تصحيح موضوع مادة الرياضيات ، شعبة العلوم التجريبية ، الإمتحان الوطني دورة يونيو 2008

التمرين الأول :

1. نبين أن مركز الفلكة (S) هو $\Omega(1,0,2)$ وشعاعها هو $\sqrt{3}$.

لدينا . $x^2+y^2+z^2-2x-4z+2=0$ يكافئ : $(x-1)^2-1+(y-0)^2+(z-2)^2-2^2+2=0$

يكافئ : $(x-1)^2+(y-0)^2+(z-2)^2=3$

ومنه : مركز الفلكة (S) هو $\Omega(1,0,2)$ وشعاعها هو $\sqrt{3}$.

. بما أن مثلوث إحداثيات النقطة A يحقق معادلة الفلكة (S) فإن $A\in(S)$

2. نحدد مثلوث إحداثيات $\overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{OB}$:

لدينا : $\begin{cases}\overrightarrow{OA}(0,-1,1)\\ \overrightarrow{OB}(1,-1,0)\end{cases}$

إذن :

$$\overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{OB}=\begin{vmatrix}-1&1\\-1&0\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}0&1\\1&0\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}0&-1\\1&-1\end{vmatrix}\vec{k}$$
$$=\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$$

ومنه : $\overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{OB}=\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$.

وبالتالي :مثلوث إحداثيات $\overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{OB}$ هو $(1;1;1)$

. نبين أن $x+y+z=0$ هي معادلة ديكارتية للمستوى (OAB) :

نعلم أن المتجهة $\overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{OB}$ منظمية على المستوى (OAB).

إذن معادلة ديكارتية للمستوى (OAB) تكتب على شكل $x+y+z+d=0$ حيث d عدد حقيقي .

وحيث أن O نقطة من المستوى (OAB) فإن $0+0+0+d=0$ أي أن : $d=0$.

ومنه $x+y+z=0$ معادلة ديكارتية للمستوى (OAB) .

3. نبين أن المستوى (OAB) مماس للفلكة (S) في النقطة A .

مسافة $\Omega(1,0,2)$ ، مركز الفلكة (S) ، عن المستوى (OAB) هي $\dfrac{|1+0+2|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}=\dfrac{3}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}$

ومنه (OAB) مماس للفلكة (S) وبالتالي للمستوى (OAB) والفلكة (S) نقطة مشتركة وحيدة .

وحيث أن A نقطة مشتركة بين المستوى (OAB) و الفلكة (S) فإنها نقطة تماسهما.

التمرين الثا نى :

1. نحل في C المعادلة $z^2-6z+34=0$:

مميز المعادلة هو $\Delta=(-6)^2-4\times34=-100$.

إذن المعادلة تقبل حلين عقديين مترافقين هما : $z_1=\dfrac{6-10i}{2}=3-5i$ و $z_2=3+5i$.

ومنه مجموعة حلول المعادلة هي $S=\{3+5i\ ;\ 3-5i\}$.

2.أ.نبين أن : $z'=z+4-2i$

لدينا M' صورة M بالإزاحة T يكافئ : $\overrightarrow{MM'}=\vec{u}$

يكافئ : $z'-z=z_{\vec{u}}$

يكافئ : $z'=z+4-2i$

ومنه : $z'=z+4-2i$

.نتحقق أن النقطة C هي صورة النقطة A بالإزاحة T :

لدينا :

$$\begin{aligned} a+4-2i &= 3+5i+4-2i \\ &= 7+3i \\ &= c \end{aligned}$$

إذن : النقطة C هي صورة النقطة A بالإزاحة T

ب.نبين أن : $\frac{b-c}{a-c}=2i$

لدينا : $\frac{b-c}{a-c}=\frac{3-5i-(7+3i)}{3+5i-(7+3i)}=\frac{-4-8i}{-4+2i}=\frac{2+4i}{2-i}=\frac{(2+4i)(2+i)}{2^2+(-1)^2}=\frac{4+2i+8i-4}{5}=\frac{10i}{5}=2i$

ج.: نستنتج أن المثلث ABC قائم الزاوية في A و $SC=2AC$

لدينا : $\frac{b-c}{a-c}=2i$ و $2i=2\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)$

إذن : $\frac{b-c}{a-c}=2\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)$

ومنه : $\arg\frac{b-c}{a-c}\equiv\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$ و $\left|\frac{b-c}{a-c}\right|=2$

وبالتالي : $\left(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB}\right)\equiv\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$ و $\frac{|b-c|}{|a-c|}=2$.

أي : $\left(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB}\right)\equiv\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$ و $\frac{BC}{AC}=2$.

ومنه : المثلث ABC قائم الزاوية في A و $BC=2AC$

التمرين الثالث ::

1.أ. نحسب احتمال الحصول على كرتين حمراوين وكرة خضراء :

ليكن Ω كون الإمكانيات .

السحب يتم عشوائيا وفي آن واحد إذن : كل نتيجة للتجربة عبارة عن تأليفة لثلاثة عناصر من بين تسعة.

وبالتالي : $card\Omega=C_9^3=\frac{9\times8\times7}{3\times2\times1}=84$.

ليكن A الحدث : " الحصول على كرتين حمراوين وكرة خضراء "

وحيث أنه لا يمكن التمييز بين الكرات باللمس فإن احتمال الحدث A هو $p(A)=\frac{cardA}{card\Omega}=\frac{C_6^2}{84}=\frac{\frac{6\times5}{2\times1}}{84}=\frac{15}{84}$

================== يونيو 2008 ==================

1)ب.نحسب احتمال الحصول على كرة خضراء واحدة على الأقل:

ليكن B" الحصول على كرة خضراء واحدة على الأقل"

الحدث المضاد للحدث B هو : " عدم الحصول على أية كرة خضراء "

احتمال $\overline{B}$ هو : $p(\overline{B})=\frac{cardB}{card\Omega}=\frac{C_6^3}{84}=\frac{20}{84}=\frac{5}{21}$

ومنه : $p(B)=1-p(\overline{B})=1-\frac{5}{21}=\frac{16}{21}$

ومنه : $p(B)=\frac{16}{21}$

2.نحسب احتمال الحصول على كرات حمراء :

ليكن Ω كون إمكانيات التجربة .

السحب بالتتابع وبدون إحلال .إذن كل نتيجة للتجربة تعتبر ترتيبة بدون تكرار لثلاث عناصر من بين تسعة .

وبالتالي : $card\Omega = A_9^3 = 9\times 8\times 7 = 504$. ليكن الحدث C : "سحب ثلاث كرات حمراء "

لدينا : $p(C)=\frac{cardC}{card\Omega}=\frac{A_6^3}{504}=\frac{120}{504}$

مسألـــــــــــــــــــــة

I) نعتبر الدالة العددية g المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بما يلي : $g(x)=x-2\ln(x)$

1.أ.نحسب $g'(x)$ لكل x من $]0;+\infty[$

الدالة g قابلة للإشتقاق على المجال $]0;+\infty[$ ولكل x من $]0;+\infty[$. لدينا : $g'(x)=1-2.\frac{1}{x}=\frac{x-2}{x}$

ومنه : لكل x من $]0;+\infty[$: $g'(x)=\frac{x-2}{x}$

1.ب.نبين أن g تزايدية قطعا على $[2;+\infty[$ وتناقصية قطعا على $]0;2]$.

لدينا x من $]0;+\infty[$ إذن : $x\succ 0$ ومنه إشارة $g'(x)$ هي إشارة $x-2$ على $]0;+\infty[$.

وبالتالي : $g'(x)\geq 0$ لكل x من $[2;+\infty[$ و $g'(x)\leq 0$ لكل x من $]0;2]$.

ومنه : g تزايدية على $[2;+\infty[$ وتناقصية على $]0;2]$.

2.نبين أن : $g(x)\succ 0$ لكل x من $]0;+\infty[$.

ليكن x عنصرا من $]0;+\infty[$

. إذا كان $x\geq 2$

فإن $g(x)\geq g(2)$ لأن g تزايدية على $[2;+\infty[$.

وبالتالي : $g(x)\geq 0$

. إذا كان $x\leq 2$

فإن $g(x)\geq g(2)$ لأن g تناقصية على $]0;2]$.

وبالتالي : $g(x)\geq 0$

ولدينا : $g(2)\succ 0$

إذن : $g(x)\succ 0$ لكل x من $]0;+\infty[$.

II) نعتبر الدالة العددية f المعرفة بما يلي : $f(x)=x-(\ln x)^2$.

1. نحسب $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)$

نعلم أن $\lim\limits_{x\to0^+}\ln x=-\infty$ إذن : $\lim\limits_{x\to0^+}(\ln x)^2=+\infty$

ومنه : $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=-\infty$

2.أ.نضع : $t=\sqrt{x}$ إذن $x=t^2$ ولدينا : $(x\to+\infty)\Rightarrow(t\to+\infty)$

وبالتالي : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)^2}{x}=\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{(\ln t^2)^2}{t^2}=\lim\limits_{t\to+\infty}\left(\frac{(\ln t^2)}{t}\right)^2=\lim\limits_{t\to+\infty}\left(2\frac{(\ln t)}{t}\right)^2=0$ لأن : $\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{\ln t}{t}=0$.

ومنه : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)^2}{x}=0$

2.ب. لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(1-\frac{(\ln x)^2}{x}\right)=+\infty$ لأن $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)^2}{x}=0$

لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x-(\ln x)^2}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}1-\frac{(\ln x)^2}{x}=1$.

ومنه : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=1$

2.ج.لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-x=\lim\limits_{x\to+\infty}-(\ln x)^2=-\infty$ لأن : $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$.

ومنه : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-x=-\infty$

استنتاج:

بما أن : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=1$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x)=-\infty$.

فإن : منحنى f يقبل فرعا شلجميا في اتجاه المستقيم (Δ) الذي معادلته $y=x$ بجوار $(+\infty)$.

د.ليكن x عنصرا من المجال $]0;+\infty[$.

لدينا : $f(x)-x=-(\ln x)^2$ لكل x من المجال $]0;+\infty[$.

إذن : $f(x)-x\le0$ لكل x من المجال $]0;+\infty[$.

ومنه : منحنى الدالة f يوجد تحت المستقيم (Δ)

3.أ.الدالة f قابلة للإشتقاق على $]0;+\infty[$ ولكل x من $]0;+\infty[$ ولدينا :

$$f'(x)=1-2\times\ln x\times(\ln x)'=1-\frac{2\ln x}{x}=\frac{x-2\ln x}{x}=\frac{g(x)}{x}$$

ومنه : $f'(x)=\frac{g(x)}{x}$ لكل x من $]0;+\infty[$

من خلال I) لدينا $g(x)\succ0$ لكل x من $]0;+\infty[$.

وبالتالي : $f'(x)\succ0$ لكل x من $]0;+\infty[$

ومنه : الدالة f تزايدية قطعا على المجال $]0;+\infty[$

3.ب.جدول تغيرات الدالة f هو :

x x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	+	
ff	$-\infty$	$+\infty$

3.ج.معادلة مماس منحنى الدالة f في النقطة ذات الأفصول 1 هي : +

$$y = f'(1)(x-1)+f(1)$$
$$= (x-1)+1$$
$$= x$$

ومنه : $y = x$ هي معادلة مماس منحنى الدالة f في النقطة ذات الأفصول 1

4.نبين : المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في $]0:+\infty[$ و $\frac{1}{2} \prec \alpha \prec \frac{1}{e}$

الدالة f متصلة وتزايدية قطعا على $]0:+\infty[$.

إذن: $f(\,]0;+\infty[\,) = \left]\lim\limits_{x\to 0^+} f(x); \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right[=]-\infty\,;+\infty[$

وبالتالي: $0 \in f(\,]0;+\infty[\,)$

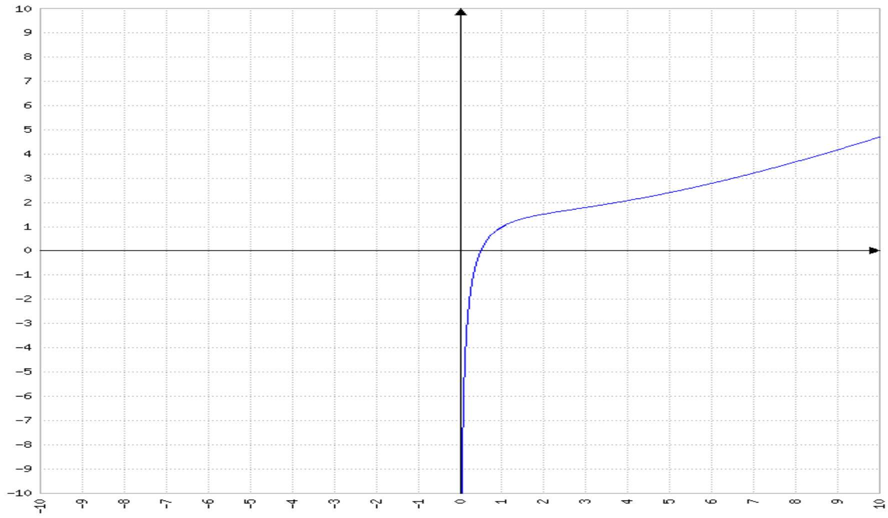
ومنه : للعدد 0 سابق وحيد بالدالة f .

وبالتالي : المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في $]0:+\infty[$.

وحيث أن : $f\left(\frac{1}{e}\right)\times f\left(\frac{1}{2}\right) \prec 0$

لأن : $f\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e} - \left(\ln\frac{1}{e}\right)^2 = \frac{1}{e} - (-\ln e)^2 = \frac{1}{e} - 1 = \frac{1-e}{e} \prec 0$

5. إنشاء منحنى f .



================== يونيو 2008 ==================

6.الدالة H قابلة للإشتقاق على $]0:+\infty[$ كمجموع دالتين قابلتين للإشتقاق على $]0:+\infty[$.

ولكل x من $]0:+\infty[$ لدينا : $H'(x)=(x)'\ln x+x(\ln x)'-(x)'=\ln x+x.\frac{1}{x}-1=\ln x$

ومنه : H دالة أصلية للدالة ln على المجال $]0:+\infty[$.

ولدينا : $\int_1^e \ln x\,dx=[x\ln x-x]_1^e=(e\ln e-e)-(1\ln 1-1)=1$

ب .

نضع $\begin{cases}u(x)=(\ln x)^2\\ v'(x)=1\end{cases}$. إذن : $\begin{cases}u'(x)=2\dfrac{\ln x}{x}\\ v(x)=x\end{cases}$

وبالتالي :

$$\begin{aligned}\int_1^e(\ln x)^2dx&=\left[x(\ln x)^2\right]_1^e-2\int_1^e\ln x\,dx\\&=e(\ln e)^2-1(\ln 1)^2-2\times 1\\&=e-2\end{aligned}$$

ومنه :

$$\boxed{\int_1^e(\ln x)^2dx=e-2}$$

ج.نحسب مساحة حيز المستوى المحصور بين (C) و (Δ) والمستقيمين المعرفين بالمعادلتين $x=1$ و $x=e$:

مساحة حيز المستوى المحصور بين (C) و (Δ) والمستقيمين المعرفين بالمعادلتين $x=1$ و $x=e$ هي :

$\int_1^e|f(x)-x|dx=\int_1^e(\ln x)^2dx$ بوحدة قياس المساحة .

ولدينا : $\int_1^e|f(x)-x|dx=\int_1^e(\ln x)^2dx=e-2$

ومنه :

مساحة حيز المستوى المحصور بين (C) و (Δ) والمستقيمين المعرفين بالمعادلتين $x=1$ و $x=e$ هي : $e-2$ بوحدة قياس المساحة .

III) نعتبر المتتالية العددية المعرفة بما يلي : $u_0=2$ و $u_{n+1}=f(u_n)$ لكل n من N .

1.نبين أن : $1\le u_n\le 2$ لكل n من N .

من اجل $n=0$ لدينا : $1\le u_0\le 2$ لأن $u_0=2$.

ليكن n من N .

نفترض أن $1\le u_n\le 2$ و لنبين أن $1\le u_{n+1}\le 2$.

لدينا : $1\le u_n\le 2$

إذن : $f(1)\le f(u_n)\le f(2)$ لأن f تزايدية قطعا على المجال [1;2].

أي $1\le u_{n+1}\le 1-(\ln 2)^2$

وبالتالي : $1\le u_{n+1}\le 2$ لأن $1-(\ln 2)^2\prec 2$

ومنه حسب مبدأالترجع : $1\le u_n\le 2$ لكل n من N .

2.نبين أن المتتالية (u_n) تناقصية :

ليكن n من N .

لدينا : $u_{n+1}-u_n=-(\ln u_n)^2\leq 0$

إذن : $u_{n+1}-u_n\leq 0$ لكل n من N .

ومنه : المتتالية (u_n) تناقصية

3.نبين أن (u_n) متقاربة ونحدد نهايتها :

لدينا : (u_n) تناقصية ومصغورة بالعدد 1 .

إذن : (u_n) متقاربة .لتكن l نهايتها .

لدينا :

الدالة f متصلة على المجال $I=[1;2]$.

و $f(I)\subset I$

و $u_0\in I$

و$u_{n+1}=f(u_n)$ لكل n من N .

و (u_n) متقاربة

إذن : l حل للمعادلة $f(x)=x$ في $I=[1;2]$

ليكن x من $I=[1;2]$

لدينا :

$$\begin{aligned} f(x)=x &\Leftrightarrow x-(\ln x)^2=x \\ &\Leftrightarrow -(\ln x)^2=0 \\ &\Leftrightarrow (\ln x)^2=0 \\ &\Leftrightarrow \ln x=0 \\ &\Leftrightarrow x=1 \end{aligned}$$

ومنه: المتتالية (u_n) متقاربة نحو العدد 1

الثقة في la confiance