تصحيح موضوع مادة الرياضيات ، شعبة العلوم التجريبية ، الإمتحان الوطني دورة يونيو 2010

تقديـــم : ذ. الوظيفي

التمرين الأول :

1.نبين أن : $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=3\vec{i}+4\vec{k}$:

لدينا : $\begin{cases}\overrightarrow{AB}(4,0,-3)\\ \overrightarrow{AC}(8,1,-6)\end{cases}$

إذن :

$$\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}0 & -3\\ 1 & -6\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}4 & -3\\ 8 & -6\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}4 & 0\\ 8 & 1\end{vmatrix}\vec{k}=3\vec{i}+4\vec{k}$$

ومنه : $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=3\vec{i}+4\vec{k}$.

استنتاج :

نعلم أن المتجهة $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ منظمية على المستوى (ABC).

إذن معادلة ديكارتية للمستوى (ABC) تكتب على شكل $3x+4z+d=0$ حيث d عدد حقيقي .

وحيث أن B نقطة من المستوى (ABC) فإن $3\times3+d=0$ أي أن : $d=-9$.

ومنه $3x+4z-9=0$ معادلة ديكارتية للمستوى (ABC) .

2. نبين أن مركز الفلكة (S) هو $\Omega(3,1,0)$ وشعاعها هو 5 .

لدينا $x^2+y^2+z^2-6x-2y-15=0$

يكافئ : $(x-3)^2-9+(y-1)^2-1+z^2-15=0$

يكافئ : $(x-3)^2+(y-1)^2+z^2=25$

ومنه : مركز الفلكة (S) هو $\Omega(3,1,0)$ وشعاعها هو 5 .

3.أ. تمثيل بارامتري للمستقيم (Δ) :

المستقيم (Δ) عمودي على المستوى (ABC) و المتجهة $\vec{n}(3,0,4)$ منظمية على المستوى (ABC) .

إذن $\vec{n}(3,0,4)$ موجهة للمستقيم (Δ). وعليه فإن المستقيم (Δ) مار من $\Omega(3,1,0)$ و موجه بالمتجهة $\vec{n}(3,0,4)$.

ومنه : النظمة $(t\in R)$ $\begin{cases}x=3+3t\\ y=1\\ z=4t\end{cases}$ تمثيل بارامتري للمستقيم (Δ).

3.ب. نبين أن المستقيم (Δ) يقطع الفلكة في النقطتين E و F :

بما أن المستقيم (Δ) يمر من مركز الفلكة فإنه يخترقها في نقطتين .

وحيث أن E و F تحققان معادلة الفلكة فهما تنتميان إليها .

وحيث أن E و F تنتميان إلى المستقيم (Δ) (من اجل القيمتين 1و (-1) للبارامتر t)

فالنقطتان مشتركتان بين المستقيم والفلكة

وعليه فإن المستقيم (Δ) يقطع الفلكة في النقطتين E و F

ملاحظة : يمكن حل النظمة المكونة من معادلة الفلكة وتمثيل بارامتري للمستقيم .

التمرين 2 :

1.حل المعادلة المقترحة :

مميز المعادلة هو $\Delta=-4$

إذن المعادلة تقبل حلين عقديين مترافقين و هما $3+i$ و $3-i$.

2.أ. بين أن $z'=iz+2-4i$:

لدينا : $R(M)=M'$ يكافئ $z'-a=e^{i\frac{\pi}{2}}(z-a)$

يكافئ $z'=i(z-3+i)+3-i$

ومنه : $z'=iz+2-4i$

2.ب. نحدد لحق صورة C بالدوران :

لدينا $R(C)=C'$ إذن : $c'=i(7-3i)+2-4i$

وبالتالي : $c'=5+3i$ هو لحق صورة C بالدوران R .

2.ج. نبين أن $\frac{c'-b}{c-b}=\frac{1}{2}i$:

لدينا : $\frac{c'-b}{c-b}=\frac{5+3i-3-i}{7-3i-3-i}=\frac{2+2i}{4-4i}=\frac{1}{2}\frac{1+i}{1-i}=\frac{1}{2}i$

استنتاج :

لدينا $\frac{c'-b}{c-b}=\frac{1}{2}i$ و $\frac{1}{2}i=\frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{2}}$

إذن : $\left\|\frac{c'-b}{c-b}\right\|=\frac{1}{2}$ و $\arg\left(\frac{c'-b}{c-b}\right)\equiv\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$

وبالتالي : $\frac{BC'}{BC}=\frac{1}{2}$ و $\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BC'}\right)\equiv\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$

ومنه المثلث BCC' قائم الزاوية في B وأن $BC=2BC'$.

التمرين الثالث :

1.نحسب احتمالي الحدثين A و B :

السحب يتم تأنيا .(لايوجد ترتيب). إذن كل سحبة عبارة عن تأليفة لأربع عناصر من بين 10 .

ومنه $card\,\Omega=C_{10}^{4}=210$.

. وقوع الحدث A يعني سحب كرة حمراء واحدة فقط وثلاثة غير حمراء

ومنه $p(A)=\frac{C_3^1C_7^3}{210}=\frac{1}{2}$

. الحدث المضاد $\overline{B}$ للحدث B هو عدم الحصول على أية كرة بيضاء.

ولدينا : $p(\overline{B})=\frac{C_5^4}{210}=\frac{5}{210}$ و $p(B)=1-p(\overline{B})$

إذن : $p(B)=1-\frac{5}{210}=\frac{41}{42}$

ومنه : $p(A)=\frac{1}{2}$ $p(B)=\frac{41}{42}$

2.أ. نتحقق من قيم X :

قيمة المتغير X هي عدد الكرات الحمراء المحصل عليها بعد سحب 4 كرات كمشة واحدة من الصندوق .
الصندوق يحتوي على 3 كرات حمراء .عندما نسحب دفعة واحدة أربع كرات من هذا الصندوق ،يكون عدد الكرات الحمراء التي نحصل عليها إما 0 ، 1 ،2 أو 3 .

ومنه قيم X هي : 0 و 1 و 2 و 3 .

2.ب. نبين أن : $p(X=2)=\frac{3}{10}$ و $p(X=0)=\frac{1}{6}$:

الحدث $(X=2)$ هوالحصول على كرتين حمراوين و كرتين غير حمراوين :

ومنه : $p(X=2)=\frac{C_3^2.C_7^2}{210}=\frac{63}{210}=\frac{3}{10}$

الحدث $(X=0)$ هو عدم الحصول على أية كرة حمراء

ومنه : $p(X=0)=\frac{C_7^4}{210}=\frac{35}{210}=\frac{1}{6}$

وبالتالي : $p(X=0)=\frac{1}{6}$ و $p(X=2)=\frac{3}{10}$

2.ج. نحدد قانون احتمال X :

لدينا : $X(\Omega)=\{0\,;1\,;2\,;3\}$

سبق وحددنا احتمالات الأحداث $(X=0)$ ، $(X=1)$ وهو الحدث A ثم الحدث $(X=2)$.

الحدث $(X=3)$ يتحقق عندما نسحب 3كرات حمراء وواحدة غير حمراء .

ولدينا $p(X=3)=\frac{C_3^3C_7^1}{210}=\frac{7}{210}$

نلخص النتائج في الجدول التالي :

X_i	0	1	2	3
$P(X=x_i)$	1/6	1/2	3/10	1/30

التمرين الرابع :

1.نبين بالترجع أن $u_n-1\succ 0$ لكل n من N.

. العبارة صحيحة من أجل $n=0$ لأن $u_0=2$

. ليكن n من N.

نفترض أن: $u_n-1\succ 0$. لنبين أن : $u_{n+1}-1\succ 0$

لدينا : $u_{n+1}-1=\frac{3.u_n-1}{2u_n}-1=\frac{u_n-1}{2u_n}$

وبما أن $u_n-1\succ 0$ فإن $u_n\succ 1$ وبالتالي $2u_n\succ 0$

وعليه فإن $\frac{u_n-1}{2u_n}\succ 0$ أي $u_{n+1}-1\succ 0$

ومنه حسب مبدأ الترجع : $u_n-1\succ 0$ لكل n من N.

2.أ. نبين أن المتتالية (v_n) هندسية :

ليكن n من N.

لدينا : $$v_{n+1}=\frac{u_{n+1}-1}{2u_{n+1}-1}=\frac{\frac{3u_n-1}{2u_n}-1}{2.\frac{3u_n-1}{2u_n}-1}=\frac{1}{2}\frac{u_n-1}{2u_n-1}=\frac{1}{2}v_n$$

ومنه : $v_{n+1}=\frac{1}{2}v_n$ لكل n من N.

وعليه فإن المتتالية المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{2}$.

استنتاج : حسب صيغة الحد العام لمتتالية هندسية لدينا : $v_n=v_0\left(\frac{1}{2}\right)^n$ ولدينا : $v_0=\frac{u_0-1}{2u_0-1}=\frac{1}{3}$

إذن : $v_n=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n$ لكل n من N.

2.ب. نبين أن $u_n=\frac{v_n-1}{2v_n-1}$:

ليكن n من N.لدينا :

$$v_n=\frac{u_n-1}{2u_n-1}\Rightarrow v_n(2u_n-1)=u_n-1$$
$$\Rightarrow 2v_n.u_n-v_n=u_n-1$$
$$\Rightarrow 2v_n.u_n-u_n=v_n-1$$
$$\Rightarrow u_n.(2v_n-1)=v_n-1$$
$$\Rightarrow u_n=\frac{v_n-1}{2v_n-1}$$

ومنه : $u_n=\frac{v_n-1}{2v_n-1}$ لكل n من N.

استنتاج :

لدينا $u_n=\frac{v_n-1}{2v_n-1}$ و $v_n=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n$ لكل n من N

إذن $$u_n=\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n-1}{\frac{2}{3}.\left(\frac{1}{2}\right)^n-1}$$

وحيث أن $-1\prec\frac{1}{2}\prec 1$ فإن $\lim\left(\frac{1}{2}\right)^n=0$

ومنه : $\lim u_n=1$

3.حساب $\lim w_n$:

لدينا $\lim u_n=1$ والدالة $\ln$ متصلة في 1

إذن : $\lim w_n=\ln 1$ ومنه : $\lim w_n=0$

التمرين الخامس :

الجزء الأول : $g(x)=1+4xe^{2x}$

1.نبين أن : $g'(x)=4(2x+1)e^{2x}$ لكل x من R :

الدالة g قابلة للإشتقاق على R ولكل x من R لدينا :

$$g'(x)=4e^{2x}+2\times 4xe^{2x}$$
$$=4(1+2x)e^{2x}$$

ومنه : $g'(x)=4(2x+1)e^{2x}$ لكل x من R

2.نحدد تغيرات g .

لكل x من R : $e^{2x}\succ 0$

إذن إشارة $g'(x)$ هي إشارة $1+2x$

ولدينا : $1+2x\geq 0 \Leftrightarrow x\geq -\frac{1}{2}$

ومنه $g'(x)\geq 0 \Leftrightarrow x\geq -\frac{1}{2}$

وعليه فإن : g تزايدية على $\left[-\frac{1}{2},+\infty\right[$ و تناقصية على $\left]-\infty,-\frac{1}{2}\right]$.

3.أ.نبين أن : $g\left(-\frac{1}{2}\right)=1-\frac{2}{e}$:

لدينا

$$g\left(-\frac{1}{2}\right)=1+4\frac{1}{2}e^{-1}=1-2e^{-1}=1-\frac{2}{e}$$

استنتاج : لدينا $2\prec e$ إذن $\frac{2}{e}\prec 1$ وبالتالي $0\prec 1-\frac{2}{e}$

ومنه : $0\prec g\left(-\frac{1}{2}\right)$

3.ب. نستنتج أن $g(x)\succ 0$ لكل x من R .

ليكن x من R ،

إذا كان $x\geq -\frac{1}{2}$ فإن $g(x)\geq g\left(-\frac{1}{2}\right)$ لأن g تزايدية على $\left[-\frac{1}{2},+\infty\right[$

وبالتالي : $g(x)\succ 0$

إذا كان إذا كان $x\leq -\frac{1}{2}$ فإن $g(x)\geq g\left(-\frac{1}{2}\right)$ لأن g تناقصية على $\left]-\infty,-\frac{1}{2}\right]$.

وبالتالي : $g(x)\succ 0$

ومنه : $g(x)\succ 0$ لكل x من R .

الجزء الثاني : $f(x)=(2x-1)e^{2x}+x+1$

1.نحسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$:

لدينا $\lim_{t\to+\infty} e^{t}=+\infty$ إذن $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

نبين أن $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$:

لدينا $f(x)=2xe^{2x}-e^{2x}+x+1$

نضع $u=2x$ إذن : $\lim_{x\to\infty}2xe^{2x}=\lim_{u\to-\infty}ue^{u}=0$ و $\lim_{x\to\infty}e^{2x}=\lim_{u\to-\infty}e^{u}=0$

ومنه $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

2.بين أن $f'(x)=g(x)$ لكل x من R :

الدالة f قابلة للإشتقاق على R ولكل x من R لدينا : $f'(x)=2e^{2x}+2(2x-1)e^{2x}+1=1+4xe^{2x}$

ومنه $f'(x)=g(x)$ لكل x من R.

استنتاج : لدينا $f'(x)=g(x)$ لكل x من R و g موجبة قطعا على R. ومنه f تزايدية قطعا على R .

3.أ.نحسب $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$:

لدينا : $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x-1}{x}e^{2x}+\frac{x+1}{x}\right)$ و $\lim_{x\to+\infty}\frac{2x-1}{x}=2$ و $\lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{x}=1$ و $\lim_{x\to+\infty}e^{2x}=+\infty$.

إذن : $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=+\infty$.

استنتاج : بما أن : $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ و $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=+\infty$

فإن منحنى الدالة f يقبل فرعا شلجميا في اتجاه محور الأراتيب جوار $(+\infty)$.

3.أ. نحسب $\lim_{x\to+\infty}(f(x)-(x+1))$:

لدينا : $\lim_{x\to-\infty}(f(x)-(x+1))=\lim_{x\to-\infty}(2xe^{2x}-e^{2x})=0$ (انظر الجواب على السؤال 1)

استنتاج : بما أن : $\lim_{x\to+\infty}(f(x)-(x+1))=0$

فإن : المستقيم (Δ) المعرف بالمعادلة $y=x+1$ مقارب لمنحنى الدالة f جوار $(-\infty)$.

ج. نحدد زوج إحداثيتي نقطة تقاطع (Δ) ومنحنى الدالة f. لتكن $M(x,y)$ نقطة من المستوى ، لدينا :

$$M\in(\Delta)\cap(C)\Leftrightarrow\begin{cases}y=f(x)\\y=x+1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)=x+1\\y=x+1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}(2x-1)\ e^{2x}=0\\y=x+1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}2x-1=0\\y=x+1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{1}{2}\\y=\frac{3}{2}\end{cases}$$

ومنه : زوج إحداثيتي نقطة تقاطع (Δ) و (C) هو $\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$.

تحديد الوضع النسبي (Δ) و (C) :

لدينا : $f(x)-(x+1)=(2x-1)e^{2x}$ و $e^{2x}\succ 0$

ومنه إشارة الفرق $f(x)-(x+1)$ هي إشارة $2x-1$.

إذا كان $x\geq\frac{1}{2}$ فإن $f(x)-(x+1)\geq 0$ ومنه (C) يوجد فوق (Δ) على $\left[\frac{1}{2},+\infty\right[$.

إذا كان $x\leq\frac{1}{2}$ فإن $f(x)-(x+1)\leq 0$ ومنه (C) يوجد تحث (Δ) على $\left]-\infty\ ,\ \frac{1}{2}\right]$.

وبالتالي : (C) يوجد فوق (Δ) على $\left[\frac{1}{2},+\infty\right[$ و (C) يوجد تحث (Δ) على $\left]-\infty\ ,\ \frac{1}{2}\right]$ ..

4.أ.بين ان $y=x$ معادلة مماس (C) في أصل المعلم :

معادلة مماس (C) في النقطة التي أفصولها 0 هي : $y=f'(0)(x-0)+f(0)$

ولدينا $f'(0)=1$ و $f(0)=0$.

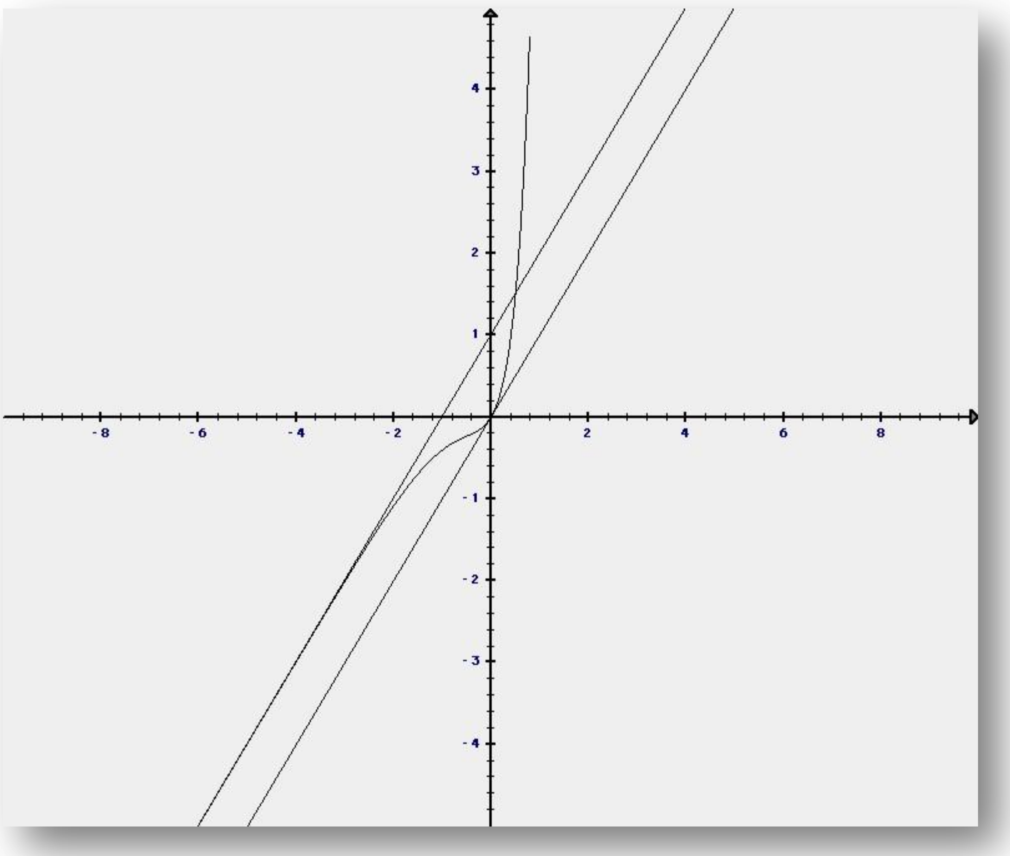
ومنه معادلة مماس (C) في أصل المعلم هي : $y=x$.

الدالة f قابلة للإشتقاق مرتين على R ولدينا لكل x من R : $f''(x)=g'(x)$

وحسب الجزء الأول من التمرين فإن g' أي f'' تنعدم في $\left(\frac{-1}{2}\right)$ وتغير إشارتها بجواره

ومنه النقطة التي أفصولها $\left(\frac{-1}{2}\right)$ تعتبر نقطة انعطاف (C) .

5.إنشاء (Δ) و (C) :



6.أ. نحسب التكامل :

نضع $\begin{cases} u(x)=2x-1 \\ v'(x)=e^{2x} \end{cases}$ ولدينا : $\begin{cases} u'(x)=2 \\ v(x)=\frac{1}{2}e^{2x} \end{cases}$

وبالتالي :

$$\int_0^{\frac{1}{2}}(2x-1)e^{2x}dx=\left[\frac{2x-1}{2}e^{2x}\right]_0^{\frac{1}{2}}-\int_0^{\frac{1}{2}}e^{2x}dx=\frac{1}{2}-\left(\frac{e}{2}-\frac{1}{2}\right)=1-\frac{e}{2}.$$

6.ب.لنحدد مساحة حيز المستوى المحصور بين (C) و (T) والمستقيمين المعرفين بالمعادلتين $x=0$ و $x=\frac{1}{2}$

مساحة الحيز المحصور بين (C) و (T) والمستقيمين المعرفين بالمعادلتين $x=0$ و $x=\frac{1}{2}$ هي :

$$S=\int_0^{\frac{1}{2}}|f(x)-x|dx\ ua$$

بتأطير التعبير $f(x)-x$ حيث $0\le x\le\frac{1}{2}$ أو بتوظيف دراسة تقعر المنحنى نستنتج أن $f(x)-x\ge 0$

وبالتالي :

$$\begin{aligned} S&=\int_0^{\frac{1}{2}}|f(x)-x|dx\ ua \\ &=\int_0^{\frac{1}{2}}\left((2x-1)e^{2x}+1\right)dx\times 4cm^2 \\ &=\left(\int_0^{\frac{1}{2}}(2x-1)e^{2x}dx+\int_0^{\frac{1}{2}}dx\right)\times 4cm^2 \\ &=4\left(1-\frac{e}{2}+\frac{1}{2}\right)cm^2 \\ &=(6-2e)cm^2 \end{aligned}$$

مع متمنياتي لكم بالتوفيق

wadiiifi@hotmail.com