التمرين الأول :

1) بين أن مركز الفلكة (S) هو النقطة $\Omega(1,0,1)$ وأن شعاعها هو $\sqrt{3}$

لدينا :

$$x^2+y^2+z^2-2x-2z-1=0 \Leftrightarrow (x-1)^2-1+y^2+(z-1)^2-1-1=0$$
$$\Leftrightarrow (x-1)^2+y^2+(z-1)^2=3$$

ومنه مركز الفلكة (S) هو $\Omega(1;0;1)$ وشعاعها $\sqrt{3}$.

2) أ- بين أن $\vec{AB}\wedge\vec{AC}=\vec{i}-\vec{k}$ وتحقق من أن $x-z-2=0$ هي معادلة ديكارتية للمستوى (ABC)

. لدينا : $\vec{AB}(-1;0;-1)$

و $\vec{AC}(2;1;2)$

إذن : $\vec{AB}\wedge\vec{AC}=\begin{vmatrix}0&-1\\1&2\end{vmatrix}\vec{j}-\begin{vmatrix}-1&-1\\2&2\end{vmatrix}\vec{i}+\begin{vmatrix}-1&0\\2&1\end{vmatrix}\vec{k}=\vec{i}-\vec{k}$

. نعلم أن $\vec{AB}\wedge\vec{AC}$ منظمية على المستوى (ABC)

إذن معادلة ديكارتية للمستوى (ABC) تكتب على شكل $x-z+d=0$ حيث $d\in\mathbb{R}$

ولدينا A نقطة من المستوى (ABC) إذن : $1-(-1)+d=0$ أي : $d=-2$.

ومنه $x-z-2=0$ هي معادلة ديكارتية للمستوى (ABC).

ب- تحقق من أن $d(\Omega,(ABC))=\sqrt{2}$ ثم بين أن المستوى (ABC) يقطع الفلكة (S) وفق دائرة (Γ) شعاعها 1

. لدينا : $d(\Omega;(ABC))=\dfrac{|1-1-2|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\dfrac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$

. المسافة بين Ω والمستوى (ABC) أصغر قطعا من شعاع الفلكة .

إذن المستوى يقطع (ABC) وفق دائرة (Γ) شعاعها $r=\sqrt{(\sqrt{3})^2-(\sqrt{2})^2}=1$.

3)

أ - بين أن $\begin{cases}x=1+t\\y=0\\z=1-t\end{cases}\quad(t\in\mathbb{R})$ تمثيل بارامتري للمستقيم (Δ)

المستقيم (Δ) عمودي على المستوى (ABC) و المتجهة $\vec{AB}\wedge\vec{AC}$ منظمية على المستوى (ABC)

إذن المتجهة $\vec{AB}\wedge\vec{AC}$ موجهة للمستقيم (Δ)

ولدينا (Δ) مار من النقطة $\Omega(1;0;1)$.

ومنه تمثيل بارامتري للمستقيم (Δ) هو $\begin{cases}x=1+t\\y=0\\z=1-t\end{cases}\quad(t\in\mathbb{R})$.

ب - بين أن مثلوث إحداثيات H نقطة تقاطع المستقيم (Δ) والمستوى (ABC) هو $(2,0,0)$

ليكن $(x;y;z)$ مثلوث إحداثيات $\mathbf{H}$:

لدينا : $$H \in (ABC)\cap(\Delta) \Leftrightarrow (\exists t \in R) : \begin{cases} x = 1+t \\ y = 0 \\ z = 1-t \\ x-y-2=0 \end{cases}$$

نعوض x و y و z بدلالة t في معادلة المستوى (ABC) فنجد $(1+t)-(1-t)-2=0$ أي $t=1$.

نعوض t بقيمتها في التمثيل البامتري للمستقيم (Δ) فنجد $\begin{cases} x=2 \\ y=0 \\ z=0 \end{cases}$.

ومنه مثلوث إحداثيات $\mathbf{H}$ نقطة تقاطع (Δ) و (ABC) هو $(2;0;0)$.

ج - استنتج مركز الدائرة (Γ)

نعلم أن مركز الدائرة (Γ) هي المسقط العمودي للنقطة Ω على المستوى (ABC)،أي نقطة تقاطع المستقيم (Δ) والمستوى (ABC)

ومنه : مركز الدائرة (Γ) هي النقطة $H(2;0;0)$

التمرين الثاني :

1) حل في مجموعة الأعداد العقدية $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2-12z+61=0$

مميز المعادلة هو $\Delta = (-12)^2 - 4\times1\times61 = -100$.

بما أن $\Delta \prec 0$ فإن المعادلة تقبل حلين عقديين مترافقين هما :

$$z_1 = \frac{12-i\sqrt{100}}{2} = 6-5i \quad \text{و} \quad z_2 = 6+5i$$

ومنه : $S = \{\, 6-5i \,;\, 6+5i \,\}$


http://www.vrac-coloriages.net

(2

أ- احسب $\frac{a-c}{b-c}$ واستنتج أن النقط A و B و C مستقيمية .

لدينا : $$\frac{a-c}{b-c} = \frac{6-5i-2-i}{4-2i-2-i} = \frac{4-6i}{2-3i} = \frac{(4-6i)}{(2-3i)} = \frac{2(2-3i)}{2-3i} = 2$$

بما أن $\frac{a-c}{b-c} \in R$ فإن النقط A و B و C مستقيمية .

ب- تحقق من أن لحق النقطة D صورة النقطة C بالإزاحة T هو $d=3+6i$

لدينا : $D = T(C)$

إذن : $z_D = z_C + z_{\vec{u}} = 2+i+1+5i = 3+6i$

ج- بين أن : $\frac{d-c}{b-c}=-1+i$ و أن $\frac{3\pi}{4}$ عمدة للعدد العقدي $-1+i$

لدينا : $\frac{d-c}{b-c}=\frac{3+6i-2-i}{4-2i-2-i}=\frac{1+5i}{2-3i}=\frac{(1+5i)(2+3i)}{(2-3i)(2+3i)}=\frac{2+3i+10i-15}{4+9}=\frac{-13+13i}{13}=-1+i$

ولدينا :
$$-1+i=\sqrt{2}\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\sqrt{2}\left(-\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$
$$=\sqrt{2}\left(\cos\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)\right)=\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$$

ومنه $\frac{3\pi}{4}$ عمدة للعدد العقدي $-1+i$.

د- استنتج قياسا للزاوية الموجهة $\left(\overline{\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CD}}\right)$

لدينا :
$$\left(\overrightarrow{CB};\overrightarrow{CD}\right)\equiv \arg\frac{d-c}{b-c}\quad [2\pi]$$
$$\equiv \arg(-1+i)\ [2\pi]$$
$$\equiv \frac{3\pi}{4}\quad [2\pi]$$

التمرين الثالث :

ليكن Ω كون الإمكانيات.

السحب يتم تانيا إذن كل سحبة عبارة عن تأليفة لثلاث عناصر من بين ثمانية . وبالتالي : $card\Omega=C_8^3=\frac{8\times7\times6}{3\times2\times1}=56$

1) بين أن : $P(A)=\frac{5}{28}$

الحدث A هو سحب كرة تحمل العدد 0 و كرة تحمل العدد 1 وكرة تحمل العدد 2. وبالتالي : $cardA=C_1^1\times C_2^1\times C_5^1=10$.

ومنه : $p(A)=\frac{cardA}{card\Omega}=\frac{10}{56}=\frac{5}{28}$

2) بين أن : $P(B)=\frac{5}{56}$

الحدث B هو سحب كرة تحمل العدد 1 وعدد الإمكانيات هو C_5^1 وكرتين تحملان العدد 2 وعدد الإمكانيات هو C_2^2.

وبالتالي : $cardB=C_2^2\times C_5^1=5$.

ومنه : $p(B)=\frac{cardB}{card\Omega}=\frac{5}{56}$

3) بين أن : $P(C)=\frac{3}{8}$

الحدث C هو سحب كرة تحمل العدد 2 وعدد الإمكانيات هو C_2^1 وكرتين تحملان العدد 1 وعدد الإمكانيات هو C_5^2

أو سحب كرتين تحملان العدد 2 وعدد الإمكانيات C_2^2 و كرة تحمل العدد 0 وعدد الإمكانيات C_1^1.

وبالتالي $cardC=C_2^1C_5^2+C_2^2C_1^1=21$. ومنه : $p(C)=\frac{cardC}{card\Omega}=\frac{21}{56}=\frac{3}{8}$

التمرين الرابع :

1) تحقق من أن : $u_{n+1}-12=\frac{10}{11}(u_n-12)$ لكل n من $I\!N$

ليكن n من N

لدينا : $u_{n+1}-12=\frac{10}{11}u_n+\frac{12}{11}-12=\frac{10}{11}u_n+\frac{12-132}{11}=\frac{10}{11}u_n-\frac{120}{11}=\frac{10}{11}(u_n-12)$

ومنه : $\forall n\in N;\quad u_{n+1}-12=\frac{10}{11}(u_n-12)$

2) أ- بين بالترجع أن : $u_n<12$ لكل n من $I\!N$

من أجل $n=0$ لدينا $u_0\prec 12$ لأن $u_0=11$.

ليكن n من N

نفترض أن : $u_n\prec 12$ لنبين أن : $u_{n+1}\prec 12$.

لدينا $u_{n+1}-12=\frac{10}{11}(u_n-12)$

بما أن : $u_n\prec 12$ فإن $u_n-12\prec 0$ وبالتالي $u_{n+1}-12\prec 0$ أي أن $u_{n+1}\prec 12$

ومنه : $u_n\prec 12$ لكل n من N .

ب- بين أن المتتالية (u_n) تزايدية قطعا .

ليكن n من N

لدينا : $u_{n+1}-u_n=\frac{10}{11}u_n+\frac{12}{11}-u_n=\frac{12-u_n}{11}$

لدينا : $u_n\prec 12$ إذن $12-u_n\succ 0$ وبالتالي : $u_{n+1}-u_n\succ 0$ لكل n من N .

ومنه : (u_n) تزايدية قطعا .

ج- استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة .

المتتالية (u_n) تزايدية ومكبورة بالعدد 12

إذن : (u_n) متقاربة .

3) أ- بين أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{10}{11}$ ثم اكتب v_n بدلالة n

ليكن n من N

لدينا : $v_{n+1}=u_{n+1}-12=\frac{10}{11}(u_n-12)=\frac{10}{11}.v_n$

إذن : $v_{n+1}=\frac{10}{11}v_n$ لكل n من N .

حسب صيغة الحد العام لمتتالية هندسية لدينا $v_n = v_0 \times \left(\frac{10}{11}\right)^n$ لكل n من N .

أي أن : $v_n = -\left(\frac{10}{11}\right)^n$ لأن $v_0 = u_0 - 12 = 11 - 12 = -1$.

ب- بين أن : $u_n = 12 - \left(\frac{10}{11}\right)^n$ لكل n من $\mathbb{N}$ ثم احسب نهاية المتتالية (u_n)

لدينا : $v_n = u_n - 12$ إذن : $u_n = v_n + 12$ وبالتالي : $u_n = -\left(\frac{10}{11}\right)^n + 12$

ومنه : $u_n = 12 - \left(\frac{10}{11}\right)^n$ لكل n من N .

لدينا : $-1 < \frac{10}{11} < 1$ إذن $\lim \left(\frac{10}{11}\right)^n = 0$ وبالتالي : $\lim u_n = 12$

ومنه : $u_n = 12 - \left(\frac{10}{11}\right)^n$ لكل n من N و $\lim u_n = 12$

التمرين الخامس :

1) بين أن $x^2 - 1$ و $2x^2 \ln x$ لهما نفس الإشارة على المجال $]0,1[$

ثم استنتج أن $g(x) \leq 0$ لكل x من المجال $]0,1]$

ليكن x من $]0;1[$

لدينا $2x^2 \succ 0$ إذن إشارة $2x^2\ln x$ هي إشارة $\ln x$.

لدينا $0 \prec x \prec 1$ إذن $x^2 \prec 1$ أي $x^2 - 1 \prec 0$ ونعلم أن $\ln x \prec 0$ على $]0;1[$.

ومنه للعددين $x^2 - 1$ و $2x^2\ln x$ نفس الإشارة على المجال $]0;1[$.

استنتاج :

العددان $x^2 - 1$ و $2x^2\ln x$ سالبان قطعاعلى المجال $]0;1[$.

وبالتالي : $x^2 - 1 + 2x^2\ln x \prec 0$ لكل x من المجال $]0;1[$.

ومنه : $g(x) \leq 0$ لكل x من المجال $]0;1]$.

2) بين أن $x^2 - 1$ و $2x^2 \ln x$ لهما نفس الإشارة على المجال $]1,+\infty[$

ثم استنتج أن $g(x) \geq 0$ لكل x من المجال $[1,+\infty[$

ليكن x من $]1;+\infty[$.

لدينا $1 \prec x$ إذن $1 \prec x^2$ إذن $0 \prec x^2 - 1$ ونعلم أن $\ln x \succ 0$ على $]1;+\infty[$.

ومنه للعددين $x^2 - 1$ و $2x^2\ln x$ نفس الإشارة على المجال $]1;+\infty[$.

استنتاج :

العددان $x^2 - 1$ و $2x^2\ln x$ موجبان قطعا على المجال $]1;+\infty[$.

وبالتالي : $x^2 - 1 + 2x^2\ln x \geq 0$ لكل x من المجال $[1;+\infty[$.

ومنه : $g(x) \geq 0$ لكل x من المجال $[1;+\infty[$.

II) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $]0,+\infty[$ بما يلي : $f(x)=(x^2-1)\ln x$

وليكن (C) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$ (الوحدة $3cm$) .

1) أ- بين أن $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=+\infty$ و أول هذه النتيجة هندسيا .

نعلم أن $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \ln x=-\infty$ ولدينا : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^2-1=-1$

إذن : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=+\infty$.

هندسيا : محور الأراتيب مقارب لمنحنى الدالة f .

ب- احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ثم بين أن $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=+\infty$ (يمكنك كتابة $\frac{f(x)}{x}$ على الشكل $\left(\frac{x^2-1}{x}\right)\ln x$)

واستنتج أن المنحنى (C) يقبل فرعا شلجميا بجوار $+\infty$ يتم تحديد اتجاهه .

لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ لأن $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$.

لدينا. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2-1}{x}\ln x$

وبما أن : $\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2-1}{x}$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$.

فإن : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=+\infty$.

استنتاج :

بما أن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=+\infty$

فإن : المنحنى (C) يقبل فرعا شلجميا في اتجاه محور الأراتيب جوار $(+\infty)$.

2) أ- بين أن $f'(x)=\frac{g(x)}{x}$ لكل x من $]0,-\infty[$ وأول هندسيا النتيجة $f'(1)=0$

لكل x من $]0;+\infty[$ لدينا :

$$f'(x)=(x^2-1)'\ln x+(x^2-1)(\ln x)=2x\ln x+(x^2-1)\frac{1}{x}=\frac{2x^2\ln(x)+x^2-1}{x}=\frac{g(x)}{x}$$

تأويل هندسي : $f'(1)=0$ يعني أن المنحنى (C) يقبل مماسا أفقيا في النقطة ذات الأفصول 1.

ب- استنتج أن الدالة f تناقصية على المجال $]0,1]$ و تزايدية على المجال $[1,+\infty[$

لدينا x من $]0;+\infty[$ إذن إشارة $f'(x)$ هي إشارة $g(x)$.

وبما أن $g(x)\le 0$ لكل x من المجال $]0;1]$ و $g(x)\ge 0$ لكل x من المجال $[1;+\infty[$.

وبالتالي : الدالة f تناقصية على المجال $]0;1]$ و تزايدية على المجال $[1;+\infty[$.

ج- أعط جدول تغيرات الدالة f على المجال $]0,+\infty[$ ثم بين أن $f(x)\geq 0$ لكل x من $]0,+\infty[$

. جدول تغيرات f هو :

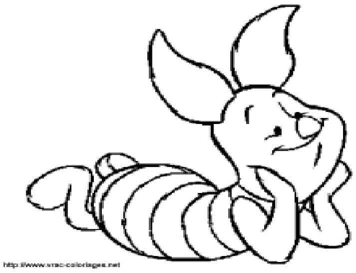
x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
f	$+\infty$ ↘	0	↗ $+\infty$

.. الدالة f تناقصية على المجال $]0;1]$ و تزايدية على المجال $[1;+\infty[$.

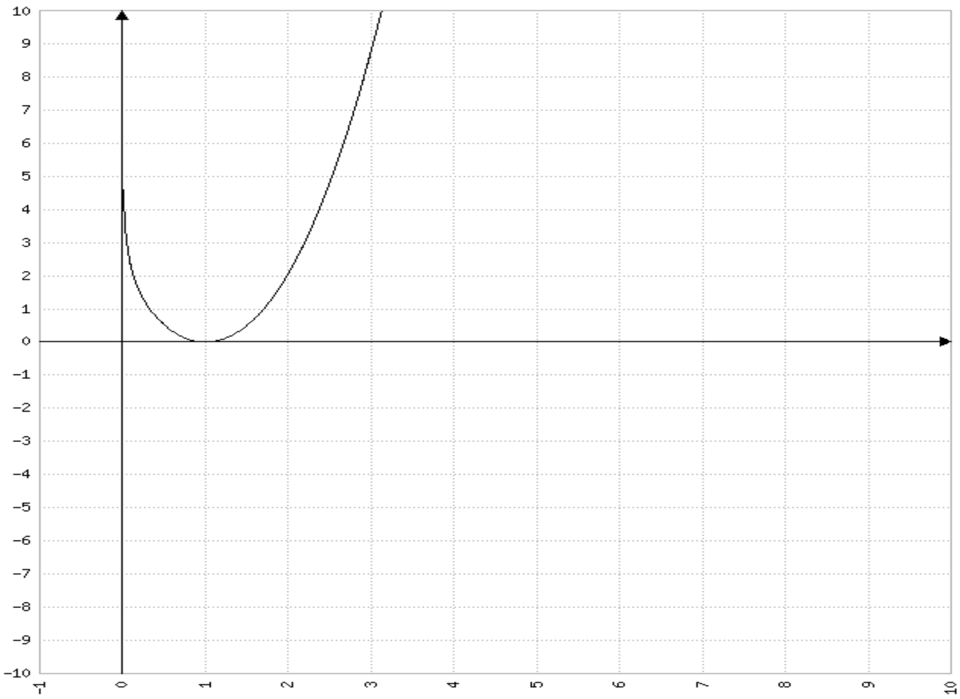
إذن العدد $f(1)$ هي القيمة الدنوية للدالة f على $]0;+\infty[$.

أي أن : $f(x)\geq f(1)$ لكل x من $]0;+\infty[$.

ومنه $\boxed{f(x)\geq 0 \text{ لكل } x \text{ من }]0;+\infty[}$.



3) أنشئ المنحنى (C) في المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$



4) أ- بين أن $u: x\mapsto \frac{x^3}{3}-x$ دالة أصلية للدالة $x\mapsto x^2-1$ على $\mathbb{R}$

الدالة u قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ باعتبارها دالة حدودية .

ولدينا : $u'(x)=3\frac{x^2}{3}-1=x^2-1$ لكل x من $\mathbb{R}$.

إذن : u دالة أصلية للدالة $x\mapsto x^2-1$ على $\mathbb{R}$.

ب- باستعمال مكاملة بالأجزاء بين أن : $\int_1^2 (x^2-1)\ln x\,dx = \frac{2}{9}(1+3\ln 2)$

نضع : $\begin{cases} u(x)=\ln x \\ v'(x)=x^2-1 \end{cases}$ إذن : $\begin{cases} u'(x)=\frac{1}{x} \\ v(x)=\frac{x^3}{3}-x \end{cases}$

وبالتالي :

$$\int_1^2 (x^2-1)\ln x dx = \left[\left(\frac{x^3}{3}-x\right)\ln x\right]_1^2 - \int_1^2 \left(\frac{x^3}{3}-x\right)\times\frac{1}{x}dx$$
$$= \frac{2}{3}\ln 2 - \int_1^2\left(\frac{x^2}{3}-1\right)dx$$
$$= \frac{2}{3}\ln 2 - \left[\frac{x^3}{9}-x\right]_1^2$$
$$= \frac{2}{3}\ln 2 - \left(\left(\frac{8}{9}-2\right)-\left(\frac{1}{9}-1\right)\right)$$
$$= \frac{2}{3}\ln 2 + \frac{2}{9}$$
$$= \frac{2}{9}(1+3\ln 2)$$

ج- احسب ب cm^2 مساحة حيز المستوى المحصور بين المنحنى (C) ومحور الأفاصيل والمستقيمين اللذين معادلتاهما $x=1$ و $x=2$

مساحة حيز المستوى المحصور بين المنحنى (C) ومحورالأفاصيل والمستقيمين المعرفين بالمعادلتين $x=1$ و $x=2$ هي :

$$s=\int_1^2 |f(x)|dx \ ua$$

ولدينا : $f(x)\geq 0$ لكل x من المجال $[1;2]$ إذن : $s=\int_1^2 f(x)dx \ ua$

ولدينا : $\int_1^2 (x^2-1)\ln x dx = \frac{2}{9}(1+3\ln 2)$ و $ua=\|\vec{i}\|^2=9cm^2$

ومنه $\boxed{s=\frac{2}{9}(1+3\ln 2)\times 9cm^2 = 2(1+3\ln 2)cm^2}$

مع متمنياتي لكم بالتوفيق

wadiiidi@hotmail.com