تصحيح موضوع مادة الرياضيات ، شعبة العلوم التجريبية ، الإمتحان الوطني دورة يوليوز 2011

تقديـــم : ذ. الوظيفي

التمرين الأول :

1.أ- نحل في R المعادلة : $x^2-2x-3=0$:

مميز المعادلة هو : $\Delta=(-2)^2-4\times(-3)=16$

بما ان $\Delta \succ 0$ فإن المعادلة تقبل حلين حقيقيين مختلفين هما $\frac{2-4}{2}=-1$ و $\frac{2+4}{2}=3$

ومنه: $S=\{-1;3\}$

1.ب - نحل في R المعادلة : $e^x-\frac{3}{e^x}-2=0$

المعادلة معرفة على المجموعة R .

ليكن x عددا حقيقيا ، و S مجموعة حلول المعادلة $e^x-\frac{3}{e^x}-2=0$

لدينا:

$$x\in S \Leftrightarrow \frac{\left(e^x\right)^2-2e^x-3}{e^x}=0$$
$$\Leftrightarrow \left(e^x\right)^2-2e^x-3=0$$

وبوضع $X=e^x$ حسب السؤال السابق $e^x=-1$ أو $e^x=3$

وحيث أن $\left(e^x\succ 0\right)$: $(\forall x\in R)$ فإن $e^x=3$ ومنه : $x=\ln 3$

وبالتالي : $S=\{\ln 3\}$

2.نحل في R المتراجحة : $e^{x+1}-e^{-x}\geq 0$

المتراجحة معرفة على R .

ليكن x عددا حقيقيا ، و S مجموعة حلول المتراجحة $e^{x+1}-e^{-x}\geq 0$:

لدينا :

$$x\in S\Leftrightarrow e^{x+1}\geq e^{-x}$$
$$\Leftrightarrow x+1\geq -x$$
$$\Leftrightarrow x\geq \frac{-1}{2}$$

ومنه : $S=\left[\frac{-1}{2};+\infty\right[$

التمرين الثاني :

1.نحل في C المعادلة : $z^2-6z+18=0$

مميز المعادلة هو : $\Delta=(-6)^2-4\times 18=-36$

بما أن $\Delta\prec 0$ فإن المعادلة تقبل حلين عقديين مترافقين وهما : $\frac{6-6i}{2}=3-3i$ و $3+3i$.

أي : $S=\{3+3i\ ;\ 3-3i\}$

2.أ- لنكتب على الشكل المثلثي كلا من العددين $a=3+3i$ و $b=3-3i$:

لدينا $|a|=\sqrt{3^2+3^2}=3\sqrt{2}$

إذن : $a=3\sqrt{2}\left(\frac{3}{3\sqrt{2}}+i\frac{3}{3\sqrt{2}}\right)=3\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=3\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

وبما أن b مرافق a فإن : $b=3\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}-i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

2.ب- نبين أن لحق صورة B بالإزاحة التي متجهتها $\overrightarrow{OA}$ هو 6:

لدينا B' صورة B بالإزاحة التي متجهتها $\overrightarrow{OA}$

إذن :

$z_{B'}=z_B+z_{\overrightarrow{OA}}=3-3i+3+3i=6$

إذن لحق صورة B بالإزاحة التي متجهتها $\overrightarrow{OA}$ هو 6

2.ج) نبين أن : $\frac{b-b'}{a-b'}=i$

لدينا : $\frac{b-b'}{a-b'}=\frac{3-3i-6}{3+3i-6}=\frac{-3-3i}{-3+3i}=\frac{1+i}{1-i}=\frac{(1+i)^2}{1-i^2}=\frac{2i}{2}=i$

استنتاج :

لدينا : $\frac{b-b'}{a-b'}=i$

إذن : $\frac{b-b'}{a-b'}=\left[1,\frac{\pi}{2}\right]$

إذن : $\left|\frac{b-b'}{a-b'}\right|=1$ و $\arg\left(\frac{b-b'}{a-b'}\right)\equiv\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$

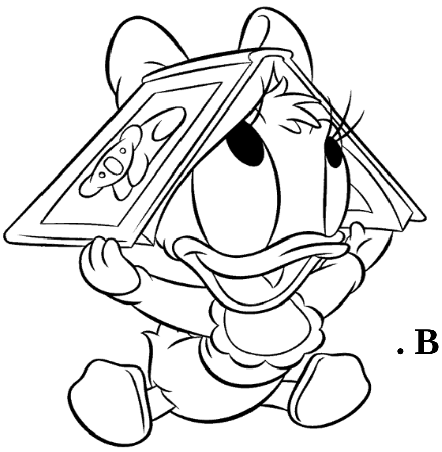
وبالتالي : $\frac{|b-b'|}{|a-b'|}=1$ و $\left(\overrightarrow{B'A},\overrightarrow{B'B}\right)\equiv\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$

ومنه: $\frac{B'B}{B'A}=1$ و $\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}\right)\equiv-\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$

وبالتالي : $B'B=B'A$ و $\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}\right)\equiv\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$.

وهذا يعني أن المثلث ’ABB متساوي الساقين وقائم الزاوية في ’B .

2.د.نستنتج أن الرباعي ’OABB مربع



http://www.vrac-coloriages.net

لدينا ’B صورة B بالإزاحة التي متجهتها $\overrightarrow{OA}$

الرباعي ’OABB متوازي الأضلاع .

وحيث أن المثلث ’ABB متساوي الساقين وقائم الزاوية في ’B فإن $B'B=B'A$

و $\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}\right)\equiv\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$

ومنه: الرباعي ’OABB مربع

===== يوليوز 2011 =====

التمرين الثالث :

1.أ. نبين أن $u_{n+1}-\frac{1}{3}=\frac{u_n-\frac{1}{3}}{1+15u_n}$ لكل n من N .

ليكن n من N ،

لدينا : $u_{n+1}-\frac{1}{3}=\frac{6u_n}{1+15u_n}-\frac{1}{3}=\frac{18u_n-1-15u_n}{3(1+15u_n)}=3\times\frac{u_n-\frac{1}{3}}{3\times(1+15u_n)}=\frac{u_n-\frac{1}{3}}{1+15u_n}$

1.ب: نبين بالترجع أن : $u_n\succ\frac{1}{3}$ لكل n من N .

من أجل $n=0$ لدينا : $u_0\succ\frac{1}{3}$ لأن $u_0=1$

ليكن n من N .

نفترض أن $u_n\succ\frac{1}{3}$.لنبين أن $u_{n+1}\succ\frac{1}{3}$

لدينا : $u_{n+1}-\frac{1}{3}=\frac{u_n-\frac{1}{3}}{1+15u_n}$

وبما أن $u_n\succ\frac{1}{3}$ فإن $u_n-\frac{1}{3}\succ 0$ و $1+15u_n\succ 0$ وبالتالي $\frac{u_n-\frac{1}{3}}{1+15u_n}\succ 0$. أي أن: $u_{n+1}\succ\frac{1}{3}$

ومنه حسب مبدأالترجع $u_n\succ\frac{1}{3}$ لكل n من N .

2.نبين أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{6}$:

ليكن n من N .لدينا :

$$v_{n+1}=1-\frac{1}{3u_{n+1}}=1-\frac{1}{3\times\frac{6u_n}{1+15u_n}}=1-\frac{1+15u_n}{18u_n}=\frac{3u_n-1}{18u_n}=\frac{1}{6}\times\frac{3u_n-1}{3u_n}=\frac{1}{6}\times\left(1-\frac{1}{3u_n}\right)=\frac{1}{6}\times v_n$$

وبالتالي : $v_{n+1}=\frac{1}{6}\times v_n$ لكل n من N .

ومنه المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{6}$

. نكتب v_n بدلالة n :

ليكن n من N . حسب صيغة الحد العام لمتتالية هندسية لدينا : $v_n=v_0\times\left(\frac{1}{6}\right)^n$

ولدينا : $v_0=1-\frac{1}{3u_0}=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$.

إذن : $v_n=\frac{2}{3}\times\left(\frac{1}{6}\right)^n$ لكل n من N .

3.نبين أن : $u_n=\dfrac{1}{3-2\left(\dfrac{1}{6}\right)^n}$ لكل n من N .

ليكن n من N .

لدينا : $v_n=1-\dfrac{1}{3u_n}$ إذن : $\dfrac{1}{3u_n}=1-v_n$ وبالتالي : $3u_n=\dfrac{1}{1-v_n}$ أي : $u_n=\dfrac{1}{3(1-v_n)}$.

ولدينا : $v_n=\dfrac{2}{3}\times\left(\dfrac{1}{6}\right)^n$ إذن : $u_n=\dfrac{1}{3\left(1-\dfrac{2}{3}\left(\dfrac{1}{6}\right)^n\right)}=\dfrac{1}{3-2\left(\dfrac{1}{6}\right)^n}$.

ومنه : $u_n=\dfrac{1}{3-2\left(\dfrac{1}{6}\right)^n}$ لكل n من N .

استنتاج :

لدينا : $-1\prec\dfrac{1}{6}\prec 1$ إذن : $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{6}\right)^n=0$

ومنه : $\lim u_n=\dfrac{1}{3}$

التمرين الرابع :

الجزء الأول :

نعتبر الدالة العددية g المعرفة بمايلي : $g(x)=x-1+\ln x$

1.أ. بين أن : $g'(x)=\dfrac{x+1}{x}$

ليكن x من المجال $]0;+\infty[$. لدينا : $g'(x)=1+\dfrac{1}{x}=\dfrac{x+1}{x}$

ب.نبين أن الدالة f تزايدية على المجال I .

لدينا x من المجال $]0;+\infty[$.

إذن : $\dfrac{x+1}{x}\succ 0$ ومنه : $g'(x)\succ 0$ لكل x من المجال $]0;+\infty[$.

ومنه : الدالة f تزايدية على المجال I .

الثقة في la confiance

2. استنتاج :

ليكن x من المجال $]0;+\infty[$ ،

إذا كان $x\geq 1$ فإن $g(x)\geq g(1)$ لأن g تزايدية على المجال $[1;+\infty[$.

وبالتالي : $g(x)\geq 0$

إذا كان $x\leq 1$ فإن $g(x)\leq g(1)$ لأن g تزايدية على المجال $]0;1]$.

وبالتالي : $g(x)\leq 0$

ومنه : $g(x)\geq 0$ لكل xمن المجال $[1;+\infty[$ و $g(x)\leq 0$ لكل من $]0;1]$.

الجزء الثاني :

1.نبين أن $\lim_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$

لدينا $\lim_{x\to 0^+} \frac{x-1}{x}=-\infty$ لأن $\lim_{x\to 0^+} x-1=-1$ و $\lim_{x\to 0^+} x=0^+$

ونعلم أن : $\lim_{x\to 0^+} \ln x=-\infty$

إذن : $\lim_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$

هندسيا : المستقيم الذي معادلته $x=0$ مقارب لمنحنى الدالة f .

ب. نبين أن : $\lim_{x\to +\infty} f(x)=+\infty$ و $\lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x}=0$

نعلم أن : $\lim_{x\to +\infty} \ln x=+\infty$

إذن : $\lim_{x\to +\infty} f(x)=+\infty$.

ولدينا : $\lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to +\infty} \frac{x-1}{x}\frac{\ln x}{x}=0$ لأن : $\lim_{x\to +\infty} \frac{x-1}{x}=\lim_{x\to +\infty} 1-\frac{1}{x}=1$ و $\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x}=0$.

استنتاج :

بما أن $\lim_{x\to +\infty} f(x)=+\infty$ و $\lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x}=0$

فإن منحنى الدالة f يقبل فرعا شلجميا في اتجاه محور الأفاصيل بجوار $(+\infty)$.

2.أ.

لكل x من المجال $]0;+\infty[$ لدينا :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{x-1}{x}\right)'\times \ln x+\frac{x-1}{x}(\ln x)' \\ &= \frac{(x-1)'x-(x-1)(x)'}{x^2}\times \ln x+\frac{x-1}{x}\times\frac{1}{x} \\ &= \frac{1}{x^2}\ln x+\frac{x-1}{x^2} \\ &= \frac{g(x)}{x^2} \end{aligned}$$

2.ب.

لدينا : $f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$ إذن : إشارة $f'(x)$ هي إشارة $g(x)$ على $]0;+\infty[$.

بما أن : $g(x)\geq 0$ لكل xمن المجال $[1;+\infty[$ فإن $f'(x)\geq 0$ لكل xمن المجال $[1;+\infty[$

وبالتالي : f تزايدية على المجال $[1;+\infty[$.

بما أن : $g(x)\leq 0$ لكل من $]0;1]$ فإن $f'(x)\leq 0$ لكل من $]0;1]$

وبالتالي : f تناقصية على المجال $]0;1]$.

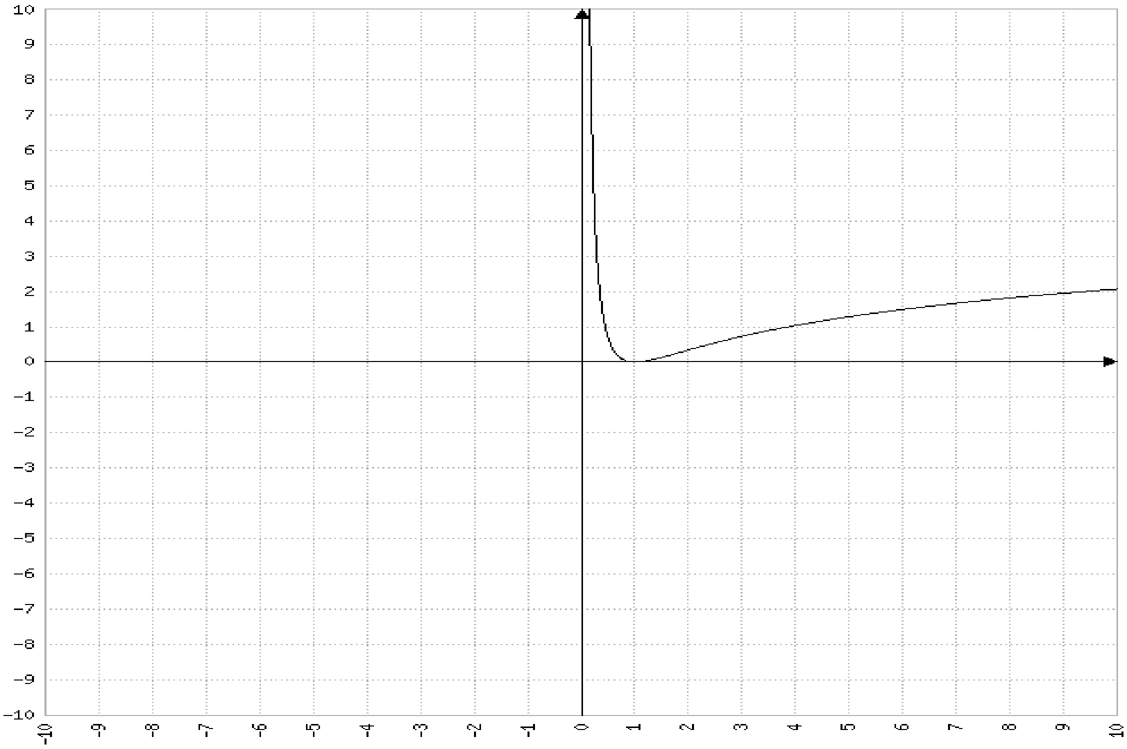
ومنه : f تزايدية على المجال $[1;+\infty[$ و تناقصية على المجال $]0;1]$.

2.ج.

جدول تغيرات f هو

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	-	0	+	
f	‖ $+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

3. إنشاء منحنى الدالة f :



4.أ. نبين أن الدالة H أصلية للدالة h على المجال I.

نعلم أن الدالة ln قابلة للإشتقاق على المجال $]0;+\infty[$.

إذن الدالة H قابلة للإشتقاق على $]0;+\infty[$ ولكل x من المجال $]0;+\infty[$ لدينا :

$$H'(x)=\frac{1}{2}\times 2(\ln x)\times(\ln x)'=(\ln x)\times\frac{1}{x}=\frac{\ln x}{x}$$

ومنه : الدالة H أصلية للدالة h على المجال I.

4.ب. نبين أن $\int_1^e \frac{\ln x}{x}dx=\frac{1}{2}$:

لدينا : $\int_1^e \frac{\ln x}{x}dx=\int_1^e \frac{1}{x}\ln x dx=\int_1^e(\ln x)'\times\ln x\, dx=\left[\frac{(\ln x)^2}{2}\right]_1^e=\frac{(\ln e)^2}{2}-\frac{(\ln 1)^2}{2}=\frac{1}{2}$

4.ج. نبين أن : $\int_1^e \ln x dx = 1$

نضع : $\begin{cases} u(x) = \ln x \\ v'(x) = 1 \end{cases}$ إذن : $\begin{cases} u'(x) = \frac{1}{x} \\ v'(x) = x \end{cases}$

ومنه : $\int_1^e \ln x dx = [x \ln x]_1^e - \int_1^e x \times \frac{1}{x} dx = e - [x]_1^e = e - (e-1) = 1$

5.أ.نتحقق أن $f(x) = \ln x - \frac{\ln x}{x}$

تحقق من أن $f(x) = \ln x - \frac{\ln x}{x}$ لكل x من $]0;+\infty[$.

ليكن x عنصرا من $]0;+\infty[$.

لدينا : $f(x) = \left(\frac{x-1}{x}\right)\ln x = \left(1 - \frac{1}{x}\right)\ln x = \ln x - \frac{\ln x}{x}$

ومنه لكل x من $]0;+\infty[$ لدينا : $f(x) = \ln x - \frac{\ln x}{x}$

5.ب. نبين ان مساحة حيز المستوى المحصور بين منحنى الدالة f ومحور الأفاصيل والمستقيمين المعرفين بالمعادلتين

التاليتين $x = 1$ و $x = e$ هي : $0,5\ cm^2$

مساحة حيز المستوى المحصور بين منحنى الدالة f ومحور الأفاصيل والمستقيمين المعرفين بالمعادلتين التاليتين $x = 1$ و $x = e$ هي :

$$s = \int_1^e f(x)\, dx\ ua = \int_1^e \ln x - \frac{\ln x}{x}\ dx\ ua = \int_1^e \ln x\ dx\ ua - \int_1^e \frac{\ln x}{x} dx\ ua = 1 - \frac{1}{2} cm^2 = 0,5\ cm^2$$

مع إكسيل لانرضى إلا بالتفوق والتميز

وماتوفيقي إلابالله