

نتيجة: في متتالية حسابية مجموع حدين طرفين يساوي ضعف الحد الوسط .

تطبيق: أوجد ثلاث أعداد حقيقية a ، b ، c حدود متتابعة من متتالية حسابية علما أن:

$$\begin{cases}a+b+c=15\\a\times b\times c=80\end{cases}$$

الوسط الهندسي.

$(u_n)_{n\geq1}$ متتالية هندسية $(u_n)_{n\geq1}$ حدها الأول u_1 و أساسها q (q عدد حقيقي غير معدوم).

1) بين أن $u_{n+1}\times u_{n-1}=u_n^2$.

2) إذا كانت a ، b ، c ثلاث حدود متتابعة من متتالية حسابية أثبت أن $a\times c=b^2$.

نتيجة: في متتالية هندسية جداء حدين طرفين يساوي مربع الحد الوسط .

تطبيق: أوجد ثلاث أعداد حقيقية a ، b ، c حدود متتابعة من متتالية هندسية علما أن:

$$\begin{cases}a+b+c=26\\a\times b\times c=216\end{cases}$$

نهاية مجموع حدود متتالية هندسية.

(u_n) متتالية هندسية حدها الأول u_0 و أساسها q (q عدد حقيقي).

نضع $S_n=u_0+u_1+....+u_n$.

1) إذا كان $q=0$ أحسب S_n بدلالة u_0 ثم استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n$.

2) إذا كان $q=1$ أحسب S_n بدلالة n و u_0 ثم استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n$.

3) نفرض $q\neq0$ و $q\neq1$.

- إذا كان $q>1$ و $u_0<0$ بين أن $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n=-\infty$.
- إذا كان $q>1$ و $u_0>0$ بين أن $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n=+\infty$.
- إذا كان $-1<q<1$ بين أن $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n=\frac{u_0}{1-q}$.
- إذا كان $q\leq-1$ بين أن S_n ليس له نهاية .

تطبيق: α عدد حقيقي غير معدوم . (u_n) متتالية هندسية حدها الأول $u_0=3$ وأساسها $q=\frac{2}{\alpha}$.

ناقش تبعا لقيم العدد α نهاية S_n حيث $S_n=u_0+u_1+........+u_{n-1}+u_n$.

متتالية غير رتيبة:

دراسة مثال: (u_n) متتالية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n كما يلي : $u_n=(-2)^n$.

1) أحسب بدلالة n الفرق $u_{n+1}-u_n$.
2) ناقش حسب قيم n إشارة $u_{n+1}-u_n$.
3) هل (u_n) رتيبة.

تطبيق: لتكن المتتالية الهندسية (u_n) المعرفة بحدها الأول $u_1=3$ و أساسها $q=-\frac{3}{2}$.

أثبت أن المتتالية (u_n) غير رتيبة .

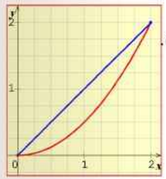
دراسة متتالية تراجعية:

تمرين: لتكن الدالة f للمتغير الحقيقي x حيث أن: $f(x)=\frac{1}{2}x^2$.

ليكن (C_f) رسمها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$. لتكن المتتالية (u_n) المعرفة بحدها الأول $u_0=a$ ($a\in$)، و من أجل كل عدد طبيعي n :

$u_{n+1}=\frac{1}{2}u_n^2$.

الجزء الأول : نفرض $a=\frac{7}{4}$.



1) أدرس إشارة $\frac{1}{2}x^2-x$.
2) أثبت أن من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0,2[$ ، $0\le\frac{1}{2}x^2\le x\le 2$.
3) أدرس تغيرات الدالة f .
4) باستعمال الرسم المقابل عين التمثيل البياني للمتتالية (u_n).
5) هل هذا التمثيل البياني يوحي باتجاه تغير المتتالية (u_n)؟
6) أثبت أن المتتالية (u_n) متناقصة .

قارن بين تغيرات الدالة f و اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

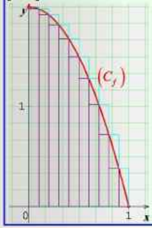
الجزء الثاني : نفرض $a=4$.

1) بين أنه إذا كان $x>2$ فإن $f(x)>2$ استنتج أن $u_n>2$.
2) بين أن (u_n) متزايدة .

الجزء الثالث : نفرض $a=2$.

3) أحسب $f(2)$.
4) بين أن (u_n) متتالية ثابتة .

المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.لتكن الدالة f للمتغير الحقيقي x المعرفة على $[0,1]$ بـ: $f(x)=2-2x^2$ ليكن (C_f) تمثيلها البياني في المعلم $(O;\vec{i},\vec{j})$. نريد حساب المساحة A مساحة السطح المحدود بالمنحنى (C_f) ، محور الفواصل و المستقيمين المعرفينبالمعادلتين $x=0$ و $x=1$. نقسم المجال $[0,1]$ إلى n جزءا متساوية حيث أن كل جزء يساوي $\frac{1}{n}$.كما هو مبين في الرسم المقابل.



ليكن E جزء المستوي المحدود بالمنحنى (C_f) و المحورين . نسمي u_n مجموع مساحات المستطيلات المحتواة في E ونسمي v_n مجموع مساحات المستطيلات التي تحوي E . و عليه لدينا $u_n\le A\le v_n$ من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم .

1) عين u_n و v_n بدلالة n ثم عين $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$ و $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n$.
2) إستنتج قيمة A يعطى المجموع $\sum_{p=1}^{n}p^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

1) مساحة المستطيل الأول المحتوى في E هي $\frac{2}{n}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$ ، مساحة المستطيل المحتوى في E و المجاور له هي $\frac{2}{n}\left(1-\frac{4}{n^2}\right)$ ،مساحة المستطيل الموالي هي $\frac{2}{n}\left(1-\frac{9}{n^2}\right)$ وهكذا حتى آخر مستطيل $\frac{2}{n}\left(1-\frac{(n-1)^2}{n^2}\right)$ وبالتالي

$u_n=\frac{2}{n}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)+\frac{2}{n}\left(1-\frac{4}{n^2}\right)+\frac{2}{n}\left(1-\frac{9}{n^2}\right)+...+\frac{2}{n}\left(1-\frac{(n-1)^2}{n^2}\right)$ أي

$u_n=\frac{2n}{n}-\frac{2}{n^3}\left(1+4+9+...+(n-1)^2\right)$ و منه $u_n=2-\frac{2}{n^3}\sum_{p=1}^{n-1}p^2$ إذن $u_n=2-\frac{(n-1)(n)(2n-1)}{3n^3}$.

مساحة المستطيل الأول من الفيئة الثانية هي $\frac{2}{n}$ ،مساحةالمستطيل الثاني هي $\frac{2}{n}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$ ،مساحة المستطيل الثالث هي $\frac{2}{n}\left(1-\frac{4}{n^2}\right)$ و هكذا إلى آخر مستطيل مساحته $\frac{2}{n}\left(1-\frac{(n-1)^2}{n^2}\right)$

وبالتالي $v_n=\frac{2}{n}+\frac{2}{n}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)+\frac{2}{n}\left(1-\frac{4}{n^2}\right)+\frac{2}{n}\left(1-\frac{9}{n^2}\right)+...+\frac{2}{n}\left(1-\frac{(n-1)^2}{n^2}\right)$ أي

$v_n=\frac{2(n+1)}{n}-\frac{2}{n^3}\left(1+4+...+(n-1)^2\right)$ ومنه $v_n=2+\frac{1}{n}-\frac{2}{n^3}\sum_{p=1}^{n-1}p^2$ إذن $v_n=2-\frac{(n-1)(n)(2n-1)}{3n^3}$.

$\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=\lim\limits_{n\to+\infty}2-\frac{(n-1)(n)(2n-1)}{3n^3}=\frac{4}{3}$ و $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\lim\limits_{n\to+\infty}2-\frac{(n-1)(n)(2n-1)}{3n^3}=2-\frac{2}{3}=\frac{4}{3}$

3) بما أن $u_n\le A\le v_n$ من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم فإن $A=\frac{4}{3}$.

الهدف من المسألة هو أيجاد نهاية متتاليتين باستعمال متتالية هندسية و متتالية ثابتة .

مسألة: لتكن المتتالية (u_n) و المتتالية (v_n) المعرفتين كما يلي :

$u_0 = 12$ ، $v_0 = 1$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \dfrac{u_n + 2v_n}{3}$ و $v_{n+1} = \dfrac{u_n + 3v_n}{4}$.

نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $w_n = u_n - v_n$ و $t_n = 3u_n + 8v_n$.

1) أثبت أن المتتالية (w_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول . أحسب w_n بدلالة n .

2) أثبت أن المتتالية (t_n) متتالية ثابتة .

3) أثبت أن المتتالية (u_n) متناقصة على $\mathbb{N}$. و أن المتتالية (v_n) متزايدة على $\mathbb{N}$.

4) عين u_n و v_n بدلالة n .

5) استنتج نهاية u_n و نهاية v_n .

حل: 1) نحسب w_{n+1} بدلالة w_n.

$$w_{n+1} = u_{n+1} - v_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{3} - \frac{u_n + 3v_n}{4} = \frac{4u_n + 8v_n - 3u_n - 9v_n}{12}$$

$$= \frac{1}{12}(u_n - v_n) = \frac{1}{12} w_n$$

إذن المتتالية (w_n) متتالية هندسية أساسها $q = \dfrac{1}{12}$ و حدها الأول $w_0 = 11$. ومنه $w_n = 11 \times \left(\dfrac{1}{12}\right)^n$

2) نحسب t_{n+1} بدلالة t_n .

$$t_{n+1} = 3u_{n+1} + 8v_{n+1} = \frac{3(u_n + 2v_n)}{3} + \frac{8(u_n + 3v_n)}{4} = u_n + 2v_n + 2u_n + 6v_n$$

$$= 3u_n + 8v_n = t_n$$

إذن المتتالية (t_n) متتالية ثابتة على $\mathbb{N}$. و منه من أجل كل عدد طبيعي n $t_n = t_0 = 3u_0 + 8v_0 = 44$

3) نحسب : $u_{n+1} - u_n = \dfrac{u_n + 2v_n}{3} - u_n = -\dfrac{2}{3}(u_n - v_n) = -\dfrac{2}{3} w_n$

بما أن من أجل كل عدد طبيعي n $w_n > 0$ فإن $u_{n+1} - u_n < 0$ و منه المتتالية (u_n) متناقصة على $\mathbb{N}$.

نحسب : $v_{n+1} - v_n = \dfrac{u_n + 3v_n}{4} - v_n = \dfrac{1}{4}(u_n - v_n) = \dfrac{1}{4} w_n$

بما أن من أجل كل عدد طبيعي n $w_n > 0$ فإن $v_{n+1} - v_n > 0$ و منه المتتالية (v_n) متزايدة على $\mathbb{N}$.

4) $\begin{cases} u_n - v_n = 11 \times \left(\dfrac{1}{12}\right)^n \\ 3u_n + 8v_n = 44 \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} u_n = 4 + 8\left(\dfrac{1}{12}\right)^n \\ u_n = 4 - 3\left(\dfrac{1}{12}\right)^n \end{cases}$

5) $-1 < \dfrac{1}{12} < 1$ إذا $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{1}{12}\right)^n = 0$ و منه $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 4$ و $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 4$.

7

المرجح في المستوي

الكفاءات المستهدفة

- إنشاء مرجح نقطتين.
- إنشاء مرجح ثلاث نقط.
- حساب إحداثيات المرجح.
- استعمال المرجح لإثبات استقامية نقط أو تلاقي مستقيمات.

ولد أرخميدس عام 287 قبل الميلاد في جزيرة صقلية، وكان والده فلكياً شهيراً، وكمعظم الشباب آنذاك سافر إلى الإسكندرية ثم إلى اليونان طلباً للدراسة، ويعد الكثير من مؤرخي الرياضيات والعلوم أن أرخميدس من أعظم علماء الرياضيات في العصور القديمة. من أشهر اكتشافاته، طرق حساب المساحات والأحجام والجانبية للأجسام، وأثبت القدرة على حساب تقريبي دقيق للجذور التربيعية وأخترع طريقة لكتابة الأرقام الكبيرة.وهو نفسه الذي حدد قيمة π وهي العلاقة بين محيط الدائرة ونصف قطرها بدقة عالية .

أما في مجال الميكانيك فأرخميدس هو مكتشف النظريات الأساسية لمركز الثقل للأسطح المستوية والأجسام الصلبة واستخدام الروافع ومخترع قلاووظ أرخميدس. ومن أبرز القوانين التي اكتشفها قانون طفو الأجسام داخل المياه والذي صار يعرف بـ 'قانون أرخميدس '.

وقد قتل أرخميدس عام 212 قبل الميلاد على يد الرومان.

أرخميدس

287 ق م / 212 ق م

تذكير حول الأشعة.

1.الأشعة المرتبطة خطيا.

تعريف1:نقول أن شعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مرتبطان خطيا إذا و فقط إذا وجد عدد حقيقي k حيث أن $\vec{u}=k\vec{v}$.

تعريف2:يكون الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ مرتبطين خطيا إذا و فقط إذا كان المستقيمين (AB) و (CD) متوازيين .

ملاحظة: الشعاع المعدوم الذي نرمز له $\vec{0}$ مرتبط خطيا مع كل شعاع من المستوي.

2.طويلة شعاع.

تعريف:طويلة شعاع $\vec{u}$ حيث $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ هي طول القطعة $[AB]$ و نرمز لها $\|\overrightarrow{AB}\|$ ونكتب $\|\vec{u}\|=\|\overrightarrow{AB}\|=AB$.

ملاحظات:

يكون الشعاع $\vec{u}$ شعاع وحدة إذا و فقط إذا كان $\|\vec{u}\|=1$ (وحدة أطوال في المستوي).

$\|\overrightarrow{AB}\|=0$ معناه النقطة A منطبقة على النقطة B .

من أجل كل شعاع $\vec{u}$ و من أجل كل عدد حقيقي k لدينا $\|k\vec{u}\|=|k|\times\|\vec{u}\|$.

$M\in(AB)$ معناه $\overrightarrow{AM}=k\overrightarrow{AB}$ (k عدد حقيقي)

3.التوازي و الإستقامة.

مبرهنة1: القول أن المستقيمين (AB) و (CD) متوازيان معناه أنه يوجد عدد حقيقي k حيث أن $\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{CD}$.

مبرهنة2: القول أن النقط A ، B ، C استقامة واحدة معناه أنه يوجد عدد حقيقي k حيث أن $\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{AC}$.

4.الأشعة المرتبطة خطيا في الهندسة التحليلية.

مبرهنة1:في المستوي المنسوب إلى معلم (O,I,J)ليكن الشعاعان $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ و $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$.

القول أن الشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مرتبطان خطيا معناه : $xy'-x'y=0$.

مبرهنة2:في المستوي المنسوب إلى معلم (O,I,J)لتكن القطتان $A(x,y)$ و $B(x',y')$.

مركبتا الشعاع $\overrightarrow{AB}$ هي: $\begin{pmatrix}x'-x\\y'-y\end{pmatrix}$.

مبرهنة3:في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس (O,I,J)ليكن الشعاع $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$.

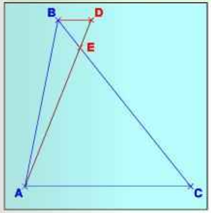
طويلة الشعاع $\vec{u}$ هي : $\|\vec{u}\|=\sqrt{x^2+y^2}$.

تمرين محلول 1

ليكن ABC مثلث من المستوي، لتكن النقطة D حيث $5\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AC}$ و لتكن النقطة E حيث $6\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{BC}$

أثبت أن النقط A ، E ، D على استقامة واحدة .

طريقة: لإثبات أن النقط A ، E ، D على استقامة واحدة نثبت أن $\overrightarrow{EA}=k\overrightarrow{DE}$ (k عدد حقيقي) .



حل: بتطبيق علاقة شال $\overrightarrow{EA}=\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{CA}$.

نعلم أن $5\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AC}$ ومنه $5\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{CA}$.ونعلم أن $6\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{BC}$.

لدينا $\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{EC}=6\overrightarrow{BE}$ (الرسم المقابل) ومنه $\overrightarrow{EC}=5\overrightarrow{BE}$.

$\overrightarrow{EA}=\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{CA}$ ومنه $\overrightarrow{EA}=5\overrightarrow{BE}+5\overrightarrow{DB}$ أي

$\overrightarrow{EA}=5\overrightarrow{DB}+5\overrightarrow{BE}$ ومنه $\overrightarrow{EA}=5(\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{BE})$

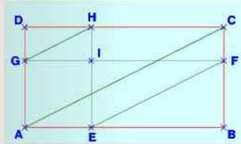
أي $\overrightarrow{EA}=5\overrightarrow{DE}$

إذن النقط A ، E ، D في استقامية .

تمرين محلول 2

ليكن $ABCD$ مستطيلا من المستوي، α عدد حقيقي غير معدوم ويختلف عن 1 ، E النقطة حيث $\overrightarrow{AE}=\alpha\overrightarrow{AB}$.لتكن F النقطة حيث $\overrightarrow{BF}=(1-\alpha)\overrightarrow{BC}$. المستقيم الموازي للمستقيم (AD) و يشمل E يقطع المستقيم (CD) في H . المستقيم الموازي للمستقيم (AB) و يشمل F يقطع المستقيم (AD) في G . المستقيمان (EH) و (FG) يتقاطعان في النقطة I . أثبت أن المستقيمات (AC) ، (EF) و (GH) متوازية .

طريقة: لإثبات أن المستقيمات (AC) ، (EF) و (GH) متوازية نثبت أن الأشعة $\overrightarrow{AC}$ ، $\overrightarrow{EF}$ و $\overrightarrow{GH}$ مرتبطة خطيا مثنى مثنى .



حل: $\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{EI}+\overrightarrow{EB}$ (محصلة شعاعين)

$\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{EI}+\overrightarrow{EB}=\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AE}$

$\overrightarrow{EF}=(1-\alpha)\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AB}-\alpha\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{EF}=(1-\alpha)\overrightarrow{BC}+(1-\alpha)\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{EF}=(1-\alpha)(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AB})$ و منه $\overrightarrow{EF}=(1-\alpha)\overrightarrow{AC}$

إذن (AC) و (EF) متوازيين . $\overrightarrow{GH}=\overrightarrow{GD}+\overrightarrow{GI}$ (محصلة شعاعين) ومنه $\overrightarrow{GH}=\overrightarrow{FC}+\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{AE}$

$\overrightarrow{GH}=\overrightarrow{BC}-(1-\alpha)\overrightarrow{BC}+\alpha\overrightarrow{AB}$ ومنه $\overrightarrow{GH}=\alpha\overrightarrow{BC}+\alpha\overrightarrow{AB}$ أي $\overrightarrow{GH}=\alpha\overrightarrow{AC}$

ومنه (EF) و (GH) متوازيين . و بالتالي المستقيمات (AC) ، (EF) و (GH) متوازية .

ملاحظة: يمكن اختيار الطريقة التحليلية باعتبار المعلم $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD})$

مرجح نقطتين.

تعريف مرجح نقطتين.

تعريف: لتكن A و B نقطتين متمايزتين و ليكن α و β عددين حقيقيين حيث $\alpha+\beta\neq 0$.

نسمي مرجح النقطتين A و B المرفقتين بالمعاملين α و β على الترتيب النقطة G حيث: $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}=\vec{0}$

ملاحظات: إذا كانت نقطة A مرفقة بالعدد الحقيقي α الثنائية (A,α) تسمى نقطة مثقلة .

الجملة $\{(A,\alpha);(B,\beta)\}$ تسمى جملة نقطتين مثقلتين(يمكن تعريف وبنفس الطريقة جملة n نقطة مثقلة).

النقطة G هي مرجح الجملة المثقلة $\{(A,\alpha);(B,\beta)\}$.

إذا كانت A منطبقة على B نحصل على $(\alpha+\beta)\overrightarrow{GA}=\vec{0}$ وبما أن $\alpha+\beta\neq 0$ فإن $\overrightarrow{GA}=\vec{0}$ أي G ينطبق على A

إذا كان $\alpha+\beta=0$ أي $\alpha=-\beta$ العلاقة تصبح $\alpha(\overrightarrow{GA}-\overrightarrow{GB})=\vec{0}$ وهذا غير ممكن إذا كان $\alpha\neq 0$ و $A\neq B$

و النقطة G غير موجودة . مثلا إذا كان $\alpha=2$ و $\beta=-2$ وإذا كان $A\neq B$ الجملة $\{(A,2);(B,-2)\}$ ليس لها مرجح.

نتيجة: إذا كان $\alpha=\beta$ نحصل $\overrightarrow{GA}=-\overrightarrow{GB}$ و النقطة G منتصف القطعة $[AB]$ تسمى عندئذ G مركز المسافتين المتساويتين للنقطتين A و B .وفي هذه الحالة نأخذ $\alpha=\beta=1$.

مبرهنة1: إذا كانت النقطة G مرجح النقطتين A و B المرفقتين بالمعاملين α و β على الترتيب فإن النقطة G وحيدة.

برهان: $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}=\vec{0}$ معناه $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{AB}=\vec{0}$ ومنه $(\alpha+\beta)\overrightarrow{GA}=-\beta\overrightarrow{AB}$ بما أن $\alpha+\beta\neq 0$

فإن $\overrightarrow{AG}=\frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}$. A و B نقطتان ثابتتان إذا G وحيد .

خواص: 1 إذا كانت G مرجح الجملة المثقلة $\{(A,\alpha);(B,\beta)\}$. فإن G مرجح الجملة المثقلة $\{(A,k\alpha);(B,k\beta)\}$. حيث k عدد حقيقي غير معدوم .

2 إذا كانت النقطة G مرجح الجملة المثقلة $\{(A,\alpha);(B,\beta)\}$.فإن النقط A ، B و G على استقامة واحدة.

برهان:

1 $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}=\vec{0}$ بضرب الطرفين في العدد الحقيقي الغيرالمعدوم k نحصل على:

$k\alpha\overrightarrow{GA}+k\beta\overrightarrow{GB}=\vec{0}$ ونعلم أن $\alpha+\beta\neq 0$ و بما أن $k\neq 0$ فإن $k\alpha+k\beta\neq 0$ و هذا يعني صحة الخاصة الثانية .

2.من المبرهنة 1 السابقة نعلم أن $\overrightarrow{GA}=-\frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}$ معناه أن النقط A ، B و G على استقامة واحدة.

مبرهنة2: إذا كانت النقطة G مرجح النقطتين A و B المرفقتين بالمعاملين α و β على الترتيب فإن من أجل كل نقطة M $\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}=(\alpha+\beta)\overrightarrow{MG}$.

برهان:

من أجل كل نقطة M : $\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}=\alpha\overrightarrow{MG}+\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{MG}+\beta\overrightarrow{GB}$ وبما أن $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}=\vec{0}$

فإن $\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}=(\alpha+\beta)\overrightarrow{MG}$.

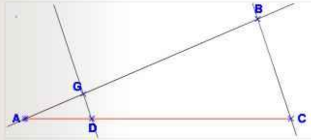
ملاحظة: إذا كان المرجح G منتصف القطعة $[AB]$ فإن من أجل كل نقطة M $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{MG}$.

تمرين محلول 3

A و B نقطتان متمايزتان .
1) أنشئ النقطة G مرجح النقطتين A و B المرفقتين بالمعاملين 3 و 1 على الترتيب .
2) أنشئ النقطة H مرجح النقطتين A و B المرفقتين بالمعاملين -4 و 3 على الترتيب .

طريقة: نعلم أنه إذا كانت النقطة G مرجح الجملة $\{(A,\alpha);(B,\beta)\}$ فإن $\overrightarrow{AG}=\frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}$.نقسم القطعة $[AB]$ إلى $\alpha+\beta$ جزء متقايسة ثم إنطلاقا من A نضع G على بعد $\frac{\beta}{\alpha+\beta}$.(يمكن الإستعانة مبرهنة طاليس كما هو في الحل)

حل: 1) $4=1+3$ و $4\neq 0$ إذا النقطة G موجودة و وحيدة . و هي تحقق ما يلي $3\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}=\vec{0}$ و منه $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$ إذا النقطة G تنتمي إلى المستقيم (AB) ولإنشاء النقطة G نختار قطعة $[AC]$ نقسمها إلى 4 أجزاء متقايسة ثم نضع النقطة D على (AC) بحيث $\overrightarrow{AD}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$ ثم من D ننشئ المستقيم (Δ) الموازي للمستقيم (BC) . (Δ) يقطع (AB) في النقطة G.



2) $3-4=-1$ و $-1\neq 0$ إذا النقطة H موجودة و وحيدة . و هي تحقق ما يلي $-4\overrightarrow{HA}+3\overrightarrow{HB}=\vec{0}$ و منه $\overrightarrow{AH}=-3\overrightarrow{AB}$ إذا النقطة H تنتمي إلى المستقيم (AB) وننشئ النقطة H بنفس الطريقة السابقة.

تمرين محلول 4

A و B نقطتان متمايزتان .
1) لتكن النقطة K حيث أن: $\overrightarrow{AK}=-\frac{8}{3}\overrightarrow{AB}$.أثبت أن K مرجح النقطتين A و B مرفقتين بمعاملين صحيحين يطلب تعيينهما
2) أثبت أن كل نقطة من المستقيم (AB) هي مرجح للنقطتين A و B مرفقتين بمعاملين يطلب تعيينهما .

حل: 1) $\overrightarrow{AK}=-\frac{8}{3}\overrightarrow{AB}$ و منه $3\overrightarrow{AK}=-8\left(\overrightarrow{AK}+\overrightarrow{KB}\right)$ و بالتالي $11\overrightarrow{AK}+8\overrightarrow{KB}=\vec{0}$ و نستنتج أن: $11\overrightarrow{KA}-8\overrightarrow{KB}=\vec{0}$ إذا K مرجح النقطتين A و B مرفقتين بمعاملين 11 و -8 على الترتيب.
2) لتكن M نقطة من المستقيم (AB) إذن الشعاعين $\overrightarrow{MA}$ و $\overrightarrow{AB}$ مرتبطان خطيا و منه يوجد عدد حقيقي α حيث $\overrightarrow{AM}=\alpha\overrightarrow{AB}$ و منه $\overrightarrow{AM}=\alpha\left(\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MB}\right)$ وبالتالي $(1-\alpha)\overrightarrow{AM}=\alpha\overrightarrow{MB}$. و نستنتج أن: $(1-\alpha)\overrightarrow{AM}-\alpha\overrightarrow{MB}=\vec{0}$ بعبارة أخرى $(1-\alpha)\overrightarrow{MA}+\alpha\overrightarrow{MB}=\vec{0}$.
$(1-\alpha)+\alpha=1$ و $1\neq 0$ إذا النقطة M مرجح النقطتين A و B المرفقتين بالمعاملين $1-\alpha$ و α على الترتيب.
و في الخلاصة نستنتج أن المستقيم (AB) هو مجموعة مراجح الجملة $\{(A,1-\alpha);(B,\alpha)\}$ حيث α يمسح $\mathbb{R}$.

مرجح ثلاث نقط.

تعريف مرجح ثلاث نقط.

تعريف: A ، B ، و C ثلاث نقط و α ، β و γ ثلاث أعداد حقيقية حيث $\alpha+\beta+\gamma\neq 0$.
نسمي مرجح النقط A ، B ، و C المرفقة بالمعاملات α ، β و γ على الترتيب النقطة G حيث: $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}+\gamma\overrightarrow{GC}=\vec{0}$

مبرهنة1: إذا كانت النقطة G مرجحا للنقط A ، B ، و C المرفقة بالمعاملات α ، β و γ على الترتيب فإن النقطة G وحيدة.

برهان: بكتابة $\overrightarrow{GB}=\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AC}$ نحصل على $(\alpha+\beta+\gamma)\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{AB}+\gamma\overrightarrow{AC}=\vec{0}$
و منه $\overrightarrow{AG}=\frac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{AB}+\frac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{AC}$ أي $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{\alpha+\beta+\gamma}\left(\beta\overrightarrow{AB}+\gamma\overrightarrow{AC}\right)$
بوضع $\lambda=\frac{1}{\alpha+\beta+\gamma}$ و $\beta\overrightarrow{AB}+\gamma\overrightarrow{AC}=\vec{u}$ نحصل على $\overrightarrow{AG}=\lambda\vec{u}$ ومنه G وحيدة .

ملاحظة: إذا كانت المعاملات متساوية و غير معدومة يسمى G مركز المسافات المتساوية للنقط A ، B ، و C .ونأخذ في هذه الحالة المعاملات مساوية لـ 1 ،عندئذ و إذا كانت النقط ليست على استقامة واحدة النقطة G هي مركزثقل المثلث ABC ، بالفعل G تحقق $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$ و منه $3\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$ و بالتالي $\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AA'}$. حيث A' منتصف الضلع $[BC]$. إذن النقطة G على ثلثي البعد من A و ثلث البعد من A' و بالتالي G مركز ثقل المثلث ABC .

خاصية: إذا كانت النقطة G مرجح الجملة المثقلة $\{(A,\alpha);(B,\beta);(C,\gamma)\}$ فإن G مرجح الجملة المثقلة $\{(A,k\alpha);(B,k\beta);(C,k\gamma)\}$. حيث k عدد حقيقي غير معدوم .

مبرهنة2: إذا كانت النقطة G مرجح النقط A ، B ، و C المرفقة بالمعاملات α ، β و γ على الترتيب فإن من أجل كل نقطة M ، $\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}+\gamma\overrightarrow{MC}=(\alpha+\beta+\gamma)\overrightarrow{MG}$.

برهان: بكتابة $\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA}$ ، $\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GB}$ و $\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GC}$ نحصل على
$\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}+\gamma\overrightarrow{MC}=(\alpha+\beta+\gamma)\overrightarrow{MG}$

خاصية التجميع.

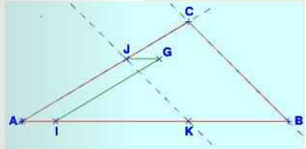
مبرهنة: G مرجح النقط A ، B ، و C المرفقة بالمعاملات α ، β و γ على الترتيب.
إذا كان $\alpha+\beta\neq 0$ و كانت D مرجح النقطتين A و B المرفقتين بالمعاملين α و β على الترتيب.
فإن النقطة G مرجح النقطتين D و C المرفقتين بالمعاملين $\alpha+\beta$ و γ على الترتيب.

برهان: لدينا $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}+\gamma\overrightarrow{GC}=\vec{0}$ و نعلم أن من أجل كل نقطة M لدينا $\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}=(\alpha+\beta)\overrightarrow{MD}$
و إذا كانت M منطبقة على G ، $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}=(\alpha+\beta)\overrightarrow{GD}$ ومنه $(\alpha+\beta)\overrightarrow{GD}+\gamma\overrightarrow{GC}=\vec{0}$ و بالتالي G مرجح النقطتين D و C المرفقتين بالمعاملين $\alpha+\beta$ و γ على الترتيب.
ونستنتج أنه يمكن تعويض نقطتين بمرجحيهما مرفق بمجموع المعاملين .

تمرين محلول 5

A ، B ، و C ثلاث نقط من المستوي

أنشئ النقطة G مرجح النقط A ، B ، و C المرفقة بالعوامل 2 ، 1 و 5 على الترتيب



حل: $2+1+5=8$ و $8\neq 0$ إذن G موجود و وحيد . النقطة G مرجح النقط A ، B ، و C المرفقة بالعوامل 2 ، 1 و 5 على الترتيب معناه $2\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+5\overrightarrow{GC}=\vec{0}$ و بكتابة $\overrightarrow{GB}=\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AC}$ نحصل على $8\overrightarrow{GA}=-\overrightarrow{AB}-5\overrightarrow{AC}$ ومنه $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{8}\overrightarrow{AB}+\frac{5}{8}\overrightarrow{AC}$

لإنشاء G $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{8}\overrightarrow{AB}+\frac{5}{8}\overrightarrow{AC}$ نأخذ على $[AB]$ النقطتين I و K حيث $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{8}\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AK}=\frac{5}{8}\overrightarrow{AB}$.

من K ننشئ المستقيم الموازي للمستقيم (BC) الذي يقطع المستقيم (AC) في J إذا حسب مبرهنة طاليس $\overrightarrow{AJ}=\frac{5}{8}\overrightarrow{AC}$.

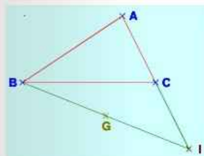
ومنه $\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{AJ}$ أي AG هي محصلة الشعاعين $\overrightarrow{AI}$ و $\overrightarrow{AJ}$.

تمرين محلول 6

A ، B ، و C ثلاث نقط من المستوي .

1) أنشئ النقطة G مرجح النقط A ، B ، و C المرفقة بالمعاملات -1 ، 1 و 2 على الترتيب

2) ليكن الشعاع $\vec{u}$ المعرف بـ $\vec{u}=-\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}$ أكتب $\vec{u}$ بدلالة $\overrightarrow{MG}$ ثم استنتج مجموعة النقط M التي تحقق $\|\vec{u}\|=2$



حل: 1) $2+1-1=2$ و $2\neq 0$ إذا G موجود و وحيد . النقطة G مرجح النقط A ، B ، و C المرفقة بالمعاملات -1 ، 1 و 2 على الترتيب معناه $-\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+2\overrightarrow{GC}=\vec{0}$. $-1+2=1$ و $1\neq 0$ إذن يوجد مرجح I للنقطتين A و C مرفقتين بالمعاملين -1 و 2 أي $-\overrightarrow{IA}+2\overrightarrow{IC}=\vec{0}$ أي $\overrightarrow{IA}=2\overrightarrow{IC}$ و منه $\overrightarrow{AI}=2\overrightarrow{AC}$ أي C منتصف القطعة $[AI]$.

بتطبيق خاصية التجميع العلاقة $-\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+2\overrightarrow{GC}=\vec{0}$ تصبح $\overrightarrow{GI}+\overrightarrow{GB}=\vec{0}$ أي G منتصف القطعة $[IB]$

2) في العلاقة $\vec{u}=-\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}$ ندخل G في الأشعة $\overrightarrow{MA}$ ، $\overrightarrow{MB}$ و $\overrightarrow{MC}$ و نحصل على : $\vec{u}=-\overrightarrow{MG}-\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GB}+2\overrightarrow{MG}+2\overrightarrow{GC}$ و بما أن $-\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+2\overrightarrow{GC}=\vec{0}$ نستنتج : $\vec{u}=2\overrightarrow{MG}$.

$\|\vec{u}\|=2$ يعني $\|2\overrightarrow{MG}\|=2$ أي $MG=1$ إذن مجموعة النقط M هي الدائرة التي مركزها G و نصف قطرها 1 .

إحداثيات مرجح ثلاث نقط.

مبرهنة: المستوي منسوب إلى معلم $(O;\vec{i},\vec{j})$.لتكن النقطة G مرجح النقط A ، B و C المرفقة بالمعاملات α ، β و γ على الترتيب.نضع $A(x_A;y_A)$ ، $B(x_B;y_B)$ و $C(x_C;y_C)$ إحداثيا النقطة G هي $(x_G;y_G)$ حيث :

$$x_G=\frac{\alpha x_A+\beta x_B+\gamma x_C}{\alpha+\beta+\gamma} \text{ و } y_G=\frac{\alpha y_A+\beta y_B+\gamma y_C}{\alpha+\beta+\gamma}$$

برهان: G مرجح النقط A ، B ، C و المرفقة بالمعاملات α ، β و γ على الترتيب. ومنه من أجل كل نقطة M من المستوي لدينا $\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}+\gamma\overrightarrow{MC}=(\alpha+\beta+\gamma)\overrightarrow{MG}$ إذا أخذنا M على O نحصل على :

$\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}+\gamma\overrightarrow{OC}=(\alpha+\beta+\gamma)\overrightarrow{OG}$ و منه $\overrightarrow{OG}=\frac{\alpha}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{OA}+\frac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{OB}+\frac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{OC}$

ومن هذه العلاقة نستنتج : $x_G=\frac{\alpha}{\alpha+\beta+\lambda}x_A+\frac{\beta}{\alpha+\beta+\lambda}x_B+\frac{\gamma}{\alpha+\beta+\lambda}x_C$

$$y_G=\frac{\alpha}{\alpha+\beta+\lambda}y_A+\frac{\beta}{\alpha+\beta+\lambda}x_B+\frac{\gamma}{\alpha+\beta+\lambda}y_C$$

و بالتالي : $x_G=\frac{\alpha x_A+\beta x_B+\gamma x_C}{\alpha+\beta+\gamma}$ و $y_G=\frac{\alpha y_A+\beta y_B+\gamma y_C}{\alpha+\beta+\gamma}$.

ملاحظة: إذا كانت النقطة G مرجح النقطتين A و B المرفقتين بالمعاملين α و β على الترتيب.و كان : $A(x_A;y_A)$ ، $B(x_B;y_B)$ و $G(x_G;y_G)$ فإن $x_G=\frac{\alpha x_A+\beta x_B}{\alpha+\beta}$ و $y_G=\frac{\alpha y_A+\beta y_B}{\alpha+\beta}$

مثال: المستوي منسوب إلى معلم $(O;\vec{i},\vec{j})$ لتكن النقط $A(1;2)$ ، $B(-3;5)$ و $C(0;2)$.

النقطة G مرجح النقط A ، B و C المرفقة بالمعاملات -1 ، -1 و 4 على الترتيب إحداثياها :

$$x_G=\frac{\alpha x_A+\beta x_B+\gamma x_C}{\alpha+\beta+\gamma}=\frac{-1+3+0}{2}=1 \text{ و } y_G=\frac{\alpha y_A+\beta y_B+\gamma y_C}{\alpha+\beta+\gamma}=\frac{-2-5+8}{2}=\frac{1}{2}$$

حالات خاصة: 1) إذا كانت النقطة G منتصف القطعة $[AB]$.

$$x_G=\frac{x_A+x_B}{2} \text{ و } y_G=\frac{y_A+y_B}{2} .$$

2) إذا كانت النقطة G مركز ثقل المثلث ABC .

$$x_G=\frac{x_A+x_B+x_C}{3} \text{ و } y_G=\frac{y_A+y_B+y_C}{3} .$$

مرجح عدة نقط.(مرجح n نقطة حيث $n>3$)

تعريف: لتكن A_1 ، A_2 ، A_3 ،.....، A_n n نقطة مرفقة بالمعاملات α_1 ، α_2 ، α_3 ،.....، α_n على الترتيب حيث. $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+....+\alpha_n\neq 0$ نسمي مرجح النقط A_1 ، A_2 ، A_3 ،.....، A_n مرفقة بالمعاملات α_1 ، α_2 ، α_3 ،.....، α_n على الترتيب النقطة G حيث: $\alpha_1\overrightarrow{GA_1}+\alpha_2\overrightarrow{GA_2}+\alpha_3\overrightarrow{GA_3}+....+\alpha_n\overrightarrow{GA_n}=\vec{0}$

ملاحظة: الخواص المعروفة في مرجح ثلاث نقط تبقى صحيحة.

تمرين محلول 9

المستوي منسوب إلى معلم $(O;\vec{i},\vec{j})$. لتكن النقط $A(1;2)$ ، $B(-1;4)$ و $C(-3;3)$.

1) أثبت أن النقط A ، B و C ليست على استقامة واحدة .

2) عين إحداثيات مركز ثقل المثلث ABC .

3) عين إحداثيات النقطة H مرجح الجملة $\{(A,-1);(B,-3);(C,2)\}$.

حل: 1) للبرهان على أن النقط A ، B و C ليست على استقامة واحدة يمكن أن نبرهن أن المستقيمين (AB) و (AC) غير متوازيين. الشعاعان $\overline{AB}\begin{pmatrix}-2\\2\end{pmatrix}$ و $\overline{AC}\begin{pmatrix}-4\\1\end{pmatrix}$ هما شعاعا توجيه للمستقيمين (AB) و (AC) على الترتيب .

$(-2)\times(1)-(-4)\times(2)=6$ و $6\neq 0$ إذن المستقيمان (AB) و (AC) غير متوازيين . و بالتالي النقط A ، B و C ليست على استقامة واحدة و ABC مثلث من المستوي .

2) ليكن G مركز ثقل المثلث ABC . نضع $G(x_G;y_G)$.

$x_G=\frac{1-1-3}{3}$ و $y_G=\frac{2+4+3}{3}$. و منه $x_G=-1$ و $y_G=3$.

إذن $G(-1;3)$.

3) $-1-3+2=-2$ و $-2\neq 0$ إذن المرجح H موجود و وحيد نضع $H(x_H;y_H)$.

$x_H=\frac{(-1)\times1+(-3)\times(-1)+2\times(-3)}{-2}$ و $y_H=\frac{(-1)\times2+(-3)\times4+2\times3}{-2}$

و منه : $x_H=2$ و $y_H=4$ و بالتالي : $H(2;4)$

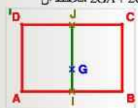
تمرين محلول 10

$ABCD$ مستطيل من المستوي.

1) عين النقطة G مرجح الجملة $\{(A,2);(B,2);(C,1);(D,1)\}$.

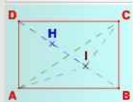
2) عين النقطة H مرجح الجملة $\{(A,1);(B,1);(C,1);(D,3)\}$.

حل: 1) $2+2+1+1=6$ و $6\neq 0$ إذن المرجح G موجود و وحيد. $2\overline{GA}+2\overline{GB}+\overline{GC}+\overline{GD}=\vec{0}$.نلاحظ أن النقطتين A و B مرفقتان بنفس المعامل 2 وأن النقطتين C و D مرفقتان بنفس المعامل 1. إذن يمكن تعويض A و B بالنقطة I مرجحيهما مرفقتين بالمعاملين 2 ، 2 على الترتيب ومنه I منتصف القطعة $[AB]$ و يمكن تعويض C و D بالنقطة J. مرجحيهما مرفقتين بالمعاملين 1، 1 على الترتيب و منه J منتصف القطعة $[CD]$ و بالتالي $4\overline{GI}+2\overline{GJ}=\vec{0}$ ومنه $\overline{IG}=\frac{1}{3}\overline{IJ}$



2) $1+1+1+3=6$ و $6\neq 0$ إذن المرجح H موجود و وحيد.

$\overline{HA}+\overline{HB}+\overline{HC}+3\overline{HD}=\vec{0}$.نلاحظ أن النقط A ، B و C مرفقة بنفس المعامل 1 . يمكن تعويض A ، B و C بـ I مركزثقل المثلث ABC . و بالتالي $3\overline{GI}+3\overline{GD}=\vec{0}$ إذن G منتصف $[ID]$



تعيين مجموعة نقط باستعمال المرجح.

ABC مثلث من المستوي. α ، β و γ ثلاثة أعداد حقيقية حيث $\alpha+\beta+\gamma\neq 0$.

ليكن G مرجح النقط A ، B و C المرفقة بالمعاملات α ، β و γ على الترتيب .

الهدف هو تعيين حسب قيم العدد الحقيقي k المجموعة (Γ_k) مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق :

$$\|\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}+\gamma\overrightarrow{MC}\|=k$$

1. أكتب الشعاع $\alpha\overline{MA}+\beta\overline{MB}+\gamma\overline{MC}$ بدلالة الشعاع $\overline{MG}$ ثم بين أن $MG=\frac{k}{|\alpha+\beta+\gamma|}$.

2. ناقش تبعا لقيم العدد الحقيقي k طبيعة المجموعة (Γ_k) محددا عناصرها الهندسية .

تطبيقات:

1. ABC مثلث. بين أن مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق : $\|\overline{MA}-2\overline{MB}+3\overline{MC}\|=6$ دائرة يطلب تعيين مركزها و نصف قطرها .

2. ABC مثلث قائم ومتساوي الساقين من المستوي. حيث $CA=CB=1$.
عين و أنشئ مجموعة النقط M من المستوي حيث : $\|-2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-3\overrightarrow{MC}\|=\sqrt{5}$.

3. ABC مثلث متقايس الأضلاع من المستوي حيث $AB=AC=BC=1$.
عين و أنشئ مجموعة النقط M من المستوي حيث : $\|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\|=\sqrt{3}$.

4. ABC مثلث. عين مجموعة النقط M من المستوي حيث : $\|\overline{MA}+\overline{MB}+2\overline{MC}\|=2\|\overline{MA}+\overline{MC}\|$.

5. ABC مثلث متقايس الأضلاع من المستوي حيث $AB=AC=BC=a$. لتكن (Γ) مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق : $\|\overline{MA}-4\overline{MB}+\overline{MC}\|=\|\overline{MA}-2\overline{MB}+\overline{MC}\|$

❖ تحقق أن النقطة B تنتمي إلى المجموعة (Γ).

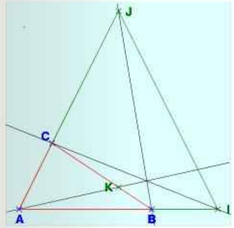
❖ بين أن الشعاع $\overline{MA}-2\overline{MB}+\overline{MC}$ مستقل عن النقطة M.

❖ ليكن G مرجح الجملة المثقلة $\{(A,1),(B,-4),(C,1)\}$.

بين أن $GM=a\frac{\sqrt{3}}{2}$ ثم استنتج طبيعة المجموعة (Γ) محددا عناصرها المميزة.

❖ أنشئ المجموعة (Γ).

استعمال المرجح لإثبات تلاقي مستقيمات:



ليكن ABC مثلث من المستوي لتكن النقط I ، J و K المعرفة كما يلي :

I نظيرة منتصف القطعة $[AB]$ بالنسبة إلى B .

النقطة J تحقق العلاقة $2\vec{JA}-3\vec{JC}=\vec{0}$.

النقطة K تحقق العلاقة $\vec{BK}=\frac{1}{3}\vec{BC}$.

1) أرسم شكلا توضع فيه النقط I ، J و K مع إعطاء تبرير لهذا الإنشاء . ماذا يمكن تخمينه بخصوص المستقيمات (CI) ، (BJ) و (AK) .

2) أثبت أن كل نقطة من النقط I ، J و K هي مرجح لنقطتين من النقط A ، B و C يطلب تحديد المعاملين في كل حالة .

3) أثبت أن المستقيمات (CI) ، (BJ) و (AK) متقاطعة .

مستقيم اولار (Euler):

ليكن ABC مثلث من المستوي و النقطة G مركز ثقله . و O مركز الدائرة المحيطة بالمثلث ABC .

لكن A' منتصف القطعة $[BC]$ ، B' منتصف القطعة $[AC]$ ، C' منتصف القطعة $[AB]$.

لتكن النقطة H حيث أن : $\vec{OH}=\vec{OA}+\vec{OB}+\vec{OC}$.

1) أنجز رسما بدون إنشاء النقطة H.

2) أثبت أن الشعاعين $\vec{AH}$ و $\vec{OA'}$ مرتبطان خطيا .
إستنتج أن المستقيمين (AH) و (BC) متعامدين .

3) ماذا تمثل النقطة H ؟

4) أثبت أن O مرجح النقطتين H و G مرفقتين بالمعاملين -1 و 3 على الترتيب.

5) أثبت أن النقط O ، G و H على استقامة واحدة . حدد وضعية النقط الثلاثة .

حالة خاصة: إذا كان المثلث ABC متقايس الأضلاع فإن النقط الثلاثة O ، G و H منطبقة على بعضها

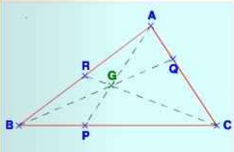
نتيجة: المستقيم الذي يشمل النقط O ، G و H يسمى **مستقيم اولار (Droite d'_Euler) للمثلث** ABC .

الهدف من هذه المسألة هو إثبات تقاطع مستقيمات باستعمال المرجح .

ABC مثلث من المستوي و النقط P ، Q و R معرفة كما يلي :

- $2\vec{PB}+\vec{PC}=\vec{0}$.
- $\vec{AQ}=\frac{1}{3}\vec{AC}$.
- R منتصف القطعة $[AB]$.

أثبت أن المستقيمات (AP) ، (BQ) و (CR) متقاطعة في نقطة يطلب تعيينها .



النقطة P معرفة بالعلاقة $2\vec{PB}+\vec{PC}=\vec{0}$ و منه النقطة P هي مرجح النقطتين B و C مرفقتين بالمعاملين 2 و 1 على الترتيب و نستنتج أن $\vec{BP}=\frac{1}{3}\vec{BC}$.

النقطة Q معرفة بالعلاقة $\vec{AQ}=\frac{1}{3}\vec{AC}$ و نستنتج أن $2\vec{QA}+\vec{QC}=\vec{0}$ و منه النقطة Q هي مرجح النقطتين A و C مرفقتين بالمعاملين 2 و 1 على الترتيب.

النقطة R منتصف القطعة $[AB]$ إذا النقطة R هي مرجح النقطتين A و B مرفقتين بالمعاملين 1 و 1 على الترتيب.

لتكن النقطة G مرجح A ، B و C المرفقة بالمعاملات 2 ، 2 و 1 على الترتيب و منه $2\vec{GA}+2\vec{GB}+\vec{GC}=\vec{0}$.

$2+2+1=5$ و $5\neq 0$ إذا المرجح G موجود و وحيد.

حسب خاصية التجميع:

النقطة G مرجح الجملة $\{(P,3);(A,2)\}$. ومنه النقطة G تنتمي إلى المستقيم (AP) .

النقطة G مرجح الجملة $\{(Q,3);(B,2)\}$. ومنه النقطة G تنتمي إلى المستقيم (BQ) .

النقطة R منتصف القطعة $[AB]$ إذا $\vec{RA}+\vec{RB}=\vec{0}$.و منه و بضرب الطرفين في 2 نحصل على $2\vec{RA}+2\vec{RB}=\vec{0}$.

في العلاقة $2\vec{GA}+2\vec{GB}+\vec{GC}=\vec{0}$ ندخل النقطة R في الشعاعين $\vec{GA}$ و $\vec{GB}$ و نحصل على :

$$2\left(\vec{GR}+\vec{RA}\right)+2\left(\vec{GR}+\vec{RB}\right)+\vec{GC}=\vec{0}$$

$$4\vec{GR}+2\vec{RA}+2\vec{RB}+\vec{GC}=\vec{0}$$

و نعلم أن $2\vec{RA}+2\vec{RB}=\vec{0}$.

إذا $4\vec{GR}+\vec{GC}=\vec{0}$ و بالتالي النقطة G مرجح الجملة $\{(R,4);(C,1)\}$.

ومنه النقطة G تنتمي إلى المستقيم (CR).

إذا النقطة G تنتمي إلى المستقيمات (AP) ، (BQ) و (CR).

و منه المستقيمات (AP) ، (BQ) و (CR) متقاطعة في نقطة واحدة هي النقطة G مرجح A ، B و C المرفقة بالمعاملات 2 ، 2 و 1 على الترتيب .

مسائل محلولة

الهدف من هذه المسألة هو إيجاد نهاية متتالية باستعمال المرجح .

ABC مثلث متساوي الساقين في النقطة A ليكن $[AH]$ الارتفاع المتعلق بالضلع $[BC]$ حيث $AH=4cm$.

1) عين وأنشئ النقطة G مرجح A ، B و C المرفقة بالمعاملات 2 ، 1 و 1 على الترتيب .

2) M نقطة من المستوي .عين طويلة الشعاع $\vec{u}$ حيث : $\vec{u}=2\vec{MA}-\vec{MB}-\vec{MC}$.

3) عين و أنشئ مجموعة النقط M من المستوي حيث : $\|2\vec{MA}+\vec{MB}+\vec{MC}\|=\|\vec{u}\|$.

4) لتكن G_n مرجح الجملة A ، B و C $\{(A,2);(B,n);(C,n)\}$. حيث n عدد طبيعي

أثبت أن النقطة G_n موجودة من أجل كل قيمة لـ n .

أثبت أن G_n ينتمي إلى القطعة $[AH]$.

5) بين أن مجموعة النقط M من المستوي حيث : $\|2\vec{MA}+n\vec{MB}+n\vec{MC}\|=n\|\vec{u}\|$ دائرة (Γ_n)

تشمل النقطة A يطلب تعيين مركزها و نصف قطرها . نسمي Γ_n هذه الدائرة .

أحسب المسافة AG_n بدلالة n.

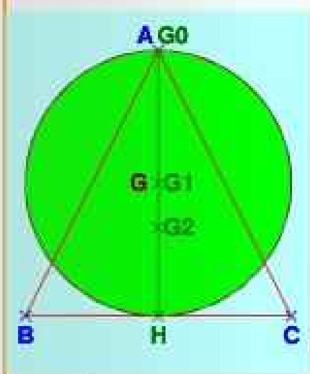
6) لتكن الدالة f للمتغير الحقيقي x حيث : $f(x)=\frac{4x}{x+1}$. أدرس تغيرات الدالة f على المجال $[0,+\infty[$.

7) عين نهاية AG_n . ماذا يمكن القول عن Γ_n .

1) $2+1+1=4$ و $4\neq 0$ إذن G موجود و وحيد . $2\vec{GA}+\vec{GB}+\vec{GC}=\vec{0}$ G منتصف القطعة $[AH]$.

2) $\vec{u}=-(\vec{AB}+\vec{AC})$ و منه $\|\vec{u}\|=8$.

3) ندخل G في الأشعة $\vec{MA}$ ، $\vec{MB}$ و $\vec{MC}$ و نحصل على : $4\|\vec{MG}\|=8$



و منه $MG=2$ إذا مجموعة النقط M هي الدائرة التي مركزها G و نصف قطرها 2.

4) $2+n+n=2+2n$ و من أجل كل عدد طبيعي n G_n موجود و وحيد .

$2\vec{G_nA}+n\vec{G_nB}+n\vec{G_nC}=\vec{0}$ و بالتالي $(2+2n)\vec{G_nA}+n(\vec{AB}+\vec{AC})=\vec{0}$

و منه $\vec{G_nA}=\frac{n}{1+n}\vec{AH}$ و بالتالي $\|\vec{G_nA}\|=\frac{n}{1+n}\|\vec{AH}\|$ و نلاحظ أن

$0<\frac{n}{1+n}<1$ من أجل كل قيمة لـ n . و منه G تنتمي إلى القطعة $[AH]$.

5) ندخل G في الأشعة $\vec{MA}$ ، $\vec{MB}$ و $\vec{MC}$ و نحصل على : $(2+2n)\|\vec{MG_n}\|=8n$

و منه $MG_n=\frac{8n}{2+2n}$ أي $MG_n=\frac{4n}{1+n}$ إذن مجموعة النقط M هي الدائرة التي مركزها G_n ونصف قطرها $\frac{4n}{1+n}$

في العلاقة $\|2\vec{MA}+n\vec{MB}+n\vec{MC}\|=n\|\vec{u}\|$ إذا عوضنا M بـ A نجد أن A عنصر من Γ_n . AG_n هو نصف قطر Γ_n.

6) $f'(x)=\frac{4}{(x+1)^2}$ و $f'(x)>0$ إذن الدالة f متزايدة على $[0,+\infty[$ و $\lim_{n\to+\infty} f(x)=4$.

7) من $\lim_{x\to+\infty} f(x)=4$ نستنتج أن $\lim_{n\to+\infty} AG_n=4$.والدائرة Γ_n تؤول إلى الدائرة التي مركزها H و نصف قطرها 4 .

الزوايا الموجهة
حساب المثلثات

8

الكفاءات المستهدفة

- استعمال خواص الزوايا الموجهة لإثبات تقايس الزوايا.
- تعيين أقياس زاوية موجهة لشعاعين.
- توظيف دساتير التحويل المتعلقة بجيب التمام و بالجيب في حل مسائل مثلثية.
- حل معادلات و متراجحات مثلثية.

ولد محمد أبو الوفا البوزجاني ببوزجان ضواحي خراسان. في السن العشرين انتقل إلى مدينة بغداد. من خلال ملاحظات فلكية وضح أبو الوفا بصفة خاصة مختلف حركات القمر.

محمد أبو الوفا البوزجاني

940 م / 998 م

قدم أبو الوفا عدة أعمال في حساب المثلثات المستوية و الكروية. قام بتصحيح جداول علماء سبقوه و قدم جداول جديدة متعلقة بالجيوب تسمح بحساب قيمة مقربة للعدد $\sin 30°$ إلى 10^{-8}. قام كذلك بتطوير مفهومي الظل و الظل تمام منجزا جدوليهما وهو أول من عرف مقلوبي الجيب و الجيب تمام و قد اكتشف العلاقات الأولى بين الدوال المثلثية التي ساهمت بشكل كبير في تطور علم الفلك.

لقد درس كذلك القطوع المخروطية محددا طرق إنشائها باستعمال المدور و المسطرة كما عرض طرقا لإنشاء القطع المكافئ نقطة نقطة...

نذكر كذلك أن أبو الوفا هو أول من اعتبر الكسور أعدادا.

نشاط ثالث

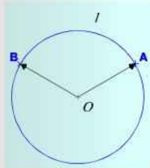
(C) الدائرة المثلثية التي مركزها O و نصف قطرها 1 الموجهة الاتجاه الموجب المعاكس لإتجاه دوران عقارب الساعة .

لتكن A و B نقطتين من الدائرة (C) (أنظر الشكل المقابل) . يتحرك A نحو B .

في الإتجاه الموجب (للمرة الأولى) تعرف لنا النقطتان A و B قوسا AB طوله l .

اصطلاحا نقول ان l قيس بالريدان للزاوية AOB المعرفة بالشعاعين $\vec{OA}$ و $\vec{OB}$.

و نكتب $(\vec{OA},\vec{OB}) = l$.



ضع على الدائرة المثلثية (C) النقط C ، D ، E ، F في الحالات الآتية :

1) علما أن: $(\vec{OA},\vec{OC})=\frac{\pi}{4}$ ، $(\vec{OC},\vec{OD})=\frac{\pi}{6}$ ، $(\vec{OD},\vec{OE})=\frac{\pi}{2}$ ، $(\vec{OE},\vec{OF})=\frac{5\pi}{6}$.

2) علما أن: $(\vec{OC},\vec{OD})=\frac{3\pi}{4}$ ، $(\vec{OD},\vec{OE})=\frac{\pi}{2}$ ، $(\vec{OE},\vec{OF})=\frac{2\pi}{3}$.

3) علما أن: $(\vec{OC},\vec{OD})=\frac{4\pi}{3}$ ، $(\vec{OD},\vec{OE})=\frac{3\pi}{2}$ ، $(\vec{OE},\vec{OF})=\frac{\pi}{3}$.

4) علما أن: $(\vec{OC},\vec{OD})=\frac{9\pi}{4}$ ، $(\vec{OD},\vec{OE})=\frac{41\pi}{6}$ ، $(\vec{OE},\vec{OF})=\frac{17\pi}{4}$.

نشاط رابع

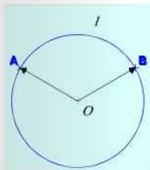
(C) الدائرة المثلثية التي مركزها O و نصف قطرها 1 الموجهة الاتجاه الموجب المعاكس لاتجاه دوران عقارب الساعة .

لتكن A و B نقطتين من الدائرة (C) (أنظر الشكل المقابل) . يتحرك A نحو B .

في الاتجاه السالب (للمرة الأولى) تعرف لنا النقطتان A و B قوسا AB طوله l .

اصطلاحا نقول ان $-l$ قيس بالريدان للزاوية AOB المعرفة بالشعاعين $\vec{OA}$ و $\vec{OB}$.

و نكتب $(\vec{OA},\vec{OB}) = -l$.



ضع على الدائرة المثلثية (C) النقط C ، D ، E ، F في الحالات الآتية :

1) علما أن: $(\vec{OA},\vec{OC})=-\frac{\pi}{3}$ ، $(\vec{OC},\vec{OD})=-\frac{\pi}{4}$ ، $(\vec{OD},\vec{OE})=-\frac{2\pi}{3}$ ، $(\vec{OE},\vec{OF})=-\frac{\pi}{6}$.

2) علما أن: $(\vec{OC},\vec{OD})=-\frac{5\pi}{4}$ ، $(\vec{OD},\vec{OE})=-\frac{\pi}{2}$ ، $(\vec{OE},\vec{OF})=-\frac{3\pi}{4}$.

3) علما أن: $(\vec{OC},\vec{OD})=-\frac{10\pi}{3}$ ، $(\vec{OD},\vec{OE})=-\frac{7\pi}{2}$ ، $(\vec{OE},\vec{OF})=-\frac{19\pi}{3}$.

الزوايا الموجهة .

1. زاوية موجهة لشعاعين غير معدومين .

يوجه المستوي توجيها مباشرا (أو توجيها موجبا) ويسمى الاتجاه الآخر الاتجاه غير المباشر (أو الاتجاه السالب).

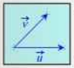
اصطلاحا نختار الاتجاه المباشر الاتجاه المعاكس لدوران عقارب الساعة.

في المستوي الموجه نسمي دائرة مثلثيه كل دائرة موجهة في الاتجاه المباشر و التي نصف قطرها 1 .

في كل ما يأتي نعتبر المستوي الموجه

تعريف: ليكن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ شعاعين غير معدومين .

الثنائية $(\vec{u},\vec{v})$ تسمى زاوية موجهة لشعاعين .



2. قيس زاوية موجهة:

ليكن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ شعاعين غير معدومين ولتكن (C) دائرة مثلثية مركزها O لتكن M و N النقطتين من المستوي حيث $\vec{OM}=\vec{u}$ و $\vec{ON}=\vec{v}$ المستقيم (OM) يقطع (C) في A والمستقيم (ON) يقطع (C) في B ، قيس بالرادين للزاوية الموجهة $(\vec{u},\vec{v})$ هو كذلك قيس بالرادين للزاوية الموجهة $(\vec{OM},\vec{ON})$.

تعريف: ليكن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ شعاعين غير معدومين .

اذا كان x قيسا للزاوية الموجهة $(\vec{u},\vec{v})$ فان كل الأعداد من الشكل $x+2k\pi$ هي أقياس للزاوية $(\vec{u},\vec{v})$ مع $k \in$

تعبير: نقبل التجاوز في التعبير الذي نعبر به على الزاوية و قيس لها في نفس الوقت ونقول الزاوية $(\vec{u},\vec{v})$ تساوي x .

خاصية: من بين أقياس الزاوية الموجهة $(\vec{u},\vec{v})$ يوجد قيس وحيد على المجال $]-\pi,\pi]$ يسمى القيس الرئيسي للزاوية الموجهة $(\vec{u},\vec{v})$.

نتائج: 1) القيس الرئيسي للزاوية المعدومة $(\vec{u},\vec{u})$ هو 0 .

2) القيس الرئيسي للزاوية المستقيمة $(\vec{u},-\vec{u})$ هو π .

3) القيس الرئيسي للزاوية القائمة المباشرة هو $\frac{\pi}{2}$.

4) القيس الرئيسي للزاوية القائمة غير المباشرة هو $-\frac{\pi}{2}$.

5) إذا كان x القيس الرئيسي للزاوية الموجهة $(\vec{u},\vec{v})$ فإن $|x|$ هو قيس للزاوية الهندسية المكونة من $\vec{u}$ و $\vec{v}$.

2. علاقة شال:

مبرهنة :(تقبل بدون برهان) من أجل كل ثلاثة أشعة غير معدومة $\vec{u}$ ، $\vec{v}$ و $\vec{w}$ لدينا .

$$(\vec{u},\vec{v})+(\vec{v},\vec{w})=(\vec{u},\vec{w})$$

نتائج: من أجل كل شعاعين غير معدومين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ لدينا : • $(\vec{v},\vec{u})=-(\vec{u},\vec{v})$ ، • $(\vec{u},-\vec{v})=(\vec{u},\vec{v})+\pi$

• $(-\vec{u},\vec{v})=(\vec{u},\vec{v})+\pi$ ، • $(-\vec{u},-\vec{v})=(\vec{u},\vec{v})$.

تمرين محلول 1

لتكن (C) الدائرة المثلثية مرفقة بالمعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.لتكن النقطتين A و B من الدائرة (C) حيث $(\overline{OI},\overline{OA})=\frac{\pi}{6}$ و $(\overline{OI},\overline{OB})=\frac{3\pi}{4}$.

عين قيسا للزوايا الموجهة : 1) $(\overline{OJ},\overline{OA})$ ، 2) $(\overline{OJ},\overline{OB})$ ، 3) $(\overline{OA},\overline{OB})$.

حل: 1) $(\overline{OJ},\overline{OA})=-(\overline{OA},\overline{OJ})=-\left[(\overline{OI},\overline{OJ})-(\overline{OI},\overline{OA})\right]=-\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}=-\frac{\pi}{3}$

2) $(\overline{OJ},\overline{OB})=(\overline{OI},\overline{OB})-(\overline{OI},\overline{OJ})=\frac{3\pi}{4}-\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{4}$

3) $(\overline{OA},\overline{OB})=(\overline{OI},\overline{OB})-(\overline{OI},\overline{OA})=\frac{3\pi}{4}-\frac{\pi}{6}=\frac{7\pi}{12}$

تمرين محلول 2

أوجد القيس الرئيسي للزاوية الموجهة $(\vec{u},\vec{v})$ التي قيسها α في كل حالة من الحالات الآتية :

1) $\alpha=2007rad$.

2) $\alpha=-\frac{189\pi}{4}$.

3) $\alpha=\frac{65\pi}{8}$.

طريقة: إذا كان عدد حقيقي α قيس لزاوية موجهة $(\vec{u},\vec{v})$ فإنه يوجد عدد صحيح وحيد k حيث : $-\pi<\alpha+2k\pi\le\pi$ يكفي إيجاد k إنطلاقا من هذا الحصر لإيجاد القيس الرئيسي لزاوية موجهة $(\vec{u},\vec{v})$

حل: 1) $-\pi<2007+2k\pi\le\pi$ ومنه $-2007-\pi<2k\pi\le\pi-2007$

و بالتالي $\frac{-2007-\pi}{2\pi}<k\le\frac{\pi-2007}{2\pi}$ إذن $-319,923<k\le-318,923$ و منه $k=-319$

إذن القيس الرئيسي للزاوية $(\vec{u},\vec{v})$ هو $2007+(-319\times2\times\pi)=2,663rad$

2) $-\pi<-\frac{189\pi}{4}+2k\pi\le\pi$ باختزال π نحصل على $-1<\frac{-189}{4}+2k\le1$

و بالتالي $\frac{185}{8}<k\le\frac{193}{8}$ إذن $23,125<k\le24,125$ و منه $k=24$

إذن القيس الرئيسي للزاوية $(\vec{u},\vec{v})$ هو $-\frac{189\pi}{4}+(24\times2\times\pi)=-\frac{189\pi}{4}+\frac{192\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}$.

3) $-\pi<-\frac{65\pi}{8}+2k\pi\le\pi$ بالاختزال في π نحصل على $-1<\frac{65}{8}+2k\le1$

و بالتالي $-\frac{73}{16}<k\le-\frac{57}{16}$ إذن $-4,5625<k\le-3,5625$ و منه $k=-4$

إذن القيس الرئيسي للزاوية $(\vec{u},\vec{v})$ هو $\frac{65\pi}{8}+(-4\times2\times\pi)=\frac{65\pi}{8}-\frac{64\pi}{8}=\frac{\pi}{8}$.

خواص الزوايا الموجهة .

1.الزوايا الموجهة المتقايسة.

خاصية: $\vec{u}$ ، $\vec{v}$ ، $\vec{u'}$ و $\vec{v'}$ أشعة غير معدومة من المستوي.ليكن α قيسا للزاوية $(\vec{u},\vec{v})$ و α' قيسا للزاوية $(\vec{u'},\vec{v'})$ تكون الزاويتان $(\vec{u},\vec{v})$ و $(\vec{u'},\vec{v'})$ متقايستين اذا و فقط اذا وجد عدد صحيح k حيث $\alpha'=\alpha+2k\pi$.

ملاحظة: وجود عدد صحيح k حيث $\alpha'=\alpha+2k\pi$ معناه $\alpha'-\alpha$ مضاعف لـ 2π .

إذا كان $\alpha'=\alpha+2k\pi$ نقول أن α و α' قيسان لنفس الزاوية أو قيسان لزاويتين متقايستين.

2.الزوايا الموجهة و الإرتباط الخطي لشعاعين.

خاصية: $\vec{u}$ و $\vec{v}$ شعاعان غير معدومين من المستوي.

يكون الشعاعان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مرتبطان خطيا إذا وفقط إذا كان: $(\vec{u},\vec{v})=2k\pi$ أو $(\vec{u},\vec{v})=\pi+2k\pi$. $k\in\mathbb{Z}$

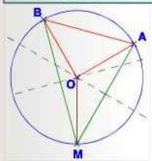
ملاحظة: إذا كان $(\vec{u},\vec{v})=2k\pi$ يكون للشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ نفس الاتجاه .

إذا كان $(\vec{u},\vec{v})=\pi+2k\pi$ يكون للشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ اتجاهين متعاكسين .

خاصية: $\vec{u}$ و $\vec{v}$ شعاعان غير معدومين من المستوي . ليكن k و k' عددين حقيقيين غير معدومين .

- إذا كان k و k' من نفس الإشارة فإن $(k\vec{u},k'\vec{v})=(\vec{u},\vec{v})$.
- إذا كان k و k' من إشارتين مختلفتين فإن $(k\vec{u},k'\vec{v})=(\vec{u},\vec{v})+\pi$.

3.الزاوية المحيطية.



(C) دائرة مثلثية مركزها O ، A ، B و M ثلاث نقط متمايزة مثنى مثنى من الدائرة (C).الزاوية الموجهة $(\vec{MA},\vec{MB})$ تسمى زاوية محيطية.

مبرهنة: إذا كانت A ، B و M ثلاث نقط متمايزة مثنى مثنى من دائرة مثلثية (C) مركزها O وإذا كان α قيسا للزاوية الموجهة $(\overline{OA},\overline{OB})$. فإن $\frac{\alpha}{2}$ قيس للزاوية $(\vec{MA},\vec{MB})$.

برهان: المثلث (OAB) متساوي الساقين ، فإن الزاويتين $(\overline{AO},\overline{AM})$ و $(\overline{MO},\overline{MA})$ متناظرتان بالنسبة إلى محورالقطعة $[AM]$ و منه $(\overline{AO},\overline{AM})=-(\overline{MO},\overline{MA})$ و منه $(\overline{AO},\overline{AM})=(\overline{MA},\overline{MO})$ ....(1).

المثلث (OBM) متساوي الساقين ، فإن الزاويتين $(\overline{BM},\overline{BO})$ و $(\overline{MB},\overline{MO})$ متناظرتان بالنسبة إلى محور القطعة $[BM]$ ومنه $(\overline{BM},\overline{BO})=-(\overline{MB},\overline{MO})$ و منه $(\overline{BM},\overline{BO})=(\overline{MO},\overline{MB})$....(2).

من (1) و (2) نستنتج $(\overline{MA},\overline{MO})+(\overline{MO},\overline{MB})=(\overline{AO},\overline{AM})+(\overline{BM},\overline{BO})$ أي $(\overline{MA},\overline{MB})=(\overline{AO},\overline{AM})+(\overline{BM},\overline{BO})$ و منه $2(\overline{MA},\overline{MB})=(\overline{AO},\overline{AM})+(\overline{BM},\overline{BO})+(\overline{MA},\overline{MB})$

$2(\overline{MA},\overline{MB})=(\overline{AO},\overline{AM})+(\overline{BM},\overline{BO})+(\overline{MA},\overline{MB})=(\overline{OA},\overline{MA})+(\overline{MA},\overline{MB})+(\overline{MB},\overline{OB})$

$2(\overline{MA},\overline{MB})=(\overline{OA},\overline{MB})+(\overline{MB},\overline{OB})=(\overline{OA},\overline{OB})$ و منه $\frac{\alpha}{2}$ قيس للزاوية $(\overline{MA},\overline{MB})$.

تمرين محلول 3

هل العددان $\frac{41\pi}{8}$ و $\frac{9\pi}{8}$ قيسان لزاوية موجهة لشعاعين ؟

حل: حتى يكون عددان حقيقيان α و β قيسين لزاوية موجهة لشعاعين يكفي أن يكون $\alpha-\beta$ من الشكل $2k\pi$ مع $(k\in\mathbb{Z})$.

$\frac{41\pi}{8}-\frac{9\pi}{8}=\frac{32\pi}{8}=4\pi=2\times2\pi$ و هو من الشكل $2k\pi$.

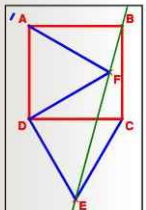
إذن العددان $\frac{41\pi}{8}$ و $\frac{9\pi}{8}$ قيسان لزاوية موجهة لشعاعين ، أو لزاويتين متقايستين .

(يمكن القول كذالك أن العددين $\frac{41\pi}{8}$ و $\frac{9\pi}{8}$ قيسان لزاويتين متقايستين)

تمرين محلول 4

$ABCD$ مربع غير مباشر من المستوي حيث $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD})=-\frac{\pi}{2}$. E نقطة خارج المربع $ABCD$ حيث ECD مثلث متقايس الأضلاع و لتكن النقطة F داخل المربع $ABCD$ حيث AFD مثلث متقايس الأضلاع

1) أثبت أن المثلث ABF متقايس الساقين .
2) عين قيسا للزاوية الموجهة $(\overrightarrow{FB},\overrightarrow{FA})$.
3) عين قيسا للزاوية الموجهة $(\overrightarrow{DE},\overrightarrow{DF})$. استنتج قيسا للزاوية الموجهة $(\overrightarrow{FD},\overrightarrow{FE})$.
4) عين قيسا للزاوية الموجهة $(\overrightarrow{FB},\overrightarrow{FE})$.
5) استنتج أن النقط E ، F و B على استقامة واحدة .



حل: 1) المثلث AFD مثلث متقايس الأضلاع إذا $AF=AD=FD$ و بما أن $AB=AD$ فإن $AF=AB$ و بالتالي المثلث ABF متقايس الساقين .

2) الزاوية الموجهة $(\overrightarrow{FB},\overrightarrow{FA})$ زاوية موجهة الأتجاه الموجب ويما أن $(\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AF})=\frac{\pi}{3}$ و $(\overrightarrow{AF},\overrightarrow{AB})=\frac{\pi}{6}$ نستنتج أن $(\overrightarrow{FB},\overrightarrow{FA})=\frac{5\pi}{12}$.

3) الزاوية الموجهة $(\overrightarrow{DE},\overrightarrow{DF})$ زاوية موجهة الأتجاه الموجب و نستنتج أن $(\overrightarrow{DE},\overrightarrow{DF})=\frac{\pi}{2}$ إذا المثلث EDF قائم في D و متساوي الساقين . و نستنتج أن

4)

$$(\overrightarrow{FB},\overrightarrow{FE})=(\overrightarrow{FB},\overrightarrow{FA})+(\overrightarrow{FA},\overrightarrow{FD})+(\overrightarrow{FD},\overrightarrow{FE})=\frac{5\pi}{12}+\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}=\frac{12\pi}{12}=\pi$$

5) بما أن الزاوية $(\overrightarrow{FB},\overrightarrow{FE})=\pi$ فإن النقط E ، F و B في استقامية.

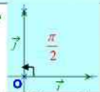
حساب المثلثات.

1 . معلم متعامد ومتجانس مباشر:

تعريف: إذا كان $(\vec{i},\vec{j})=\frac{\pi}{2}$ نقول أن المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ من المستوى مباشر .

إذا كان $(\vec{i},\vec{j})=-\frac{\pi}{2}$ نقول أن المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ من المستوى غير مباشر .

معلم متعامد ومتجانس مباشر



معلم متعامد ومتجانس غير مباشر

2 .جيب تمام و جيب زاوية موجهة لشعاعين:

تذكير و تعريف: (C) دائرة مثلثية مركزها O ، لتكن A و B نقطتين من الدائرة (C) حيث أن $(O,\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})$ معلم متعامد و متجانس مباشر . نضع $\overrightarrow{OA}=\vec{i}$ و $\overrightarrow{OB}=\vec{j}$ ، لكل عدد حقيقي x صورة M على الدائرة (C) حيث x قيس بالرديان للزاوية الموجهة $(\vec{i},\overrightarrow{OM})$ ، نعلم أن جيب تمام العدد x هو فاصلة النقطة M ونكتب $\cos x$ و أن جيب العدد x هو ترتيب النقطة M ونكتب $\sin x$. إذا كان x قيسا بالرديان للزاوية الموجهة $(\vec{i},\overrightarrow{OM})$ فإن كل عدد من الشكل $x+2k\pi$ حيث k عدد صحيح هو كذالك قيس بالرديان للزاوية الموجهة $(\vec{i},\overrightarrow{OM})$ و منه x و $x+2k\pi$ لهما نفس الصورة M على الدائرة (C) . و بالتالي: $\cos(x+2k\pi)=\cos x$ و $\sin(x+2k\pi)=\sin x$ مع $k\in\mathbb{Z}$
نقول أن الدالتين دوريتان و 2π دور لهما .

نتائج: من أجل كل عدد حقيقي x : $-1\le\cos x\le1$ ، $-1\le\sin x\le1$ ، $\cos^2 x+\sin^2 x=1$

جدول القيم الشهيرة:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

تعريف: •جيب تمام زاوية موجهة $(\vec{u},\vec{v})$ هو جيب تمام أحد أقياسها بالرديان و نرمز له بالرمز $\cos(\vec{u},\vec{v})$.

•جيب زاوية موجهة $(\vec{u},\vec{v})$ هو جيب أحد أقياسها بالرديان و نرمز له بالرمز $\sin(\vec{u},\vec{v})$.

تمرين محلول 5

بدون استعمال الآلة الحاسبة عين القيم المضبوطة لكل من:

1) $\cos\frac{9\pi}{4}$. 2) $\sin\frac{25\pi}{6}$.

2) $\sin\left(-\frac{11\pi}{3}\right)$. 4) $\cos\left(-\frac{31\pi}{4}\right)$.

حل: 1) $\cos\frac{9\pi}{4}=\cos\left(\frac{8\pi+\pi}{4}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{4}+2\pi\right)$

$=\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

2) $\sin\frac{25\pi}{6}=\sin\left(\frac{24\pi+\pi}{6}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{6}+4\pi\right)$

$=\sin\left(\frac{\pi}{6}+2\times2\pi\right)=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$

3) $\sin\left(-\frac{29\pi}{3}\right)=\sin\left(\frac{-30\pi+\pi}{3}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{3}-10\pi\right)$

$=\sin\left(\frac{\pi}{3}+2\times(-5)\pi\right)=\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

4) $\cos\left(-\frac{31\pi}{4}\right)=\cos\left(\frac{-32\pi+\pi}{4}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{4}-8\pi\right)$

$=\cos\left(\frac{\pi}{4}+2\times(-4)\pi\right)=\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

تمرين محلول 6

1) **بدون استعمال الآلة الحاسبة عين القيمة المضبوطة لـ** $\cos x$ **إذا علمت أن** $\sin x=\frac{3}{5}$ **و** $\frac{\pi}{2}<x<\frac{3\pi}{2}$.

2) **باستعمال آلة حاسبة عين مدور لـ** x **إلى** 10^{-2} .

حل: نعلم أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $\cos^2 x+\sin^2 x=1$.

1) بما أن $\sin x=\frac{3}{5}$ فإن $\sin^2 x=\frac{9}{25}$ و منه: $\frac{9}{25}+\cos^2 x=1$. و بالتالي $\cos^2 x=1-\frac{9}{25}$

أي $\cos^2 x=\frac{16}{25}$ و منه $\cos x=\frac{4}{5}$ أو $\cos x=-\frac{4}{5}$.

لدينا $\cos x<0$ لأن $\frac{\pi}{2}<x<\frac{3\pi}{2}$ إذن $\cos x=-\frac{4}{5}$.

2) تظهر الآلة $x=2.49802$.

و منه مدور x إلى 10^{-2} هو $x=2.5$

جيب تمام و جيب الزوايا المرفقة.

تعريف: نسمي الزوايا المرفقة بزاوية موجهة حيث x قيس لها، الزوايا الموجهة التي أحد أقياسها : $-x$ ، $\pi-x$ ، $\pi+x$ ، $\frac{\pi}{2}-x$ ، $\frac{\pi}{2}+x$.

في ما يلي نأخذ x **عددا حقيقيا و** M **صورته على دائرة مثلثية المرفقة بالمعلم المتعامد و المتجانس** $(O;\vec{i},\vec{j})$.

مبرهنة 1: من أجل كل عدد حقيقي x لدينا

(1)	(2)	(3)
$\begin{cases}\cos(\pi+x)=-\cos x\\ \sin(\pi+x)=-\sin x\end{cases}$	$\begin{cases}\cos(\pi-x)=-\cos x\\ \sin(\pi-x)=\sin x\end{cases}$	$\begin{cases}\cos(-x)=\cos x\\ \sin(-x)=-\sin x\end{cases}$

الجملة (1) M و M' متناظرتان بالنسبة إلى مبدأ المعلم

الجملة (2) M و M' متناظرتان بالنسبة إلى محور التراتيب

الجملة (3) M و M' متناظرتان بالنسبة إلى محور الفواصل

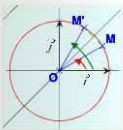
ملاحظة: من الجملة (3) نستنتج أن الدالة cos (جيب تمام) دالة زوجية و أن الدالة sin (جيب) دالة فردية .

مبرهنة 2: من أجل كل عدد حقيقي x لدينا

$\begin{cases}\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-\sin x\\ \sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\cos x\end{cases}$	$\begin{cases}\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin x\\ \sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos x\end{cases}$

في الشكل (1) : M و M' نقطتان من الدائرة المثلثية. M و M' متناظرتان بالنسبة إلى المنصف الأول للمعلم. فاصلة M هي ترتيب M' و فاصلة M' هي ترتيب M. $(\vec{i},\overrightarrow{OM})=x$

و $(\vec{i},\overrightarrow{OM'})=\frac{\pi}{2}-x$ و منه $\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos x$ و $\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin x$



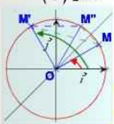
الشكل (1)

في الشكل (2): النقطة M' صورة العدد $\frac{\pi}{2}+x$ على الدائرة المثلثية و هي نظيرة M'' بالنسبة إلى محور التراتيب ، و M'' هي صورة $\frac{\pi}{2}-x$ على الدائرة المثلثية ،

ومنه M' و M'' لهما نفس الترتيب و فاصلتان متعاكستان. $(\vec{i},\overrightarrow{OM})=x$،

$(\vec{i},\overrightarrow{OM'})=\frac{\pi}{2}+x$ ، $(\vec{i},\overrightarrow{OM''})=\frac{\pi}{2}-x$ $\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$

ومنه $\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$ و $\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\cos x$ و $\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-\sin x$



الشكل (2)

تمرين محلول 8

دون استعمال الآلة الحاسبة عين القيم المضبوطة لكل من :

1) $\cos\frac{11\pi}{6}$. 2) $\sin\left(-\frac{7\pi}{3}\right)$.

حل: 1) $\cos\frac{11\pi}{6}=\cos\left(\frac{12\pi-\pi}{6}\right)=\cos\left(2\pi-\frac{\pi}{6}\right)$

$=\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$

2) $\sin\left(-\frac{7\pi}{3}\right)=\sin\left(\frac{-6\pi-\pi}{3}\right)=\sin\left(-\frac{\pi}{3}-2\pi\right)$ أي $=\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)=-\sin\frac{\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

تمرين محلول 9

دون استعمال الآلة الحاسبة عين القيم المضبوطة لكل من :

1) $\cos\frac{5\pi}{4}$ و $\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)$. 2) $\cos\frac{5\pi}{6}$ و $\sin\frac{5\pi}{6}$.

حل: 1) $\cos\frac{5\pi}{4}=\cos\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)=-\cos\frac{\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\sin\frac{5\pi}{4}=\sin\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)=-\sin\frac{\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

2) $\cos\frac{5\pi}{6}=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)=-\cos\frac{\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\sin\frac{5\pi}{6}=\sin\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$

تمرين محلول 10

علما أن $\cos\frac{7\pi}{12}=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$ دون استعمال الآلة الحاسبة عين القيمة المضبوطة لـ $\sin\frac{7\pi}{12}$ ثم استنتج $\cos\frac{13\pi}{12}$ و $\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right)$

حل: نعلم أن $\cos^2\frac{7\pi}{12}+\sin^2\frac{7\pi}{12}=1$ و منه $\sin^2\frac{7\pi}{12}=1-\cos^2\frac{7\pi}{12}$ أي $\sin^2\frac{7\pi}{12}=\frac{\sqrt{3}+2}{4}$

وبما أن $0<\frac{7\pi}{12}<\pi$ فإن $\sin\frac{7\pi}{12}>0$ إذن $\sin\frac{7\pi}{12}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$ (يمكن الملاحظة أن $\left(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}\right)^2=\frac{\sqrt{3}+2}{4}$).

$\cos\frac{13\pi}{12}=\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{7\pi}{12}\right)=-\sin\frac{7\pi}{12}=\frac{-\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$

$\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{7\pi}{12}\right)=\sin\frac{7\pi}{12}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$

معادلات مثلثية.

1.عددين حقيقيين لهما نفس الجيب تمام و نفس الجيب:

ليكن a و b عددين حقيقيين .

$\cos a=\cos b$ معناه $a=b+2k\pi$ أو $a=-b+2k\pi$ مع $k\in\mathbb{Z}$	$\sin a=\sin b$ معناه $a=b+2k\pi$ أو $a=\pi-b+2k\pi$ مع $k\in\mathbb{Z}$

2.المعادلات المثلثية الأساسية:

المعادلات من الشكل $\cos x=a$ حيث a عدد حقيقي .

إذا كان $a<-1$ أو $a>1$ المعادلة لا تقبل حلولا.

إذا كان $-1\le a\le 1$ يوجد عدد حقيقي c حيث $a=\cos c$ و الحلول هي [$x=c+2k\pi$ أو $x=-c+2k\pi$].

المعادلات من الشكل $\sin x=a$ حيث a عدد حقيقي .

إذا كان $a<-1$ أو $a>1$ المعادلة لا تقبل حلولا.

إذا كان $-1\le a\le 1$ يوجد عدد حقيقي c حيث $a=\sin c$ و الحلول هي [$x=c+2k\pi$ أو $x=\pi-c+2k\pi$].

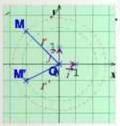
الإحداثيات القطبية.

1.التعليم القطبي

ليكن $(O;\vec{i},\vec{j})$ معلم مباشر متعامد و متجانس. لتكن (C) الدائرة المثلثية التي مركزها O .

تعريف: من أجل كل نقطة M غير منطبقة على O، الثنائية (r,θ) ، حيث $OM=r$ و $\theta=(\vec{i},\overrightarrow{OM})$ ، تسمى ثنائية إحداثيات قطبية في المستوي للنقطة M و نرمز $M(r,\theta)$ (r عدد حقيقي موجب تماما و θ عدد حقيقي)

النقطة O تسمى القطب،$(O;\vec{i})$ يسمى المحور القطبي،نقول أن r هو نصف القطر القطبي و θ إحدى الزوايا القطبية .



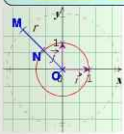
في الشكل $OM=2\sqrt{2}$ و $(\vec{i},\overrightarrow{OM})=\frac{3\pi}{4}$ إذا الإحداثيات القطبية للنطة M هي: $\left(2\sqrt{2};\frac{3\pi}{4}\right)$.

في الشكل $OM'=\sqrt{5}$ و $(\vec{i},\overrightarrow{OM})=\frac{5\pi}{6}$ إذا الإحداثيات القطبية للنقطة M هي: $\left(\sqrt{5};\frac{5\pi}{6}\right)$.

ملاحظة: الثنائية $M(r,\theta)$ تعرف نقطة وحيدة M .

2.العلاقة بين الإحداثيات القطبية و الإحداثيات الديكارتية:

مبرهنة: في معلم مباشر متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ لتكن (C) الدائرة المثلثية .إذا كانت النقطة M غير منطبقة على O و كانت إحداثياها الديكارتية $(x;y)$ و إحداثياها القطبية (r,θ) فإن: $r=\sqrt{x^2+y^2}$ ، $x=r\cos\theta$ ، $y=r\sin\theta$



برهان: نصف المستقيم $(OM]$ يقطع الدائرة (C) في N حيث $\overline{OM}$ و $\overline{ON}$ لهما نفس الإتجاه . بما أن $OM=r$ و $ON=1$ فإن $\overline{OM}=r\overline{ON}$ بما أن N تنتمي إلى الدائرة المثلثية و $(\vec{i},\overline{ON})=(\vec{i},\overline{OM})$ فإن $N(\cos\theta;\sin\theta)$. إذا. إحداثيات $M(r\cos\theta;r\sin\theta)$. ونعلم أن $\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$ و منه $r^2=x^2+y^2$ إذا $r=\sqrt{x^2+y^2}$.و منه صحة المبرهنة .

تمرين محلول11

حل في المجموعة المعادلتين ذات المجهول x الآتيتين

1) $\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

2) $\sin x=-\frac{1}{2}$.

3) مثل الحلول على الدائرة المثلثية .

حل: 1) $\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}$ ومنه $\cos x=\cos\frac{\pi}{6}$ و بالتالي

$x=\frac{\pi}{6}+2k\pi$ أو $x=-\frac{\pi}{6}+2k\pi$

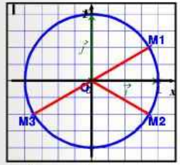
2) $\sin x=-\frac{1}{2}$ و منه $\sin x=-\sin\frac{\pi}{6}$ و بالتالي

$\sin x=\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$ و بالتالي

و منه $x=-\frac{\pi}{6}+2k\pi$ أو $x=\pi+\frac{\pi}{6}+2k\pi$

و نستنتج $x=-\frac{\pi}{6}+2k\pi$ أو $x=\frac{7\pi}{6}+2k\pi$

3)



النقطة $M1$ الموجودة في الربع الأول صورة $\frac{\pi}{6}$

بما أن $\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$ ، لإنشاء النقطة $M1$ يكفي أخذ على محور التراتيب النقطة التي ترتيبها $\frac{1}{2}$ و إسقاطها على الدائرة المثلثية . $M2$ صورة $-\frac{\pi}{6}$ هي نظيرة $M1$ بالنسبة إلى محور الفواصل ، النقطة $M3$ صورة $\frac{7\pi}{6}$ هي نظيرة $M1$ بالنسبة إلى مبدأ المعلم .

تمرين محلول12

$(O;\vec{i},\vec{j})$ معلم متعامد و متجانس

1) $\left(2,\frac{19\pi}{3}\right)$ هي إحداثيات القطبية للنقطة A في المعلم القطبي $(O;\vec{i})$.عين الإحداثيات الديكارتية للنقطة A

2) لتكن النقطة B التي إحداثياها الديكارتية $(-\sqrt{3};-1)$ عين إحداثيات قطبية للنقطة B في المعلم القطبي $(O;\vec{i})$.

حل: 1) $\frac{19\pi}{3}=\frac{18\pi+\pi}{3}=\frac{\pi}{3}+2\times3\pi$ ومنه

$x=2\cos\frac{19\pi}{3}=2\cos\frac{\pi}{3}=1$ و $y=2\sin\frac{19\pi}{3}=2\sin\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$

إذن إحداثيا A هي $(1;\sqrt{3})$ في المعلم $(O;\vec{i},\vec{j})$.

2) ليكن r نصف القطر القطبي $r=OB=\sqrt{(-\sqrt{3})^2+(-1)^2}=\sqrt{4}=2$.

لتكن θ الزاوية القطبية لـ B .

$-\sqrt{3}=2\cos\theta$ و $-1=2\sin\theta$ و منه $\cos\theta=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ و $\sin\theta=-\frac{1}{2}$

ومنه ثنائية من الإحداثيات القطبية للنقطة B في المعلم القطبي $(O;\vec{i})$ هي $\left(2;\frac{7\pi}{6}\right)$.

حل المعادلات من الشكل : $\cos u=\sin v$.

تمرين: حل في المجموعة $\mathbb{R}$ المعادلة ذات المجهول الحقيقي x :

$$\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(3x+\frac{\pi}{3}\right)$$

ثم مثل الحلول على الدائرة المثلثية .

إرشادات للحل: لحل معادلة من الشكل $\cos u=\sin v$ يجب تحويل sin إلى cos أو العكس علما أن:

$$\begin{cases}\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-\sin x\\ \sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\cos x\end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases}\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin x\\ \sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos x\end{cases}$$

لتمثيل الحلول على الدائرة المثلثية نعتمد على أقياس الزوايا الشهيرة .نشير إلى أن القيم التي يأخذها k في العبارة $\frac{2k\pi}{n}$ هي من 0 إلى $n-1$ (k عدد صحيح و n عدد طبيعي غير معدوم)

حل المعادلات من الشكل : $a\cos x+b\sin x=c$.

تمرين: لتكن في المجموعة $\mathbb{R}$ المعادلة ذات المجهول الحقيقي x :

$a\cos x+b\sin x=c$ .....(1) . حيث a ، b ، c أعداد حقيقية و $(a;b)\neq(0;0)$.

1) أحسب $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2+\left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2$.

2) استنتج أنه توجد زاوية α حيث أن : $\cos\alpha=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ و $\sin\alpha=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

3) استنتج أن المعادلة (1) تكتب $\cos x.\cos\alpha+\sin x.\sin\alpha=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

4) باستعمال دساتير الجمع استنتج أن (1) تكتب: $\cos(x-\alpha)=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

ملاحظة: في السؤال الثالث كان بإمكاننا وضع $\sin\alpha=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ و $\cos\alpha=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$.ثم استعمال دساتير الجمع لـ في السؤال الربع ، نكتب المعادلة (1) على الشكل : $\sin(x+\alpha)=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

تطبيق: حل في المجموعة $\mathbb{R}$ المعادلة ذات المجهول الحقيقي x في كل حالة من الحالات الآتية :

1) $\cos x+\sin x=1$.

2) $\sqrt{3}\cos x+\sin x=1$.

3) $\sqrt{2}\cos 2x-\sqrt{2}\sin 2x=-1$

4) $\cos 3x-\sqrt{3}\sin 3x=m$ (ناقش تبعا لقيم الوسيط الحقيقي m)

حل المتراجحات المثلثية:

1. المتراجحات من الشكل: $\cos x<a$.

تمرين: في المجموعة $]0,2\pi[$ لتكن المتراجحة ذات المجهول الحقيقي x: $\cos x<a$ ... (1) (a عدد حقيقي).

1) أثبت أنه إذا كان $a\le -1$ فإن المتراجحة (1) ليس لها حلول في $]0,2\pi[$.
2) أثبت أنه إذا كان $a\ge 1$ فإن $]0,2\pi[$ هي مجموعة الحلول للمتراجحة (1).
3) أثبت أنه إذا كان $-1<a<1$ فإنه يوجد عددين متعاكسان α و β من المجال $]0,2\pi[$ حيث أن $\cos\alpha=\cos\beta=a$. نسمي M صورة α على الدائرة المثلثية و نسمي M' صورة β على الدائرة المثلثية ،
أثبت أن M و M' متناظرتان بالنسبة إلى محور الفواصل.
استنتج مجموعة نقط الدائرة المثلثية التي فواصلها أصغر من a .
استنتج حلول المتراجحة (1) على المجال $]0,2\pi[$.

ملاحظة: في المتراجحات من الشكل $\cos x\le a$ الحالتان $a=-1$ و $a=1$ تدرس على حدى .

تطبيق: حل في المجموعة $]0,2\pi[$ المتراجحات ذات المجهول الحقيقي x ثم مثل الحلول على الدائرة المثلثية .
في كل حالة من الحالات الآتية:

1) $2\cos x<1$.
2) $\sqrt2\cos 3x+2\le 0$.
3) $2\cos 2x-\sqrt3\ge 0$.
4) $\cos 4x-\frac12>0$.

2. المتراجحات من الشكل: $\sin x<b$.

تمرين: في المجموعة $]-\pi,\pi[$ لتكن المتراجحة ذات المجهول الحقيقي x: $\sin x<b$ ... (1) (b عدد حقيقي).

1) أثبت أنه إذا كان $b\le-1$ فإن المتراجحة (1) ليس لها حلول في $]-\pi,\pi[$.
2) أثبت أنه إذا كان $b\ge1$ فإن $]-\pi,\pi[$ هي مجموعة الحلول للمتراجحة (1).
3) أثبت أنه إذا كان $-1<b<1$ فإنه يوجد عددان α و β من المجال $]-\pi,\pi[$ حيث أن $\sin\alpha=\sin\beta=b$
نسمي M صورة α على الدائرة المثلثية و نسمي M' صورة β على الدائرة المثلثية ، أثبت أن M و M' متناظران بالنسبة إلى محور التراتيب.
استنتج مجموعة نقط الدائرة المثلثية التي تراتيبها أصغر من b .
استنتج حلول المتراجحة (1) على المجال $]-\pi,\pi[$.

ملاحظة: في المتراجحات من الشكل $\sin x\le b$ الحالتين $b=-1$ و $b=1$ تدرس على حدى .

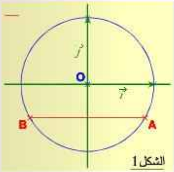
تطبيق: حل في المجموعة $]0,2\pi[$ المعادلة ذات المجهول الحقيقي x ثم مثل الحلول على الدائرة المثلثية .
في كل حالة من الحالات الآتية :

1) $\sin x<-\frac12$.
2) $\sqrt2\sin 4x-1\le 0$.
3) $2\sin 5x+\sqrt3\ge 0$.
4) $2\sin 4x-\sqrt2>0$.

الهدف من المسألة هو إيجاد حلول جملة متراجحتين مثلثيتين بطريقتين مختلفتين .

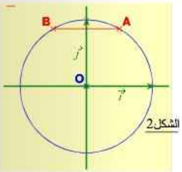
مسألة : لتكن في المجال $]-\pi,\pi[$ مجموعة الأعداد x التي تحقق $-\frac12\le\sin x\le\frac{\sqrt3}{2}$.

1) حل في $]-\pi,\pi[$ المتراجحتين ذات المجهول x: $\sin x\ge-\frac12$ و $\sin x\le\frac{\sqrt3}{2}$.استنتج الحلول المشتركة للمتراجحتين
2) أنشئ الرسم البياني (C) للدالة $f:x\to\sin x$ في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec i,\vec j)$.
3) أنشئ المستقيمين (Δ) و (Δ') المعرفتين بالمعادلتين $y=-\frac12$ و $y=\frac{\sqrt3}{2}$ على الترتيب في معلم $(O;\vec i,\vec j)$.
4) عين نقط تقاطع المنحنى (C) والمستقيمين (Δ) و (Δ') .استنتج مجموعة الأعداد x التي تحقق $-\frac12\le\sin x\le\frac{\sqrt3}{2}$.



الشكل1

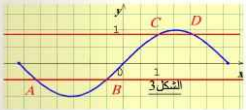
1) $\sin x\ge-\frac12$. نعلم أن $\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)=-\frac12$ و $\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)=-\frac12$.
في الشكل1، A و B صورتا $-\frac{\pi}{6}$ و $-\frac{5\pi}{6}$ على الترتيب على الدائرة المثلثية.
النقط من الدائرة المثلثية الموجودة من فوق القطعة $[AB]$ تراتيبها تحقق المتراجحة و منه المجموعة $\left]-\pi,-\frac{5\pi}{6}\right]\cup\left[-\frac{\pi}{6},\pi\right[$ هي مجموعة الحلول.
$\sin x\le\frac{\sqrt3}{2}$. نعلم أن $\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt3}{2}$ و $\sin\frac{2\pi}{3}=\frac{\sqrt3}{2}$.



الشكل2

في الشكل2، A و B صورتي $\frac{\pi}{3}$ و $\frac{2\pi}{3}$ على الترتيب على الدائرة المثلثية. النقط من الدائرة المثلثية الموجودة من تحت القطعة $[AB]$ تراتيبها تحقق المتراجحة و منه المجموعة $\left]-\pi,\frac{\pi}{3}\right]\cup\left[\frac{2\pi}{3},\pi\right[$ هي مجموعة الحلول. إذن مجموعة الحلول المشتركة للمتراجحتين هي: $\left]-\pi,-\frac{5\pi}{6}\right]\cup\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right]\cup\left[\frac{2\pi}{3},\pi\right[$

2) الدالة f دالة مرجعية و رسمها البياني في الشكل3 .
3) انظر الشكل3 .



الشكل3

4) $A\left(-\frac{5\pi}{6};-\frac12\right)$ ، $B\left(-\frac{\pi}{6};-\frac12\right)$ ، $C\left(\frac{\pi}{3};\frac{\sqrt3}{2}\right)$ ، $D\left(\frac{2\pi}{3};\frac{\sqrt3}{2}\right)$. الأعداد الحقيقية x التي تحقق $-\frac12\le\sin x\le\frac{\sqrt3}{2}$ هي فواصل نقط المنحنى (C) الموجودة بين المستقيمين (Δ) و (Δ')
و منه x عنصر من المجموعة: $\left]-\pi,-\frac{5\pi}{6}\right]\cup\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right]\cup\left[\frac{2\pi}{3},\pi\right[$ و هي إجابة السؤال الأول.

مسألة: (O,I,J) معلم متعامد و متجانس من المستوي . θ عدد حقيقي من المجال $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$

و r عدد حقيقي موجب تماما. لتكن النقطة A التي لها $(r;\theta)$ إحداثيات قطبية في المعلم $(O;\overrightarrow{OI})$.

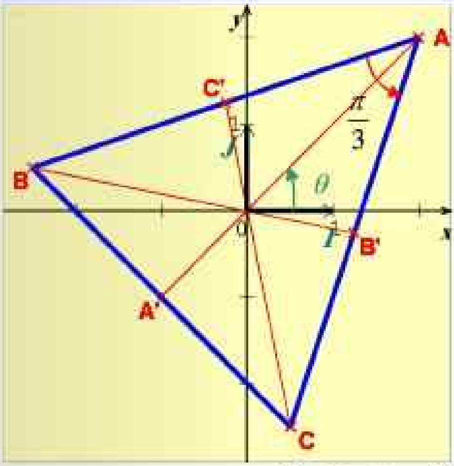
ليكن ABC مثلث متقايس الأضلاع مركز ثقله O حيث $\left(\vec{AB},\vec{AC}\right)=\frac{\pi}{3}$.

1) عين طول ضلع المثلث ABC بدلالة r .

2) عين أقياس الزوايا الموجهة $\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)$ ؛ $\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC}\right)$ ، $\left(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OB}\right)$ و $\left(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OC}\right)$

3) استنتج إحداثيات قطبية للنقط B و C في المعلم $(O,\overrightarrow{OI})$.

4) أثبت أن $\cos\theta+\cos\left(\theta-\frac{2\pi}{3}\right)+\cos\left(\theta+\frac{2\pi}{3}\right)=0$ و $\sin\theta+\sin\left(\theta-\frac{2\pi}{3}\right)+\sin\left(\theta+\frac{2\pi}{3}\right)=0$.



حل: 1) O مركز ثقل المثلث ABC و منه $\vec{OA}+\vec{OB}+\vec{OC}=\vec{O}$

و كذالك $OA=\frac{2}{3}AA'$ حيث A' منتصف القطعة $[BC]$ و منه

$AA'=\frac{3}{2}OA$ و $OA=r$ إذن $A'A=\frac{3}{2}r$. المثلث $AA'B$ قائم

في A' لدينا: $AB^2=A'A^2+A'B^2$ أي $AB^2-A'B^2=A'A^2$

إذن $AB=r\sqrt{3}$.

و بالتالي $AB=AC=BC=r\sqrt{3}$.

2) AOB مثلث متساوي الساقين و بما أن الزاوية $\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)$

موجهة توجيها مباشرا فإن $\left(\vec{OA},\vec{OB}\right)=\frac{2\pi}{3}$. AOC مثلث متساوي

الساقين و بما أن الزاوية $\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC}\right)$ موجهة توجيه غير مباشر فإن $\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)=-\frac{2\pi}{3}$.

$\left(\vec{OI},\vec{OB}\right)=\left(\vec{OI},\vec{OA}\right)+\left(\vec{OA},\vec{OB}\right)=\theta+\frac{2\pi}{3}$ و $\left(\vec{OI},\vec{OC}\right)=\left(\vec{OI},\vec{OA}\right)+\left(\vec{OA},\vec{OC}\right)=\theta-\frac{2\pi}{3}$

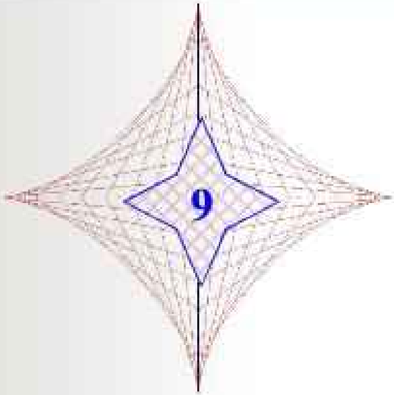
3) $OB=r$ و $\left(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OB}\right)=\theta+\frac{2\pi}{3}$ و منه إحداثيات قطبية للنقطة B هي $\left(r\cos\left(\theta+\frac{2\pi}{3}\right);r\sin\left(\theta+\frac{2\pi}{3}\right)\right)$

$OC=r$ و $\left(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OC}\right)=\theta-\frac{2\pi}{3}$ و منه إحداثيات قطبية للنقطة C هي $\left(r\cos\left(\theta-\frac{2\pi}{3}\right);r\sin\left(\theta-\frac{2\pi}{3}\right)\right)$

4) نعلم أن $\vec{OA}+\vec{OB}+\vec{OC}=\vec{O}$ و أن $A(r;\theta)$ و أن $B\left(r\cos\left(\theta+\frac{2\pi}{3}\right);r\sin\left(\theta+\frac{2\pi}{3}\right)\right)$ و أن

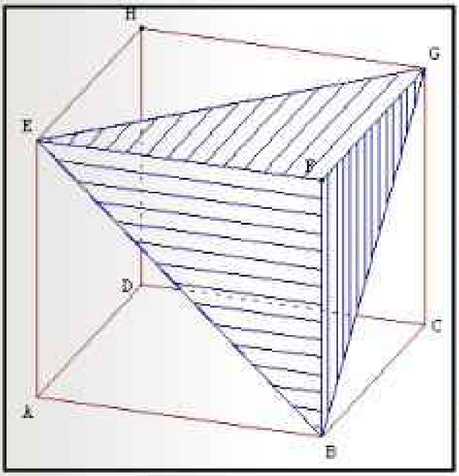
$C\left(r\cos\left(\theta-\frac{2\pi}{3}\right);r\sin\left(\theta-\frac{2\pi}{3}\right)\right)$ و منه و بجمع الفواصل و جمع التراتيب نحصل على :

$\cos\theta+\cos\left(\theta-\frac{2\pi}{3}\right)+\cos\left(\theta+\frac{2\pi}{3}\right)=0$ و $\sin\theta+\sin\left(\theta-\frac{2\pi}{3}\right)+\sin\left(\theta+\frac{2\pi}{3}\right)=0$.



المقاطع المستوية
الأشعة في الفضاء

الكفاءات المستهدفة



- إنشاء مقطع مكعب و رباعي وجوه بمستو .
- ممارسة الحساب الشعاعي في الفضاء .
- استعمال الأشعة لإثبات توازي شعاعين و استقامية ثلاث نقط.
- البرهان على أن أشعة من نفس المستوي

درس الرياضياتي الإغريقي" منلاوس " بجامعة الإسكندرية و أصبح عضوا فيها قبل أن يصبح عالم فلك بروما.

MENELAUS d'Alexandrie
grec, vers 100

لم تصلنا كتبه الستة حول الأوتار في دائرة و لم يبقى من مؤلفاته إلا كتابه : *Sphaerica* " المكون من ثلاثة أجزاء و يرجع الفضل في ذلك إلى علماء العرب و المسلمين.

في الجزء الأول يعمم نتائج إقليدس حول المثلثات إلى المثلثات الكروية (*spherique*) بينما خصص الجزء الثاني إلى علم الفلك و عالج في الجزء الثالث حساب المثلثات الكروية.

يشتهر بمبرهنته " مبرهنة Ménélaüs "

$$\frac{\sin P\hat{O}B}{\sin P\hat{O}C}\times\frac{\sin Q\hat{O}C}{\sin Q\hat{O}A}\times\frac{\sin R\hat{O}A}{\sin R\hat{O}B}=1$$

إنشاء مقطع مكعب بمستو

1. تمهيد

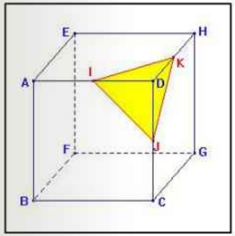
نعتبر المكعب $ABCDEFGH$ و لتكن النقط I، J و K منتصفات الأحرف $[AD]$، $[CD]$ و $[DH]$ على الترتيب.

من الواضح جدا أن المستوي (IJK) يقطع المكعب $ABCDEFGH$ وفق المثلث IJK.

نقول أن مقطع المكعب $ABCDEFGH$ بالمستوي (IJK) هو المثلث IJK.

نلاحظ أيضا أن المثلث IJK متقايس الأضلاع لأن:

$IJ = JK = KI = \frac{1}{2}AH$ حيث AH قطر لأحد الأوجه.

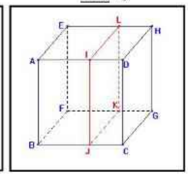


2. المقاطع المستوية لمكعب

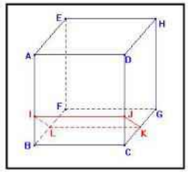
مقطع مكعب بمستو (P) هو:

- **مربع إذا كان المستوي (P) موازيا لأحد أوجه المكعب.**
- **قطعة مستقيمة أو مستطيل إذا كان المستوي (P) موازيا لأحد أحرف المكعب.**
- **نقطة، مثلث، متوازي أضلاع، شبه منحرف، خماسي أو سداسي في الحالات الأخرى.**

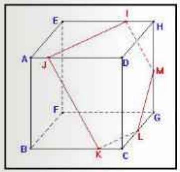
3. أمثلة



المستوي (LIJ) يوازي الوجه $ABFE$ مقطع المكعب هو المربع $IJKL$

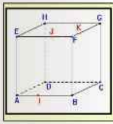


المستوي (IJK) يوازي الحرف $[BC]$ مقطع المكعب هو المستطيل $IJKL$



مقطع المكعب بالمستوي (IJK) هو الخماسي $IJKLM$

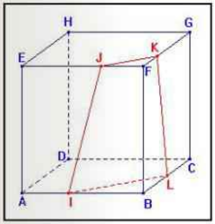
تمرين محلول 1



$ABCDEFGH$ مكعب. I، J و K ثلاث نقط تنتمي على الترتيب إلى الأحرف $[AB]$، $[EF]$ و $[FG]$.

1. **عين تقاطع المستوي (IJK) مع الأوجه $(ABFE)$، $(EFGH)$ و $(ABCD)$.**
2. **أنشئ مقطع المكعب $ABCDEFGH$ بالمستوي (IJK).**

حل:



1. تنتمي I و J إلى المستوي (IJK) و إلى الوجه $(ABFE)$.

و منه المستوي (IJK) يقطع الوجه $(ABFE)$ وفق القطعة $[IJ]$.

كذلك المستوي (IJK) يقطع الوجه $(EFGH)$ وفق القطعة $[JK]$.

المستوي (IJK) يقطع المستويين المتوازيين $(EFGH)$ و $(ABCD)$ وفق مستقيمين متوازيين. المستقيم الذي يمر من I والموازي للمستقيم (JK) يقطع (BC) في النقطة L. إذن (IJK) يقطع $(ABCD)$ وفق $[IL]$.

2. المستوي (IJK) يقطع الوجه $(BCGF)$ وفق القطعة $[KL]$.

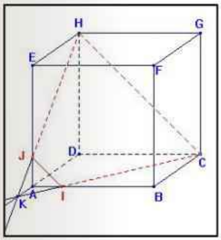
مقطع المكعب $ABCDEFGH$ **بالمستوي** (IJK) هو الرباعي $IJKL$

تمرين محلول 2

$ABCDEFGH$ مكعب. I نقطة من الحرف $[AB]$ حيث $AI = \frac{1}{3}AB$

أنشئ مقطع المكعب $ABCDEFGH$ بالمستوي (ICH).

حل:



بما أن المستويين $(ABFE)$ و $(DCGH)$ متوازيان فإن المستوي (ICH) يقطع الوجهين $ABFE$ و $DCGH$ وفق مستقيمين متوازيين.

ننشئ النقطة J من القطعة $[AE]$ حيث $(CH)//(IJ)$.

لدينا $AJ = \frac{1}{3}AE$

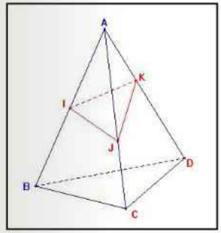
المستقيمان (IC) و (AD) يتقاطعان في نقطة K.

المستقيمان (HJ) و (AD) يتقاطعان كذلك في النقطة K.

و منه المستوي (ICH) يقطع الوجه $ADHE$ وفق القطعة $[HJ]$.

إذن مقطع المكعب $ABCDEFGH$ بالمستوي (ICH) هو شبه المنحرف المتساوي الساقين و الذي قاعدتاه (CH) و (IJ).

إنشاء مقطع رباعي وجوه بمستو



1. تمهيد

نعتبر رباعي الوجوه $ABCD$ و لتكن النقط I، J و K حيث $I\in[AB]$، $J\in[AC]$ و $K\in[AD]$

من الواضح جدا أن المستوي (IJK) يقطع رباعي الوجوه $ABCD$ وفق المثلث IJK.

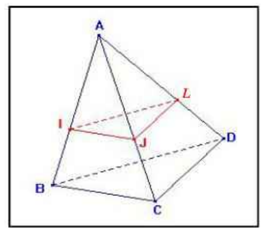
نقول أن مقطع رباعي الوجوه $ABCD$ بالمستوي (IJK) هو المثلث IJK.

2. المقاطع المستوية لرباعي وجوه

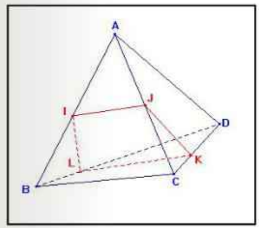
مقطع رباعي وجوه بمستو (P) هو:

- **نقطة أو مثلث إذا كان المستوي (P) موازيا لأحد أوجه رباعي الوجوه.**
- **نقطة، قطعة مستقيمة، مثلث أو رباعي في الحالات الأخرى.**

3. أمثلة

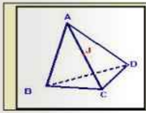


المستوي (LIJ) يوازي الوجه BCD
مقطع رباعي الوجوه هو المثلث IJL

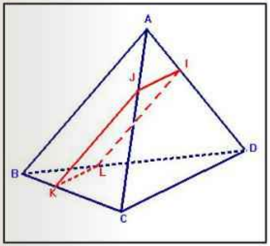


المستوي (IJK) يقطع رباعي الوجوه
وفق الرباعي $IJKL$

تمرين محلول 1



$ABCD$ رباعي وجوه . J نقطة من الحرف $[AC]$
أنشئ مقطع رباعي الوجوه $ABCD$ بالمستوي (P) الذي يمر من النقطة J و الموازي للمستقيمين (AB) و (CD) محددا طبيعته.



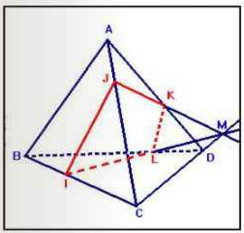
حل:

بما أن المستويين (P) و (ABC) يوازيان المستقيم (AB) فهما يتقاطعان وفق مستقيم (JK) يوازي المستقيم (AB).
نرسم المستقيم (JK) الموازي للمستقيم (AB) مع $K\in[BC]$
بإتباع نفس المنهجية نرسم المستقيم (IJ) الموازي لـ (CD) حيث I نقطة من $[AD]$.مقطع رباعي الوجوه $ABCD$ بالمستوي (P) هو إذن الرباعي $IJKL$.
بما أن (IL) يوازي (AB) و (KL) يوازي (CD) فإن المقطع $IJKL$ متوازي أضلاع.

تمرين محلول 2

$ABCD$ رباعي وجوه. I، J و K ثلاث نقط تنتمي عل الترتيب إلى الأحرف $[BC]$، $[AC]$ و $[AD]$.
المستقيمان (JK) و (CD) غير متوازيين.

1. **عين تقاطع المستوي (IJK) مع الوجهين ABC و ACD.**
2. **بين أن المستقيمين (JK) و (CD) يتقاطعان في نقطة M و حيث أن المستقيم (IM) محتوى في المستويين (IJK) و (BCD). أنشئ مقطع رباعي الوجوه $ABCD$ بالمستوي (IJK).**



حل:

1. المستوي (IJK) يقطع الوجه ABC وفق القطعة $[IJ]$ و الوجه ACD وفق القطعة $[JK]$.
2. المستقيمان (JK) و (CD) ينتميان إلى المستوي ACD و بما أنهما غير متوازيين فهما متقاطعان في نقطة M. النقطة I تنتمي إلى المستويين (IJK) و (BCD). كذلك النقطة M تنتمي إلى المستويين (IJK) و (BCD) لأنها تنتمي إلى المستقيمين (JK) و (CD). و منه المستقيم (IM) محتوى في المستويين (IJK) و (BCD).
3. يتقاطع المستقيمان (IM) و (BD) في نقطة L. مقطع رباعي الوجوه $ABCD$ هو إذن الرباعي $IJKL$.

الحساب الشعاعي في الفضاء

ملاحظة: يتم تمديد تعاريف و خواص الأشعة و العمليات عليها في الهندسة المستوية إلى الفضاء.

1. أشعة الفضاء

نرفق، كما في المستوي، بكل ثنائية نقطية (A,B) من الفضاء الشعاع $\overrightarrow{AB}$.

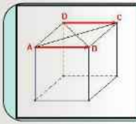
- إذا كان $A \neq B$، منحى الشعاع $\overrightarrow{AB}$ هو منحى المستقيم (AB)، اتجاه الشعاع $\overrightarrow{AB}$ هو من A نحو B و طويلة $\overrightarrow{AB}$ التي نرمز إليها بالرمز $\|\overrightarrow{AB}\|$ هي المسافة AB. لدينا: $\|\overrightarrow{AB}\| = AB$
- إذا كان $A = B$، فإن $\overrightarrow{AA}$ هو الشعاع المعدوم الذي نرمز إليه بالرمز $\vec{0}$.
- غالبا ما نرمز إلى الأشعة بواسطة حرف مثل: $\vec{u}$، $\vec{v}$، $\vec{w}$، ...
- من أجل كل نقطة O و من أجل كل شعاع $\vec{u}$ من الفضاء، توجد نقطة وحيدة M بحيث $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$.

مبرهنة: A، B، C و D أربع نقط من الفضاء. الخواص الثلاث الآتية متكافئة:

(1) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

(2) الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع.

(3) للقطعتين $[AC]$ و $[BD]$ نفس المنتصف.

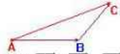


2. العمليات على الأشعة

❖ مجموع شعاعين

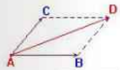
علاقة شال

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$



قاعدة متوازي الأضلاع

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$

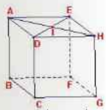


حالة خاصة: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}$. نقول أن $\overrightarrow{BA}$ هو معاكس $\overrightarrow{AB}$ و نكتب $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$.

❖ جداء شعاع بعدد حقيقي

مبرهنة: من أجل كل شعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و من أجل كل عددين حقيقيين k و k' لدينا:

- $(-1)\vec{u} = -\vec{u}$ • $k(\vec{u} + \vec{v}) = k\vec{u} + k\vec{v}$
- $(k + k')\vec{u} = k\vec{u} + k'\vec{u}$ • $k(k'\vec{u}) = (kk')\vec{u}$
- $k\vec{u} = \vec{0}$ يكافئ $k = 0$ أو $\vec{u} = \vec{0}$



مثلا: $\overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{AI}$

نتائج:

- يكون الشعاعان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مرتبطين خطيا إذا و فقط إذا وجد عدد حقيقي k حيث $\vec{v} = k\vec{u}$
- يكون المستقيمان (AB) و (CD) متوازيين إذا و فقط إذا كان الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ مرتبطين خطيا.
- تكون النقط A، B و C في استقامية إذا و فقط إذا كان الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ مرتبطين خطيا.

تمرين محلول 1

$ABCDEFGH$ مكعب. لتكن النقط I، J و K حيث I منتصف $[FG]$، $4\overrightarrow{FJ} = 3\overrightarrow{FE}$ و $2\overrightarrow{DK} = 3\overrightarrow{DC}$

1. عبر عن كل من الشعاعين $\overrightarrow{IJ}$ و $\overrightarrow{AK}$ بدلالة الشعاعين $\overrightarrow{FE}$ و $\overrightarrow{FG}$.
2. بين أن الشعاعين $\overrightarrow{IJ}$ و $\overrightarrow{AK}$ مرتبطان خطيا. ماذا تستنتج بالنسبة للمستقيمين (IJ) و (AK)؟

حل:

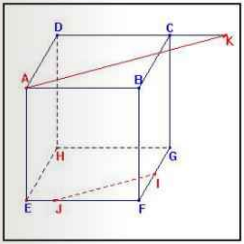
1. $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IF} + \overrightarrow{FJ} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{FG} + \frac{3}{4}\overrightarrow{FE}$

$\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DK} = \overrightarrow{AD} + \frac{3}{2}\overrightarrow{DC}$ و بما أن:

$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{FG}$ و $\overrightarrow{DC} = -\overrightarrow{FE}$ فإن: $\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{FG} - \frac{3}{2}\overrightarrow{FE}$

2. لدينا مما سبق: $\overrightarrow{IJ} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AK}$ و منه فالشعاعان $\overrightarrow{IJ}$ و $\overrightarrow{AK}$ مرتبطان خطيا.

نستنتج هكذا أن المستقيمين (IJ) و (AK) متوازيان.



تمرين محلول 2

$ABCD$ رباعي وجوه. I منتصف $[BC]$ و G مركز ثقل الوجه ABC. نعتبر النقطتين H و K المعرفتين بـ: $\overrightarrow{DH} = \frac{3}{7}\overrightarrow{DG}$ و $\overrightarrow{DK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DI}$.

1. عبر عن كل من الشعاعين $\overrightarrow{AH}$ و $\overrightarrow{AK}$ بدلالة الشعاعين $\overrightarrow{AD}$ و $\overrightarrow{AG}$.
2. بين أن النقط A، H و K في استقامية.

حل:

1. $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DH} = \overrightarrow{AD} + \frac{3}{7}\overrightarrow{DG} = \overrightarrow{AD} + \frac{3}{7}(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AG})$

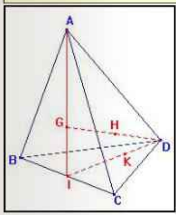
و منه: $\overrightarrow{AH} = \frac{4}{7}\overrightarrow{AD} + \frac{3}{7}\overrightarrow{AG}$

$\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DK} = \overrightarrow{AD} + \frac{1}{3}\overrightarrow{DI} = \overrightarrow{AD} + \frac{1}{3}(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AI})$

نعلم أن: $\overrightarrow{AI} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AG}$ و منه: $\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AD} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{3}\times\frac{3}{2}\overrightarrow{AG}$

نجد هكذا: $\overrightarrow{AK} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AG}$

2. نلاحظ أن: $\overrightarrow{AK} = \frac{7}{6}\overrightarrow{AH}$ و منه الشعاعان $\overrightarrow{AH}$ و $\overrightarrow{AK}$ مرتبطان خطيا. إذن A، H و K في استقامية.

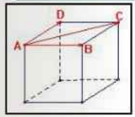


الأشعة من نفس المستوي

تعريف: لتكن $\vec{u}$، $\vec{v}$ و $\vec{w}$ ثلاثة أشعة و لتكن O نقطة كيفية من الفضاء. نعتبر النقط A، B و C من الفضاء حيث:

$$\vec{OA}=\vec{u}\text{ ، }\vec{OB}=\vec{v}\text{ و }\vec{OC}=\vec{w}$$

القول أن الأشعة $\vec{u}$، $\vec{v}$ و $\vec{w}$ من نفس المستوي يعني أن النقط O، A، B و C تنتمي إلى نفس المستوي.



مثال: نلاحظ أن النقط A، B، C و D تنتمي إلى نفس المستوي و منه فالأشعة $\vec{u}$، $\vec{v}$ و $\vec{w}$ الممثلة على الترتيب بـ: $\overrightarrow{AB}$، $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{AD}$ من نفس المستوي.

ملاحظة:

- يعمم التعريف السابق إلى عدد كيفي من أشعة الفضاء.
- إذا كان شعاعان من بين الأشعة الثلاثة $\vec{u}$، $\vec{v}$ و $\vec{w}$ مرتبطين خطيا تكون الأشعة $\vec{u}$، $\vec{v}$ و $\vec{w}$ من نفس المستوي.

مبرهنة: $\vec{u}$، $\vec{v}$ و $\vec{w}$ ثلاث أشعة من الفضاء حيث $\vec{u}$ و $\vec{v}$ غير مرتبطين خطيا.

تكون الأشعة $\vec{u}$، $\vec{v}$ و $\vec{w}$ من نفس المستوي إذا و فقط إذا وجد عددان حقيقيان x و y بحيث:

$$\vec{w}=x\vec{u}+y\vec{v}$$

برهان: لتكن O نقطة كيفية من الفضاء و لتكن النقط A، B و C من الفضاء حيث: $\vec{OA}=\vec{u}$، $\vec{OB}=\vec{v}$ و $\vec{OC}=\vec{w}$

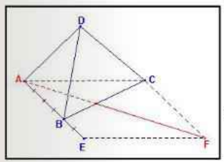
القول أن الأشعة $\vec{u}$، $\vec{v}$ و $\vec{w}$ من نفس المستوي يعني أن النقط O، A، B و C تنتمي إلى نفس المستوي(التعريف).

النقط O، A، B ليست على استقامة واحدة لأن الشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ غير مرتبطين خطيا فهي تعرف إذن مستويا (OAB) حيث $\left(O;\vec{OA};\vec{OB}\right)$ معلم له.

النقط O، A، B و C تنتمي إلى نفس المستوي يعني أن النقطة C تنتمي إلى المستوي (OAB). يوجد إذن عددان حقيقيان x و y بحيث: $\overrightarrow{OC}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}$

($(x;y)$ هما إحداثيا النقطة C بالنسبة إلى المعلم $\left(O;\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}\right)$).

و هكذا $\vec{w}=x\vec{u}+y\vec{v}$



مثال: $ABCD$ رباعي وجوه.(الشكل المقابل)

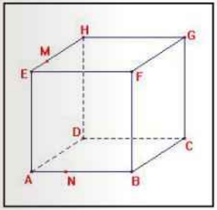
لدينا $\overrightarrow{AF}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$

و منه الأشعة $\vec{AF}$، $\vec{AB}$ و $\vec{AC}$ من نفس المستوي. و بما أن A مشتركة فإن النقط A، B، C و F تنتمي إلى نفس المستوي.

تمرين محلول 1

نعتبر على المكعب $ABCDEFGH$ النقطتين M و N المعرفتين بـ: $\vec{EM}=\frac{1}{3}\vec{EH}$ و $\vec{AN}=\frac{1}{3}\vec{AB}$.

1. عبر عن الشعاع $\overrightarrow{MN}$ بدلالة الشعاعين $\overrightarrow{EA}$ و $\overrightarrow{DB}$.
2. هل الأشعة $\overrightarrow{MN}$، $\overrightarrow{EA}$ و $\overrightarrow{HB}$ من نفس المستوي؟



حل:

1. لدينا باستعمال علاقة شال: $\vec{MN}=\vec{ME}+\vec{EA}+\vec{AN}$

و بما أن $\vec{ME}=\frac{1}{3}\vec{HE}$، $\overrightarrow{HE}=\overrightarrow{DA}$ و $\vec{AN}=\frac{1}{3}\vec{AB}$ و فإن:

$\overrightarrow{MN}=\frac{1}{3}\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{EA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ أي $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{EA}+\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB}\right)$

و هكذا نجد $\vec{MN}=\vec{EA}+\frac{1}{3}\vec{DB}$

2. لدينا باستعمال علاقة شال: $\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{HB}-\overrightarrow{HD}$

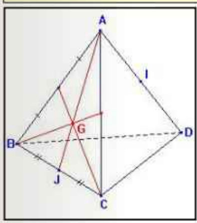
و بما أن $\overrightarrow{HD}=\overrightarrow{EA}$ فإن $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{EA}+\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{HB}-\overrightarrow{EA}\right)$

نجد هكذا $\vec{MN}=\frac{2}{3}\vec{EA}+\frac{1}{3}\vec{HB}$ و منه فالأشعة $\overrightarrow{MN}$، $\vec{EA}$ و $\overrightarrow{HB}$ من نفس المستوي.

تمرين محلول 2

$ABCD$ رباعي وجوه. لتكن النقط I منتصف $[AD]$، J منتصف $[BC]$ و G مركز ثقل المثلث ABC.

3. عبر عن الشعاع $\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC}$ مرة بدلالة $\overrightarrow{DG}$ و مرة أخرى بدلالة الشعاع $\left(\overrightarrow{DI}+\overrightarrow{DJ}\right)$.
4. بين أن النقط D، G، I و J تنتمي إلى نفس المستوي.



حل:

1. لدينا من جهة باستعمال علاقة شال وعلما أن $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$:

$$\vec{DA}+\vec{DB}+\vec{DC}=3\vec{DG}$$

لدينا من جهة ثانية $\overrightarrow{DA}=2\overrightarrow{DI}$ و $\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC}=2\overrightarrow{DJ}$ و منه:

$$\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC}=2\left(\overrightarrow{DI}+\overrightarrow{DJ}\right)$$

2. من السؤال الأول نجد: $\overrightarrow{DG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{DI}+\frac{2}{3}\overrightarrow{DJ}$. نستنتج أن النقط D، G، I و J تنتمي إلى نفس المستوي.

مبرهنة منلاوس ($Ménélaüs$)

.1 ABC مثلث. M، N و P ثلاث نقط متمايزة مثنى مثنى و تنتمي إلى المستقيمات (AB)،(AC) و (BC) على الترتيب.

نفرض إضافة إلى ما سبق أن النقط M، N و P في استقامية وتنتمي إلى مستقيم (Δ).

المستقيم المار من النقطة C و الموازي للمستقيم (AB) يقطع المستقيم (Δ) في نقطة Q.

❖ بين أن:

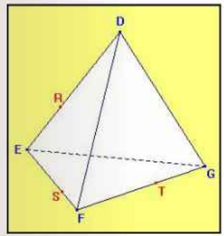
$$\frac{NC}{NA}=\frac{NQ}{NM}=\frac{QC}{AM} \quad \text{و} \quad \frac{QC}{MB}=\frac{PC}{PB}=\frac{PQ}{PM}$$

❖ برهن أن: $\frac{MA}{MB}\times\frac{PB}{PC}\times\frac{NC}{NA}=1$

.2 $DEFG$ رباعي وجوه. R، S، T و U أربع نقط تنتمي على الترتيب إلى المستقيمات (DE)،(EF)،(FG) و (DG).

نفرض إضافة إلى ما سبق أن النقط R، S، T و U تنتمي إلى نفس المستوي.

❖ أعد رسم الشكل ثم أنشئ النقطة U.



❖ يتقاطع المستقيمان (RS) و (DF) في نقطة V.

بتطبيق نتيجة السؤال الأول على مثلثين مختارين بشكل مناسب و بضرب طرف في طرف المساوتين المحصل عليهما برهن أن:

$$\frac{RD}{RE}\times\frac{SE}{SF}\times\frac{TF}{TG}\times\frac{UG}{UD}=1$$

تطبيق

$HIJK$ رباعي وجوه. W، X، Y و Z أربع نقط معرفة كما يلي:

$\overline{HW}=\frac{2}{3}\overline{HI}$، $\overline{JX}=\frac{3}{4}\overline{JI}$، $\overline{YJ}=\frac{1}{3}\overline{YK}$ و $\overline{ZK}=-\frac{3}{4}\overline{ZH}$.

❖ ارسم شكلا مناسبا.

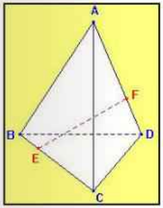
❖ هل تنتمي النقط W، X، Y و Z إلى نفس المستوي؟

المرجح و الاستقامية

لإثبات استقامية ثلاث نقط يكفي أحيانا إثبات أن إحدى هذه النقط هو مرجح النقطتين الأخريين

$ABCD$ رباعي وجوه. نعتبر النقطتين E و F المعرفتين كما يلي: $\overrightarrow{AF}=\alpha\overrightarrow{AD}$ و $\overrightarrow{BE}=\beta\overrightarrow{BC}$

حيث α و β عددان حقيقيان غير معدومين.



1. **دراسة مثال**

نفرض $\alpha=\frac{2}{3}$ و $\beta=\frac{1}{4}$

لتكن النقطة G مرجح الجملة المثقلة $\{(A;1),(B;3),(C;1),(D;2)\}$

❖ أثبت أن النقط E، F و G في استقامية.

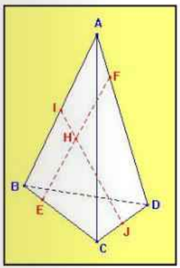
❖ أنشئ النقطة G.

2. **دراسة حالة خاصة**

نفرض $\alpha=\beta=k$

لتكن النقط I، J و H منتصفات القطع المستقيمة $[AB]$،$[CD]$ و $[EF]$ على الترتيب.

نهدف إلى إثبات استقامية النقط I، J و H باستعمال المرجح.



❖ أثبت أنه يوجد عددان حقيقيان x و y يطلب تحديدهما حيث: $x\overrightarrow{EB}+y\overrightarrow{EC}=\vec{0}$. ماذا تستنتج ؟

❖ اثبت أن النقطة F هي مرجح للنقطتين A و D مرفقتين بمعاملين يطلب تحديدهما.

❖ أثبت باستعمال قاعدة التجميع ان النقطة H هي مرجح الجملة المثقلة $\{(A;1-k),(B;1-k),(C;k),(D;k)\}$.

❖ أثبت أن النقط I، J و H في استقامية.

$ABCDEFGH$ مكعب. P منتصف $[EH]$، Q منتصف $[AB]$ و R منتصف $[CG]$.

1. **بين أن** $\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{HA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ **و أن** $\overrightarrow{QR}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AH}\right)$.
2. **بين أن المستويين** (PQR) **و** (ACH) **متوازيان.**
3. **بين أن مقطع المكعب** $ABCDEFGH$ **بالمستوي** (PQR) **هو سداسي منتظم.**

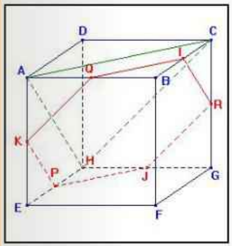
1. لدينا باستعمال علاقة شال $\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{PH}+\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BQ}$ و بما أن $\overrightarrow{PH}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ فإن: $\overrightarrow{PQ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BQ}$. نعلم أن $\overrightarrow{BC}=-\overrightarrow{CB}$ و بتعويض $\overrightarrow{AC}$ بـ $\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ و علما أن $\overrightarrow{BQ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$ فإن $\overrightarrow{PQ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{HA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BA}\right)$. و بما أن $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{BC}$ فإن $\overrightarrow{PQ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{HA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$. علما أن $\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}=\vec{0}$ نستنتج هكذا أن:

$$\boxed{\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{HA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}}\quad (1)$$

لدينا $\overrightarrow{QR}=\frac{1}{2}\overrightarrow{QR}+\frac{1}{2}\overrightarrow{QR}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{QA}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CR}\right)+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{QA}+\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{HG}+\overrightarrow{GR}\right)$. و بما أن: $\frac{1}{2}\overrightarrow{QA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{QA}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$ و $\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{CR}+\overrightarrow{GR}\right)=\vec{0}$ فإن: $\overrightarrow{QR}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AH}\right)+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{HG}\right)$ نعلم أن $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{HG}=\vec{0}$ و منه

$$\boxed{\overrightarrow{QR}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AH}\right)}\quad (2)$$

2. من العلاقة (1) نستنتج أن المستقيم (PQ) يوازي المستوي (ACH) و من العلاقة (2) نستنتج أن المستقيم (QR) يوازي المستوي (ACH). و علما أنه يتوازى مستويان إذا و فقط إذا احتوى أحدهما على مستقيمين متقاطعين كل منهما يوازي المستوي الآخر فإن المستويين (PQR) و (ACH) متوازيان.



3. المستوي (ABC) يقطع المستويين المتوازيين (PQR) و (ACH) وفق مستقيمين متوازيين (AC) و (QI) و منه فإن النقطة I منتصف القطعة $[BC]$ و $QI=\frac{1}{2}AC$. لدينا كذلك: J منتصف $[GH]$ و K منتصف $[AE]$ حيث: $JR=\frac{1}{2}CH$ و $KP=\frac{1}{2}AH$.

و بما أن أقطار أوجه المكعب متقايسة فإن:

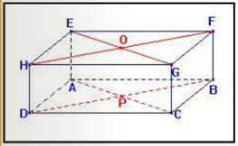
$$QI=IR=RJ=JP=PK=KQ$$

لدينا كذلك $QJ=IP=KR$ (متوسطات للمكعب). نستنتج مما سبق أن مقطع المكعب $ABCDEFGH$ بالمستوي (PQR) هو السداسي المنتظم $QIRJPK$.

$ABCDEFGH$ متوازي مستطيلات. O مركز الوجه $EFGH$ و P مركز الوجه $ABCD$.

1. عبر عن الشعاع $\overrightarrow{OP}$ بدلالة الشعاعين $\overrightarrow{ED}$ و $\overrightarrow{GB}$.
2. نهتم فيما يلي بالهرم الذي رأسه O و قاعدته $ABCD$ و لتكن النقط Q، K، L و M حيث: Q مركز ثقل المثلث (ODC)، K منتصف $[AB]$، M منتصف $[CD]$ و $\overrightarrow{OL}=\frac{4}{5}\overrightarrow{OP}$.

- **أثبت أن النقط** O، K، M، P، Q **و** L **تنتمي على نفس المستوي.**
- **أثبت أن** $5\overrightarrow{KL}-3\overrightarrow{KQ}=\vec{0}$. **ماذا تستنتج بالنسبة للنقط** Q، K **و** L **؟**



1. لدينا: $\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{FB}=\overrightarrow{EA}$ و منه $GCAE$ متوازي أضلاع إذن $\frac{1}{2}\overrightarrow{EG}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ اي $\overrightarrow{OG}=\overrightarrow{PC}$ و منه $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{GC}$.

لدينا حسب علاقة شال: $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{FC}$

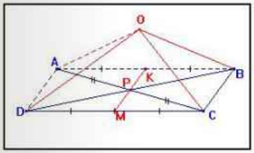
و بما أن: $\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{CG}=-\overrightarrow{OP}$ و $\overrightarrow{FC}=\overrightarrow{ED}$ فإن:

$$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{GB}-\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{ED}$$

نجد هكذا $\boxed{\overrightarrow{OP}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{ED}\right)}$

2.

- لإثبات أن النقط O، K، M، P، Q و L من نفس المستوي يكفي مثلا إثبات أن النقط P، Q و L تنتمي إلى المستوي (OKM).



لدينا: $\overrightarrow{AK}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{DM}$

و منه: $(KM)//(AD)//(BC)$.

يمر إذن المستقيم (KM) من النقطة P. $\left(\overrightarrow{KP}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}\right)$

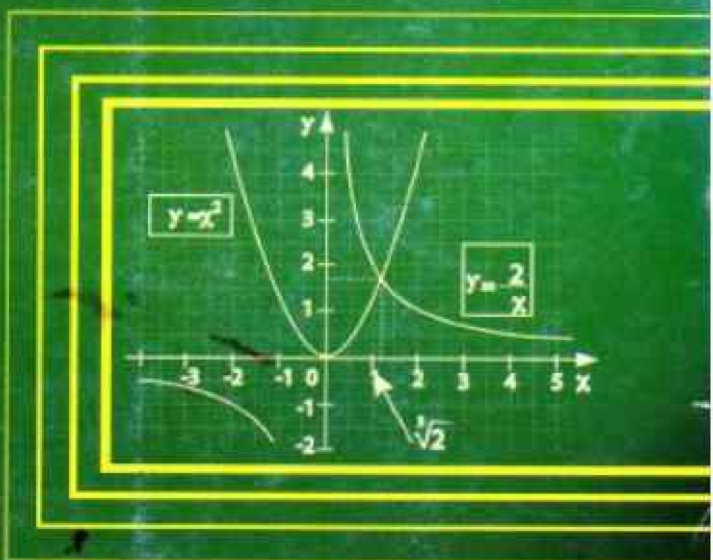
نستنتج أن النقطة P تنتمي إلى المستوي (OKM).

لدينا: النقطة Q تنتمي إلى المستقيم (OM) $\left[\overrightarrow{OQ}=\frac{2}{3}\overrightarrow{OM}\right]$ و منه فالنقطة Q تنتمي إلى المستوي (OKM).

لدينا: النقطة L تنتمي إلى المستقيم (OP) $\left[\overrightarrow{OL}=\frac{4}{5}\overrightarrow{OP}\right]$ و بما أن المستقيم (OP) محتوى في المستوي (OKM) فإن النقطة L تنتمي إلى المستوي (OKM).

- نثبت باستعمال علاقة شال انطلاقا من العلاقة $\overrightarrow{OL}=\frac{4}{5}\overrightarrow{OP}$ و العلاقة $\overrightarrow{OQ}=\frac{2}{3}\overrightarrow{OM}$ أن: $\overrightarrow{KL}=\frac{2}{5}\overrightarrow{KM}-\frac{1}{5}\overrightarrow{OK}$ و $\overrightarrow{KQ}=\frac{2}{3}\overrightarrow{KM}-\frac{1}{3}\overrightarrow{OK}$ و منه: $5\overrightarrow{KL}-3\overrightarrow{KQ}=\vec{0}$.

نستنتج هكذا أن النقط Q، K و L في استقامية.



سعر البيع : 330.00 دج
MS:1208/06

الديوان الوطني للمطبوعات المدرسية

أخي / أختي

إن إستفدت من هذا الملف فالرجاء أن تدع لي و للمؤلف بالخير و النجاح و المغفرة