بسم الله الرحمن الرحيم

① نبين أن $x^2+y^2+z^2-2x+2y+1=0$ هي معادلة ديكارتية للكرة S

لدينا $x^2+y^2+z^2-2x+2y-1=0$

$\Rightarrow x^2-2x+y^2+2y+z^2-1=0$

$\Rightarrow (x-\frac{-2}{2})^2-(\frac{-2}{2})^2+(y+\frac{2}{2})^2-(\frac{2}{2})^2+(z-0)^2-1=0$

$\Rightarrow (x-1)^2+(y+1)^2+(z-0)^2-3=0$

$\Rightarrow (x-1)^2+(y+1)^2+(z-0)^2=3$

وبالتالي $x^2+y^2+z^2-2x+2y-1=0$ هي معادلة للكرة (S)

نتحقق أن $A\in(S)$

نعوض إحداثيات A في المعادلة الديكارتية للكرة (S)

$(0-1)^2+(0+1)^2+(1-0)^2=1+1+1=3$

بما أن إحداثيات النقطة A تحقق المعادلة الديكارتية للكرة (S) إذن $A\in(S)$

(ب) نبين أن $\vec{AB}\wedge\vec{AC}=\vec{i}-\vec{j}-\vec{k}$

$\vec{AB}\begin{pmatrix}x_B-x_A\\y_B-y_A\\z_B-z_A\end{pmatrix}\Rightarrow\vec{AB}\begin{pmatrix}1-0\\1-0\\1-1\end{pmatrix}\Rightarrow\vec{AB}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$

$\vec{AC}\begin{pmatrix}x_C-x_A\\y_C-y_A\\z_C-z_A\end{pmatrix}\Rightarrow\vec{AC}\begin{pmatrix}2-0\\1-0\\2-1\end{pmatrix}\Rightarrow\vec{AC}\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$

$\vec{AB}\wedge\vec{AC}=\begin{vmatrix}1&1\\0&1\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}1&2\\0&1\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}1&2\\1&1\end{vmatrix}\vec{k}$

$=(1\times1-0\times1)\vec{i}-(1\times1-0\times2)\vec{j}+(1\times1-1\times2)\vec{k}$

$=1\vec{i}-1\vec{j}-1\vec{k}$

$=\vec{i}-\vec{j}-\vec{k}$

إستنتاج أن $x-y-z+1=0$ معادلة ديكارتية للمستوى (ABC)

لدينا $\vec{AB}\wedge\vec{AC}\neq0$ و هي منظمية على كل من المتجهتين $\vec{AB}$ و $\vec{AC}$ إذن $\vec{AB}\wedge\vec{AC}$ هي منظمية على المستوى (ABC)

إذن معادلة الديكارتية (ABC) تكتب على الشكل

$x-y-z+d=0$

لتحديد d نعوض إحداثيات إحدى النقط A أو B أو C في هذه المعادلة

$0-0-1+d=0$

$\Rightarrow d=1$

إذن $x-y-z+1=0$ هي معادلة ديكارتية للمستوى (ABC)

(ب) نحسب $d(\Omega,(ABC))$

$d(\Omega,(ABC))=\frac{|1-(-1)-(0)+1|}{\sqrt{(1)^2+(-1)^2+(-1)^2}}$

$=\frac{3}{\sqrt{3}}=\frac{3\times\sqrt{3}}{\sqrt{3}\sqrt{3}}=\frac{3\sqrt{3}}{3}=\sqrt{3}$

وبما أن $d(\Omega,(ABC))=\sqrt{3}=R$ إذن $A\in(ABC)$ و $A\in(S)$

فإن المستوى (ABC) مماس للكرة (S) في النقطة A

(ج) لدينا $\Delta\perp(ABC)$ إذن المتجهة $\vec{AB}\wedge\vec{AC}(1,-1,-1)$ هي موجهة لـ Δ

وبما أن Δ مار من Ω فالتمثيل البارامتري لـ Δ هو

$\Delta:\begin{cases}x=1+t\\y=-1-t\\z=-t\end{cases}\quad(t\in\mathbb{R})$

(ب) استنتاج مثلوثي إحداثيات نقطتي تقاطع (Δ) و (S)

لدينا $(x-1)^2+(y+1)^2+(z-0)^2=3$ هي المعادلة الديكارتية للكرة (S) و

هو التمثيل البارامتري للمستقيم (Δ) $\begin{cases} x=1+t \\ y=-1-t \\ z=-t \end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$

نعوض هذا التمثيل البارامتري في المعادلة الديكارتية لـ (S) وذلك لتحديد t

$(1+t-1)^2+(-1-t+1)^2+(-t)^2=3$

$t^2+t^2+t^2=3 \Rightarrow 3t^2=3$

$\Rightarrow t^2=1$

يعني أن $t=-1$ أو $t=1$

إذن مثلوثي إحداثيات نقطتي تقاطع (Δ) و الكرة (S) هو على التوالي

$\begin{pmatrix}1+1\\-1-1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-2\\-1\end{pmatrix}$ و $\begin{pmatrix}1+(-1)\\-1-(-1)\\-(-1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

التمرين الثاني (الأعداد العقدية)

① نحل في $\mathbb{C}$ المعادلة $z^2-8z+25=0$

نحسب أولا المميز Δ

$\Delta=(-8)^2-4(1)(25)=64-100=-36$

لدينا $\Delta=-36<0$ إذن للمعادلة حلان عقديان مختلفان

$z_1=\frac{8+i\sqrt{36}}{2}=\frac{8+6i}{2}=4+3i$

$z_2=\frac{8-i\sqrt{36}}{2}=\frac{8+6i}{2}=4-3i$

إذن حلي المعادلة هما $4-3i$ و $4+3i$

A صورة D نبين أن لحق النقطة ② ⓕ

$d=10+9i$ هو T بالإزاحة

لدينا $\vec{BC}$ هي متجهة الإزاحة و D صورة A بهذه الإزاحة إذن هذه العبارة تحقق المتساوية التالية

$\vec{BC}=\vec{AD} \Rightarrow c-b=d-a$

$\Rightarrow d=c-b+a$

$=10+3i-4+3i+4+3i$

$=10+9i$

ⓑ نتحقق من أن $\frac{b-a}{d-a}=-\frac{1}{2}(1+i)$

$\frac{b-a}{d-a}=\frac{4+3i-4-3i}{10+9i-4-3i}=\frac{-6i}{6+6i}$

$=\frac{-6i(6-6i)}{(6+6i)(6-6i)}=\frac{-36i+36}{36+36}$

$=\frac{-36i+36}{72}=\frac{(-i+1)36}{2\times 36}=\frac{-1-i}{2}$

$\frac{b-a}{d-a}=-\frac{1}{2}(1+i)$

كتابة $-\frac{1}{2}(1+i)$ على الشكل المثلثي

$\left|-\frac{1}{2}(1+i)\right|=\left|-\frac{1}{2}\right|\times|1+i|$

$=\frac{1}{2}\times\sqrt{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\text{Arg}\left(-\frac{1}{2}(1+i)\right)=\text{Arg}\left(-\frac{1}{2}\right)+\text{Arg}(1+i)$

$-\frac{1}{2}\in\mathbb{R}^-$ و $\text{Arg}\left(-\frac{1}{2}\right)=\pi$

ليكن θ عمدة العدد العقدي $(1+i)$

$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ و $\sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$

إذن $\theta = \frac{\pi}{4}$

$\arg\left(-\frac{1}{2}(1+i)\right) = \frac{\pi}{4} + \pi = \frac{5\pi}{4}$

وبالتالي الشكل المثلثي للعدد $-\frac{1}{2}(1+i)$ هو

$\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$

ج) نبين أن $\left(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB}\right) = \frac{5\pi}{4}\ [2\pi]$

$\left(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB}\right) = \arg\left(\frac{z_B - z_A}{z_D - z_A}\right) = \arg\left(\frac{b-a}{d-a}\right)$

وحسب السؤال السابق $\arg\left(\frac{b-a}{d-a}\right) = \frac{5\pi}{4}$

وبالتالي $\left(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB}\right) = \frac{5\pi}{4}\ [2\pi]$

التمرين الثالث (المتتاليات العددية)

① $u_{n+1} - 1 = \frac{1}{5}u_n + \frac{4}{5} - 1$

$= \frac{1}{5}u_n + \frac{4}{5} - \frac{5}{5} = \frac{1}{5}u_n - \frac{1}{5}$

$= \frac{1}{5}(u_n - 1)$

② أ) من أجل $n=0$ لدينا $u_0 = 2 > 1$ عبارة صحيحة من أجل $n=0$

← نفترض أن $u_n > 1$ ونبرهن أن $u_{n+1} > 1$

لدينا $\frac{1}{5}u_n > \frac{1}{5} \iff u_n > 1$

$\frac{1}{5}u_n + \frac{4}{5} > \frac{1}{5} + \frac{4}{5} \iff$

$\frac{1}{5}u_n + \frac{4}{5} > 1 \iff$

$u_{n+1} > 1 \iff$

إذن حسب البرهان بالتراجع $u_n > 1$

ب) $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{5}u_n + \frac{4}{5} - u_n$

$= u_n\left(\frac{1}{5} - 1\right) + \frac{4}{5} = -\frac{4}{5}u_n + \frac{4}{5}$

$= -\frac{4}{5}(u_n - 1)$

لدينا $u_n > 1 \iff u_n - 1 > 0$

وبالتالي $-\frac{4}{5}(u_n - 1) < 0$ إذن u_n متتالية رتيبة تناقصية

ج) بما أن u_n متتالية رتيبة تناقصية حسب السؤال السابق

و u_n محصورة بـ 1 حسب السؤال أ) إذن هي متقاربة

③ أ) $v_n = u_n - 1$

$\Rightarrow v_{n+1} = u_{n+1} - 1 = \frac{1}{5}(u_n - 1)$

$v_{n+1} = \frac{1}{5}(u_n - 1)$

$v_{n+1} = \frac{1}{5}v_n$ إذن

وبالتالي v_n هندسية أساسها $\frac{1}{5}$

$v_n = q^{n-p}v_p = \left(\frac{1}{5}\right)^n \times v_0$

$v_0 = u_0 - 1 = 2 - 1 = 1$

$v_n = \left(\frac{1}{5}\right)^n$ إذن

ب) لدينا $v_n = u_n - 1$

$\Rightarrow v_n + 1 = u_n$

$v_n = \left(\frac{1}{5}\right)^n + 1$

التمرين الخامس (الدوال)

① ①
$(2x+1)(x-1) = 2x^2 - 2x + x - 1$
$= 2x^2 - x - 1$

② $g'(x) = (x^2 - x - \ln(x))'$
$= (x^2)' - (x)' - (\ln(x))'$
$= 2x - 1 - \frac{1}{x} = \frac{2x^2 - x - 1}{x}$

إشارة $g'(x)$ من إشارة $2x^2 - x - 1$ لأن $x > 0$ $(\forall x \in]0, +\infty[)$

إشارة $2x^2 - x - 1$ من إشارة $x - 1$ لأن $2x^2 - x - 1 = (2x+1)(x-1)$

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$-$	0	$+$	

جدول إشارة $g'(x)$ ومنه حلل الدالة g تناقصية على $]0, 1]$ وتزايدية على $[1, +\infty[$

② وضع جدول تغيرات g

x	0		1		$+\infty$
$g(x)$	‖	$\searrow$	0	$\nearrow$	

بما أن 0 قيمة دنيا للدالة g فإن $g(x) \geqslant 0$

II ① ① $f(x) = x^2 - 1 - (\ln(x))^2$

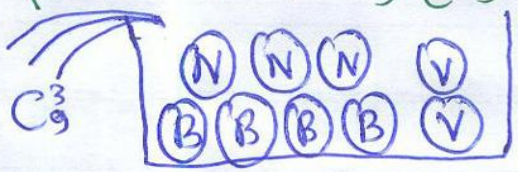
$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} x^2 - 1 - (\ln(x))^2 = -\infty$

(لأن $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} x^2 = 0$ و $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} -\ln^2(x) = -\infty$)

$\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = \lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^n + 1 = 1$

$\left(-1 < \frac{1}{5} < 1 \text{ لأن } \lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^n = 0\right)$

التمرين الرابع (حساب الاحتمالات)



① $P(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{C_4^3 + C_3^3}{C_9^3} = \frac{4+1}{84}$

$P(A) = \frac{5}{84}$

$P(B) = \frac{\text{Card}(B)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{C_4^1 \times C_3^1 \times C_2^1}{C_9^3} = \frac{4 \times 3 \times 2}{84}$

$P(B) = \frac{24}{84} = \frac{2}{7}$

② لدينا 3 بيدقات سوداء و 6 بيضاء

الحالات الممكنة

NNN و $NN\bar{N}$ و $N\bar{N}\bar{N}$ و $\bar{N}\bar{N}\bar{N}$

$x = 3$ $x = 2$ $x = 1$ $x = 0$

③ $P(X=1) = \frac{C_3^1 \times C_6^2}{C_9^3} = \frac{3 * 15}{84} = \frac{45}{84}$

$P(X=1) = \frac{45}{84} = \frac{15}{28}$

$P(X=2) = \frac{C_3^2 \times C_6^1}{C_9^3} = \frac{3 \times 6}{84} = \frac{18}{84}$

$P(X=2) = \frac{18}{84} = \frac{3}{14}$

ج) قانون إحتمال X

x	0	1	2	3	$\sum$
$P(x)$	$\frac{5}{21}$	$\frac{15}{28}$	$\frac{3}{14}$	$\frac{1}{84}$	1

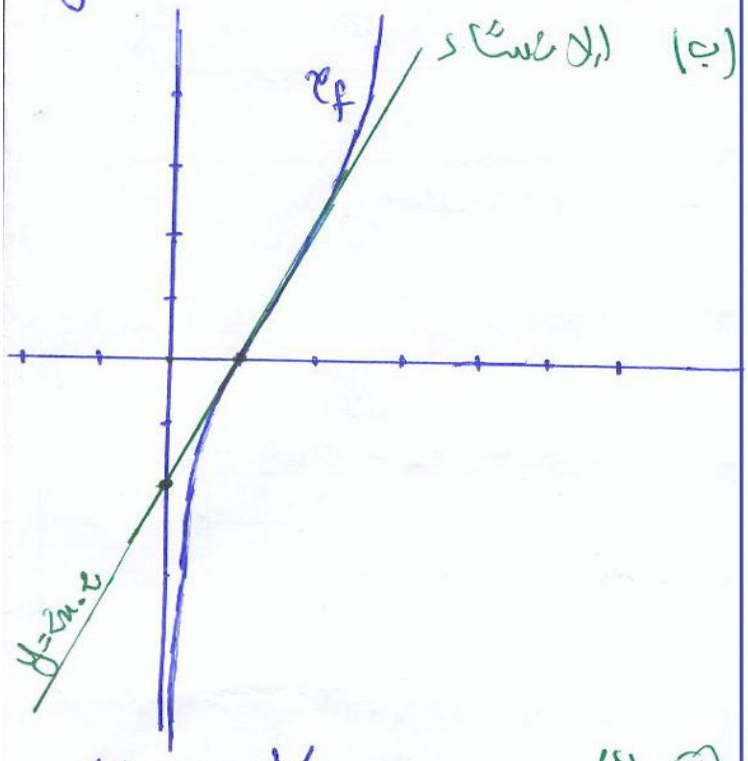
$P(X=0) = \frac{C_6^3}{84} =$ $P(X=3) = \frac{C_3^3}{84} = \frac{1}{84}$

③ (أ) معادلة المماس عند النقطة $A(1,0)$

$y = f'(1)(x-1) + f(1)$

$y = 2(x-1) + 0 = 2x - 2$

(ب) الإنشاء



④ (أ)

$x(\ln(x)-1)' = (x)'(\ln(x)-1) + x(\ln(x)-1)'$

$= \ln(x) - 1 + x \times \frac{1}{x}$

$= \ln(x) - 1 + 1 = \ln(x)$

وبالتالي $x(\ln(x)-1)$ دالة أصلية لـ $\ln(x)$

$\int_1^e \ln(x)\,dx = \left[x(\ln(x)-1)\right]_1^e$

$= e(\ln(e)-1) - 1(\ln(1)-1)$

$= e \times 0 - 1 \times -1 = 1$

(ب) نضع $u(x) = \ln(x) \Leftarrow u'(x) = \frac{1}{x}$

$v(x) = x(\ln(x)-1)$ $v'(x) = \ln(x)$ و

$\lim_{x \to 0, x>0} f(x) = -\infty$ لدينا C_f يقبل

$-\infty$ كما يقبل مستقيم مقارب معادلته

(ب) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} x^2 - 1 - (\ln x)^2$

$= \lim_{x \to +\infty} x^2\left(1 - \frac{1}{x^2} - \left(\frac{\ln(x)}{x}\right)^2\right)$

بما أن $\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{\ln(x)}{x}\right)^2 = 0$ و $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ إذن

$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 - 1 - \ln^2(x)}{x}$

$= \lim_{x \to +\infty} x - \frac{1}{x} - \frac{\ln^2(x)}{x} = +\infty$

$\left(\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln^2(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} x\left(\frac{\ln(x)}{x}\right)^2 = 0\right)$ (لأن)

(ج) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ } يقبل C_f فرع شلجمي في اتجاه محور الأراتيب بجوار $+\infty$

② (أ) $f'(x) = \left(x^2 - 1 - (\ln(x))^2\right)'$

$= 2x - 2 \times \frac{1}{x} \times \ln(x) = 2x - 2\frac{\ln(x)}{x}$

$= 2\left(x - \frac{\ln(x)}{x}\right) = 2\left(\frac{x^2 - \ln(x)}{x}\right)$

(ب) $\frac{g(x)}{x} + 1 = \frac{x^2 - x - \ln(x)}{x} + 1$

$= \frac{x^2 - x - \ln(x) + x}{x} = \frac{x^2 - \ln(x)}{x}$

لدينا $g(x) \geq 0$ و حسب السؤال 2 (أ) و $x > 0$ و

$\forall x \in]0,+\infty[$ لدينا $f'(x)$ من إشارة $g(x)$ على $]0,+\infty[$

$$\int_1^e (\ln(x))^2 dx$$

$$= \left[\ln(x) \times x(\ln(x)-1)\right]_1^e - \int_1^e \frac{1}{x} \times x(\ln(x)-1)dx$$

$$= \left[x\ln^2(x) - x\ln(x)\right]_1^e - \int_1^e \ln(x) - 1 \, dx$$

$$= \left[x\ln^2(x) - x\ln(x)\right]_1^e - \left(\int_1^e \ln(x)\,dx - \int_1^e 1\,dx\right)$$

$$= e - e - 0 - \left(1 - [x]_1^e\right)$$

$$= 0 - (1 - (e-1))$$

$$= -(1 - e + 1) = e - 2$$

ج) مساحة الحيز المحصور بين C_f ومحور الفواصل و $x=1$ و $x=e$

$$\int_1^e |f(x)|\,dx = \int_1^e f(x)\,dx \; cm^2$$

(C_f فوق محور الفواصل على $[1,e]$)

$$\int_1^e f(x)\,dx = \int_1^e x^2 - 1 - \ln^2(x)\,dx \; cm^2$$

$$= \int_1^e x^2\,dx - \int_1^e 1\,dx - \int_1^e \ln^2(x)\,dx \; cm^2$$

$$= \left[\frac{1}{3}x^3\right]_1^e - [x]_1^e - e + 2 \; cm^2$$

$$= \frac{1}{3}e^3 - \frac{1}{3} - (e-1) - e + 2 \; cm^2$$

$$= \frac{1}{3}e^3 - \frac{1}{3} - e + 1 - e + 2 \; cm^2$$

$$= \frac{1}{3}e^3 - 2e - \frac{1}{3} + 3 \; cm^2$$

$$= \frac{1}{3}e^3 - 2e - \frac{-1+9}{3} \; cm^2$$

$$= \frac{1}{3}e^3 - 2e + \frac{8}{3}$$

$$= \frac{1}{3}\left(e^3 - 6e + 8\right) \; cm^2$$

تم التصحيح بواسطة
القاضي عبد الحميد

OULKHADIWEB@GMAIL.COM للتواصل
www.FB.com/OAH208
+212 603673001 الهاتف