التمرين الاول

$n\in\mathbb{N}^*;a_n=\underbrace{333...3}_{n\times}1$

1) لنتحقق من أن a_1 و a_2 أوليان

لدينا $a_1=31$ و 31 عدد أولي

لدينا $a_2=331$ و 331 لا يقبل القسمة على الأعداد الأولية التي مربعها أصغر منه أي (2 – 3 – 5 – 7 – 11 – 13 و17)

إذن 331 عدد أولي

$\boxed{a_1 \text{ و } a_2 \text{ عددان أوليان}}$

2) لنبين أن $(\forall n\in\mathbb{N}^*);3a_n+7=10^{n+1}$

لدينا : $(\forall n\in\mathbb{N}^*);a_n=1+3\times10+3\times10^2+...+3\times10^n=1+3\left(10+10^2+...+10^n\right)$

و $(\forall n\in\mathbb{N}^*);10+10^2+...+10^n=10\times\dfrac{1-10^n}{1-10}=\dfrac{10^{n+1}-10}{9}$ إذن $(\forall n\in\mathbb{N}^*);a_n=1+\dfrac{10^{n+1}-10}{3}=\dfrac{10^{n+1}-7}{3}$

و منه $(\forall n\in\mathbb{N}^*);3a_n+7=10^{n+1}$

$\boxed{(\forall n\in\mathbb{N}^*);3a_n+7=10^{n+1}}$

3) لنبين أن $(\forall k\in\mathbb{N});10^{30k+2}\equiv7[31]$

لدينا حسب 2) $10^2-7=3\times31$ إذن $10^2\equiv7[31]$

و لدينا $10^2\equiv7[31]\Rightarrow10^3\equiv70\equiv8[31]\Rightarrow10^6\equiv64\equiv2[31]\Rightarrow10^{30}\equiv32\equiv1[31]\Rightarrow10^{30k}\equiv1[31]$

و أخيرا $\begin{cases}10^2\equiv7[31]\\10^{30k}\equiv1[31]\end{cases}\Rightarrow10^{30k+2}\equiv7[31]$

$\boxed{(\forall k\in\mathbb{N});10^{30k+2}\equiv7[31]}$

4) لنبين أن $(\forall n\in\mathbb{N});3a_{30k+1}\equiv0[31]$ ثم لنستنتج أن 31 يقسم a_{30k+1}

لكل k من $\mathbb{N}$, $30k+1\in\mathbb{N}^*$ إذن حسب 2) $3a_{30k+1}+7=10^{30k+2}$ و حسب 3) $10^{30k+2}\equiv7[31]$

إذن $3a_{30k+1}+7\equiv7[31]$ و منه $3a_{30k+1}\equiv0[31]$

و بما أن 31 يقسم $3a_{30k+1}$ و $31\wedge3=1$ فإن حسب مبرهنة كوص 31 يقسم a_{30k+1}

$\boxed{(\forall n\in\mathbb{N});3a_{30k+1}\equiv0[31] \quad \text{31 يقسم } a_{30k+1}}$

5) لنبين أن المعادلة $a_nx+31y=1$ لا تقبل حلول في $\mathbb{Z}^2$

لدينا $(n\in\mathbb{N}^*);n\equiv1[30]\Rightarrow\exists k\in\mathbb{N}^*;n=30k+1$

و منه حسب السؤال 4) 31 يقسم a_n أي أن $a_n\wedge31=31$ و هذا يعني ان المعادلة $a_nx+31y=1$ لا تقبل حلول في $\mathbb{Z}^2$

(الشرط اللازم لكي تقبل هذه المعادلة حلول في $\mathbb{Z}^2$ هو $a_n\wedge31=1$)

$\boxed{\text{المعادلة } a_nx+31y=1 \text{ لا تقبل حلول في } \mathbb{Z}^2}$

Ammarimaths

التمرين الثاني

$$\forall(a,b)\in\mathbb{R}^2;M(a,b)=\begin{pmatrix}a & a-b\\ b & a+b\end{pmatrix}$$ و $$E=\left\{M(a,b)/(a;b)\in\mathbb{R}^2\right\}$$

1) لنبين أن E زمرة جزئية للزمرة $(M_2(\mathbb{R}),+)$

$$\bullet I=M(1,0)\in E\Rightarrow E\neq\varnothing$$

$$\bullet\left(\forall(M(a,b),M(c,d))\in E^2\right);M(a,b)-M(c,d)=\begin{pmatrix}a & a-b\\ b & a+b\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}c & c-d\\ d & c+d\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}a-c & a-b-c+d\\ b-d & a+b-c-d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a-c & (a-c)-(b-d)\\ b-d & (a-c)+(b-d)\end{pmatrix}=M(a-c,b-d)\in E$$

و منه حسب الخاصية المميزة للزمرة الجزئية نستنتج أن :

$$\boxed{E \text{ زمرة جزئية للزمرة } (M_2(\mathbb{R}),+)}$$

2) لدينا $J^2=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ و $1+0\neq 2$ إذن $J=M(1,0)\in E$ و $J^2\notin E$ نستنتج أن :

$$\boxed{E \text{ جزء غير مستقر من } (M_2(\mathbb{R}),\times)}$$

3) أ) لنبين أن φ تشاكل من $(\mathbb{C}^*,\times)$ نحو $(M_2(\mathbb{R}),*)$

لدينا

$$\left(\forall((a,b),(c,d))\in\left(\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}\right)^2\right);\varphi((a+bi)\times(c+di))=\varphi(ac-bd+i(ad+bc))=M(ac-bd,ad+bc)$$

و لدينا

$$\varphi(a+bi)*\varphi(c+di)=M(a,b)*M(c,d)=\begin{pmatrix}a & a-b\\ b & a+b\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}c & c-d\\ d & c+d\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}a & -b\\ b & a\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}c & c-d\\ d & c+d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ac-bd & ac-ad-bc-bd\\ ad+bc & bc-bd+ac+ad\end{pmatrix}=M(ac-bd,ad+bc)$$

إذن $\left(\forall((a,b),(c,d))\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}\right);\varphi((a+bi)\times(c+di))=\varphi(a+bi)*\varphi(c+di)$

و منه

$$\boxed{\varphi \text{ تشاكل من } (\mathbb{C}^*,\times) \text{ نحو } (M_2(\mathbb{R}),*)}$$

ب) لنبين أن $\varphi(\mathbb{C}^*)=E^*$ حيث $E^*=E\setminus\{O\}$

لدينا: $M(a,b)\in E^*\Leftrightarrow(a,b)\neq(0,0)\Leftrightarrow a+bi\in\mathbb{C}^*\Leftrightarrow\varphi(a+bi)\in\varphi(\mathbb{C}^*)\Leftrightarrow M(a,b)\in\varphi(\mathbb{C}^*)$

إذن $M(a,b)\in E^*\Leftrightarrow M(a,b)\in\varphi(\mathbb{C}^*)$ و منه :

$$\boxed{\varphi(\mathbb{C}^*)=E^*}$$

ج) لنبين أن $(E^*,*)$ زمرة تبادلية

لدينا $(\mathbb{C}^*,\times)$ زمرة تبادلية و φ تشاكل من $(\mathbb{C}^*,\times)$ نحو $(M_2(\mathbb{R}),*)$ إذن $(\varphi(\mathbb{C}^*),*)$ زمرة تبادلية و لدينا $\varphi(\mathbb{C}^*)=E^*$

Ammarimaths

نستنتج أن

$\boxed{\left(E^{*},*\right) \text{ زمرة تبادلية}}$

4) لدينا $\left(\forall(A,B,C)\in E^{3}\right), A*(B+C)=A\times N\times(B+C)=A\times N\times B+A\times N\times C=A*B+A*C$

إذن

$\boxed{\left(\forall(A,B,C)\in E^{3}\right), A*(B+C)=A*B+A*C}$

5) لنستنتج مما سبق أن $(E,+,*)$ جسم تبادلي.

لدينا حسب 1) $(E,+)$ زمرة وحدتها O و لدينا حسب 3) ج) $\left(E^{*},*\right)$ زمرة تبادلية كما لدينا حسب 4) القانون $*$ توزيعي على القانون $+$

نستنتج أن

$\boxed{(E,+,*) \text{ جسم تبادلي}}$

التمرين الثالث

1) أ) لنتحقق من أن مميز المعادلة (E) هو $\Delta=\left(\sqrt{2}ie^{i\theta}\right)^{2}$

لدينا : $(E): z^{2}-\sqrt{2}ie^{i\theta}z+e^{2i\theta}=0$ إذن $\Delta=\left(\sqrt{2}e^{i\theta}\right)^{2}-4e^{2i\theta}=2e^{2i\theta}-4e^{2i\theta}=-2e^{2i\theta}=\left(\sqrt{2}ie^{i\theta}\right)^{2}$

و منه

$\boxed{\Delta=\left(\sqrt{2}ie^{i\theta}\right)^{2}}$

ب) لنكتب الحلين z_1 و z_2 على الشكل المثلثي

بما أن $\Delta\neq 0$ فإن للمعادلة (E) حلين مختلفين هما : $z_{1}=\dfrac{\sqrt{2}e^{i\theta}-\sqrt{2}ie^{i\theta}}{2}=\left[1,-\dfrac{\pi}{4}\right]\times[1,\theta]=\left[1,\theta-\dfrac{\pi}{4}\right]$

و $z_{2}=\dfrac{\sqrt{2}e^{i\theta}+\sqrt{2}ie^{i\theta}}{2}=\left[1,\dfrac{\pi}{4}\right]\times[1,\theta]=\left[1,\theta+\dfrac{\pi}{4}\right]$ و منه

$\boxed{z_{1}=\left[1,\dfrac{\pi}{4}-\theta\right] \quad \text{و} \quad z_{2}=\left[1,\dfrac{\pi}{4}+\theta\right]}$

2) أ) لنبين أن المستقيمين (OA) و (T_1T_2) متعامدان :

لدينا $\left(\overline{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{T_1T_2}}\right)\equiv Arg\left(\dfrac{aff\left(\overrightarrow{T_1T_2}\right)}{aff\left(\overrightarrow{OA}\right)}\right)\equiv(2\pi)$ و $\dfrac{e^{i\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)}-e^{i\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)}}{\sqrt{2}e^{i\theta}}=\dfrac{-2i\sin\frac{\pi}{4}}{\sqrt{2}}=-i=\left[1,-\dfrac{\pi}{2}\right]$

إذن $\left(\overline{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{T_1T_2}}\right)\equiv-\dfrac{\pi}{2}(2\pi)$ أي أن $\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{T_1T_2}$ و منه

$\boxed{\text{المستقيمين } (OA) \text{ و } (T_1T_2) \text{ متعامدين}}$

ب) لنبين أن النقط O, A و K مستقيمية

لدينا $\left(\overline{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OK}}\right)\equiv Arg\left(\dfrac{aff\left(\overrightarrow{OK}\right)}{aff\left(\overrightarrow{OA}\right)}\right)(2\pi)$ و $\dfrac{aff\left(\overrightarrow{OK}\right)}{aff\left(\overrightarrow{OA}\right)}=\dfrac{e^{i\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)}+e^{i\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)}}{2\sqrt{2}e^{i\theta}}=\dfrac{\cos\frac{\pi}{4}}{\sqrt{2}}=\dfrac{1}{2}=\left[\dfrac{1}{2},0\right]$

إذن $\left(\overline{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OK}}\right)\equiv 0(2\pi)$ إي أن المتجهتين $\overrightarrow{OA}$ و $\overrightarrow{OK}$ مستقيميتين و منه

$\boxed{\text{النقط } O \text{ و } A \text{ و } K \text{ مستقيمية}}$

ج) لنستنتج أن المستقيم (OA) هو واسط القطعة $[T_1T_2]$

لدينا (OA) عمودي على (T_1T_2) و لدينا K منتصف القطعة $[T_1T_2]$ و $K\in(OA)$
نستنتج أن

$$\boxed{(OA)\ \text{هو واسط القطعة}\ [T_1T_2]}$$

3) أ) الصيغة العقدية للدوران r

لدينا $z'-e^{i\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)}=e^{i\frac{\pi}{2}}\left(z-e^{i\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)}\right)$ يكافئ $z'=iz+e^{i\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)}+e^{i\left(\theta+\frac{3\pi}{4}\right)}$ يكافئ $z'=iz+\sqrt{2}e^{i\theta}$

الصيغة العقدية للدوران r هي

$$\boxed{z'=iz+\sqrt{2}e^{i\theta}}$$

ب) لنتحقق من أن لحق النقطة B صورة النقطة I بالدوران r هو $b=\sqrt{2}e^{i\theta}+1$

لدينا $b=i\times1+\sqrt{2}e^{i\theta}=\sqrt{2}e^{i\theta}+i$ و منه

$$\boxed{b=\sqrt{2}e^{i\theta}+1}$$

ج) لدينا $\overline{\left(\overrightarrow{IJ},\overrightarrow{AB}\right)}\equiv Arg\left(\dfrac{aff\left(\overrightarrow{AB}\right)}{aff\left(\overrightarrow{IJ}\right)}\right)(2\pi)$ و $\dfrac{b-\sqrt{2}e^{i\theta}}{-2}=\dfrac{-i}{2}=\left[\dfrac{1}{2},-\dfrac{\pi}{2}\right]$

إذن $\overline{\left(\overrightarrow{IJ},\overrightarrow{AB}\right)}\equiv-\dfrac{\pi}{2}(2\pi)$ إي أن و بالتالي

$$\boxed{\text{المستقيمين}\ (AB)\ \text{و}\ (IJ)\ \text{متعامدين}}$$

4) لدينا $t_{-\vec{v}}(A)=C\Leftrightarrow\overrightarrow{AC}=-\vec{v}\Leftrightarrow z_C-\sqrt{2}e^{i\theta}=-i\Leftrightarrow z_C=-i+\sqrt{2}e^{i\theta}$

و منه لحق النقطة C صورة النقطة A بالإزاحة ذات المتجهة $-\vec{v}$ هو

$$\boxed{z_C=-i+\sqrt{2}e^{i\theta}}$$

5) لدينا $\dfrac{z_C+z_B}{2}=\dfrac{-i+\sqrt{2}e^{i\theta}+i+\sqrt{2}e^{i\theta}}{2}=\sqrt{2}e^{i\theta}=z_A$

إذن

$$\boxed{A\ \text{هي منتصف القطعة}\ [BC]}$$

التمرين الرابع

I) f الدالة المعرفة على $[0,+\infty[$ كما يلي : $\begin{cases}f(x)=\dfrac{-x\ln x}{1+x^2};x>0\\ f(0)=0\end{cases}$

1) أ) الدالة $\ln$ متصلة على $]0,+\infty[$ و الدالة $x\mapsto\dfrac{-x}{1+x^2}$ متصلة على $\mathbb{R}$ (دالة جدرية معرفة على $\mathbb{R}$) و بالخصوص على $]0,+\infty[$

إذن الدالة f متصلة على $]0,+\infty[$ (جداء دالتين متصلتين)

لندرس اتصال f على اليمين في 0 : $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{-x\ln x}{1+x^2}=0=f(0)$ (لأن $\lim\limits_{x\to0^+}x\ln x=0$)

إذن f متصلة على يمين 0

f متصلة على $]0,+\infty[$ و متصلة على يمين 0 نستنتج أن

$\boxed{f \text{ متصلة على المجال } [0,+\infty[}$

ب) لندرس إشارة f على المجال $[0,+\infty[$

لدينا $f(0)=0$ و لكل $x>0$ إشارة $f(x)$ هي عكس إشارة $\ln x$ ومنه جدول إشارة $f(x)$ كما يلي:

x	0		1		$+\infty$
$\ln x$	||	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$+$	0	$-$	

2) أ) لدينا :

$$(\forall x\in \mathbb{R}_+^*);\ f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{-\frac{1}{x}\ln\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x^2}}=\frac{\ln x}{x+\frac{1}{x}}=\frac{x\ln x}{x^2+1}=-f(x)$$

ومنه

$$\boxed{(\forall x\in \mathbb{R}_+^*);\ f\left(\frac{1}{x}\right)=-f(x)}$$

ب) لنبين أن الدالة f قابلة للإشتقاق على $]0,+\infty[$

الدالة $\ln$ قابلة للإشتقاق على $]0,+\infty[$ و الدالة $x\mapsto \frac{-x}{1+x^2}$ قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و بالخصوص على $]0,+\infty[$

إذن الدالة f قابلة للإشتقاق على $]0,+\infty[$ (كجداء دالتين قابلتين للإشتقاق على هذا المجال)

ج) لنبين أنه يوجد α من المجال $]0,1[$ يحقق $f'(\alpha)=0$

الدالة f متصلة على المجال $[0,1]$ و قابلة للإشتقاق على المجال $]0,1[$ وتحقق $f(0)=f(1)$ إذن حسب مبرهنة رول يوجد على الأقل عنصر α من المجال $]0,1[$ يحقق $f'(\alpha)=0$ إذن

$$\boxed{(\exists \alpha\in]0,1[);\ f'(\alpha)=0}$$

د) لنستنتج أن $f'\left(\frac{1}{\alpha}\right)=0$

بما أن $\alpha\in]0,1[$ فإن $\frac{1}{\alpha}\in]1,+\infty[$ إذن f قابلة للاشتقاق عند $\frac{1}{\alpha}$

ولدينا حسب 2) أ) $(\forall x\in \mathbb{R}^*),\ f(x)=-f\left(\frac{1}{x}\right)$ نستنتج أن $(\forall x\in \mathbb{R}^*),\ f'(x)=-f'\left(\frac{1}{x}\right)\times\frac{-1}{x^2}$

و منه $(\forall x\in \mathbb{R}^*),\ f'\left(\frac{1}{x}\right)=f'(x)\times\frac{1}{x^2}$ إذن $f'(\alpha)=0$ $f'\left(\frac{1}{\alpha}\right)=\frac{1}{\alpha^2}$

و منه

$$\boxed{f'\left(\frac{1}{\alpha}\right)=0}$$

II) F دالة معرفة على المجال $[0,+\infty[$ ب: $F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$ و (C) مبيانها في معلم متعامد ممنظم.

1) أ) لنتحقق من أن $\left(\forall t\in[1,+\infty[\right);\frac{1}{2}\leq\frac{t^2}{1+t^2}\leq 1$

لدينا $\left(\forall t\in[1,+\infty[\right);0\leq 1\leq t^2\Rightarrow t^2\leq 1+t^2\leq 2t^2\Rightarrow\frac{1}{2}\leq\frac{t^2}{1+t^2}\leq 1$

و منه

$$\boxed{\left(\forall t\in[1,+\infty[\right);\frac{1}{2}\leq\frac{t^2}{1+t^2}\leq 1}$$

ب) لنبين أن $\left(\forall x\in[1,+\infty[\right),F(1)-\frac{1}{2}(\ln x)^2\leq F(x)\leq F(1)-\frac{1}{4}(\ln x)^2$

انطلاقا من المتفاوتة المزدوجة السابقة لدينا الاستلزامات المتوالية التالية:

$$\left(\forall t\in[1,+\infty[\right);\left(\frac{1}{2}\leq\frac{t^2}{1+t^2}\leq 1\right)\overset{\left(\frac{\ln t}{t}>0\right)}{\Rightarrow}\left(\frac{1}{2}\frac{\ln t}{t}\leq\frac{t\ln t}{1+t^2}\leq\frac{\ln t}{t}\right)\overset{(x\geq 1)}{\Rightarrow}\left(\int_1^x\frac{1}{2}\frac{\ln t}{t}dt\leq\int_1^x\frac{t\ln t}{1+t^2}dt\leq\int_1^x\frac{\ln t}{t}dt\right)$$

و حيث أن $\int_1^x\frac{\ln t}{t}dt=\left[\frac{(\ln t)^2}{2}\right]_1^x=\frac{(\ln x)^2}{2}$ فإن $\left(\forall t\in[1,+\infty[\right);-\frac{(\ln x)^2}{2}\leq-\int_1^x\frac{t\ln t}{1+t^2}dt\leq-\frac{(\ln x)^2}{4}$

وبعد إضافة $F(1)$ إلى أطراف المتفاوتة المزدوجة الأخيرة نحصل على

$$\left(\forall t\in[1,+\infty[\right);\mathrm{F}(1)-\frac{(\ln x)^2}{2}\leq F(1)-\int_1^x\frac{t\ln t}{1+t^2}dt\leq F(1)-\frac{(\ln x)^2}{4}$$

و بملاحظة أن $F(1)-\int_1^x\frac{t\ln t}{1+t^2}dt=\int_0^1 f(t)dt+\int_1^x f(t)dt=\int_0^x f(t)dt=F(x)$ نحصل على المطلوب:

$$\boxed{\left(\forall x\in[1,+\infty[\right),F(1)-\frac{1}{2}(\ln x)^2\leq F(x)\leq F(1)-\frac{1}{4}(\ln x)^2}$$

ج) الحساب و التأويل الهندسي للنهايتين $\lim_{x\to+\infty}F(x)$ و $\lim_{x\to+\infty}\frac{F(x)}{x}$

لدينا حسب خاصيات النهايات و الترتيب

$$\begin{cases}\left(\forall x\in[1,+\infty[\right),F(x)\leq F(1)-\frac{1}{4}(\ln x)^2\\ \lim_{x\to+\infty}F(1)-\frac{1}{4}(\ln x)^2=-\infty\end{cases}\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}F(x)=-\infty$$

$$\begin{cases}\left(\forall x\in[1,+\infty[\right),\frac{F(1)}{x}-\frac{1}{2}\frac{(\ln x)^2}{x}\leq\frac{F(x)}{x}\leq\frac{F(1)}{x}-\frac{1}{4}\frac{(\ln x)^2}{x}\\ \lim_{x\to+\infty}\frac{F(1)}{x}-\frac{1}{2}\frac{(\ln x)^2}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{F(1)}{x}-\frac{1}{4}\frac{(\ln x)^2}{x}=0\end{cases}\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}\frac{F(x)}{x}=0$$

خلاصة

$\boxed{\lim_{x\to+\infty}F(x)=-\infty}$ و $\lim_{x\to+\infty}\frac{F(x)}{x}=0$ إذن (C) يقبل فرعا شلجميا في إتجاه محور الأفاصيل بجوار $+\infty$

Ammarimaths

2) أ) قابلية اشتقاق الدالة F على المجال $[0,+\infty[$ و حساب F'

بما أن f متصلة على المجال $[0,+\infty[$ فإن F هي أصليتها التي تنعدم عند 0 و منه F قابلة للاشتقاق على المجال $[0,+\infty[$

و لدينا $\left(\forall x\in[0,+\infty[\right);F'(x)=f(x)$

$$\boxed{F \text{ قابلة للاشتقاق على المجال } [0,+\infty[\text{ و لدينا } \left(\forall x\in[0,+\infty[\right);F'(x)=f(x)}$$

ب) نعلم حسب 1) أ) من الجزء الأول أن $f(x)>0$ على المجال $]0,1[$ و $f(x)<0$ على المجال $]1,+\infty[$

إذن جدول تغيرات الدالة F كما يلي

x	0		1		$+\infty$
$F(x)$	0	$\nearrow$	$F(1)$	$\searrow$	$-\infty$

III) 1) أ) لنبين أن $\left(\forall t\in\left]0,+\infty\right[\right);-t\ln t\le\frac{1}{e}$

نضع $\left(\forall t\in]0,+\infty[\right);\varphi(t)=1+e.t\ln t$

لدينا $\lim_{t\to+\infty}\varphi(t)=+\infty$ و $\lim_{t\to0^+}\varphi(t)=1$ و $\left(\forall t\in]0,+\infty[\right);\varphi'(t)=e.(\ln t+1)$

إذن جدول تغيرات الدالة φ كما يلي

x	0		$1/e$		$+\infty$
$\varphi(x)$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

من جدول تغيرات الدالة φ نستنتج أن $\left(\forall t\in]0,+\infty[\right);\varphi(t)\ge0$

$$\boxed{\left(\forall t\in]0,+\infty[\right);-t\ln t\le\frac{1}{e}}$$

ب) لنبين أن : $\left(\forall t\in[0,+\infty[\right);f(t)\le\frac{1}{e}$

إذا كان $t\ge1$ فإن $\left(\frac{-t\ln t}{1+t^2}\le0<\frac{1}{e}\right)$ و إذا كان $0<t<1$ فإن $\left(\begin{cases}0<-t\ln t\le\frac{1}{e}\\ \frac{1}{1+t^2}<1\end{cases}\Rightarrow\frac{-t\ln t}{1+t^2}<\frac{1}{e}\Rightarrow f(t)<\frac{1}{e}\right)$

ومن أجل $t=0$: $f(0)=0<\frac{1}{e}$ نستنتج أن

$$\boxed{\left(\forall t\in[0,+\infty[\right);f(t)<\frac{1}{e}}$$

ج) استنتاج أن $\left(\forall x\in \left]0,+\infty\right[\right);F\left(x\right)<x$

لدينا $\left(\forall t\in \left[0,+\infty\right[\right);f\left(t\right)<\frac{1}{e}\Rightarrow \left(\forall x>0\right);\int_0^x f\left(t\right)dt\le \int_0^x \frac{1}{e}dt$

و لدينا $\int_0^x \frac{1}{e}dt=\frac{1}{e}\left[t\right]_0^x=\frac{x}{e}<x$ إذن

$$\boxed{\left(\forall x\in \left]0,+\infty\right[\right);F\left(x\right)<x}$$

2)

(u_n) متتالية معرفة ب : $\begin{cases} u_0\in \left]0,1\right[\\ \left(\forall n\in \mathbb{N}\right);u_{n+1}=F\left(u_n\right)\end{cases}$

أ) لنبين أن : $\left(\forall n\in \mathbb{N}\right);u_n\in \left]0,1\right[$

برهان بالترجع : لدينا $u_0\in \left]0,1\right[$ إذن العلاقة صحيحة من إجل $n=0$

ليكن n من $\mathbb{N}$ نفترض أن $u_n\in \left]0,1\right[$

بما أن F تزايدية قطعا على المجال $\left]0,1\right[$ فإن $0<u_n<1\Rightarrow F\left(0\right)<F\left(u_n\right)<F\left(1\right)<1\Rightarrow 0<u_{n+1}<1$

إذن $u_{n+1}\in \left]0,1\right[$. نستنتج (حسب مبدأ الترجع) أن

$$\boxed{\left(\forall n\in \mathbb{N}\right);u_n\in \left]0,1\right[}$$

ب) لنبين أن المتتالية تناقصية قطعا ثم نستنتج أنها متقاربة

بما أن $\left(\forall n\in \mathbb{N}\right);u_n\in \left]0,1\right[$ فإن $\left(\forall n\in \mathbb{N}\right);F\left(u_n\right)<u_n$ حسب III 1) ج)

و منه $\left(\forall n\in \mathbb{N}\right);u_{n+1}<u_n$

إذن المتتالية (u_n) تناقصية قطعا

(u_n) تناقصية و مصغورة ب 0 إذن متقاربة

$$\boxed{(u_n)\ \text{متقاربة}}$$

ج) لنحسب نهاية المتتالية (u_n)

نضع $I=\left]0,1\right[$ الدالة F متصلة على I و لدينا $F\left(I\right)=\left]0,F\left(1\right)\right[\subset \left]0,\frac{1}{e}\right[\subset I$

إذن
$$\begin{cases} u_0\in \left]0,1\right[\\ \left(\forall n\in \mathbb{N}\right);u_{n+1}=F\left(u_n\right) \\ (u_n)\,converge\end{cases}\overset{(u_n)\searrow}{\Rightarrow}\begin{cases}\lim u_n=l \\ F\left(l\right)=l \\ l\in I\cup\{0\}\end{cases}$$

لنحل في $I\cup\{0\}$ المعادلة $F\left(l\right)=l$

نعلم أن $\left(\forall x\in \left]0,+\infty\right[\right);F\left(x\right)<x$ إذن المعادلة ليس لها حل في I و بالتالي حلها الوحيد هو 0

$$\boxed{\lim u_n=0}$$

التمرين الخامس

g الدالة المعرفة على $[0,+\infty[$ بمايلي $\begin{cases} g(x)=\dfrac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}};x>0 \\ g(0)=0 \end{cases}$

1) لنبين أن الدالة g متصلة على $[0,+\infty[$

الدالتيان $x\mapsto \dfrac{-1}{x}$ و $x\mapsto \dfrac{1}{x^2}$ متصلتان على $]0,+\infty[$ و الدالة exp متصلة على $\mathbb{R}$ إذن الدالة $x\mapsto e^{\frac{-1}{x}}$ متصلة على $]0,+\infty[$

و بالتالي الدالة $x\mapsto \dfrac{1}{x^2}e^{\frac{-1}{x}}$ متصلة على $]0,+\infty[$ يعني الدالة g متصلة على $]0,+\infty[$

لندرس اتصال الدالة g على اليمين في 0

لدينا $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}} \overset{\left(t=\frac{-1}{x}\right)}{=} \lim\limits_{t\to -\infty} t^2e^t=0=g(0)$ إذن g متصلة على اليمين في 0

$\boxed{\text{نستنتج أن الدالة } g \text{ متصلة على } [0,+\infty[}$

2) $\forall\left(x\in[0,+\infty[\right);L(x)=\int_0^x g(t)\,dt$

أ) لنبين أن الدالة L متصلة على $[0,+\infty[$

بما أن الدالة g متصلة على $[0,+\infty[$ فإنها تقبل دوال أصلية عليه و دالتها الأصلية التي تنعدم عند 0 هي $\int_0^x g(t)\,dt$

إذن L هي أصلية g على المجال $[0,+\infty[$ و تحقق $L(0)=0$

ومنه L قابلة للاشتقاق على $[0,+\infty[$ ما يعني أنها متصلة على $[0,+\infty[$

$\boxed{\text{الدالة } L \text{ متصلة على المجال } [0,+\infty[}$

ب) لنحسب $L(x)$ من أجل $x>0$

لدينا $(\forall x>0);L(x)=\int_0^x g(t)\,dt=\left[G(t)\right]_0^x=G(x)-G(0)$ حيث G أصلية لـ g

و بما أن G متصلة على $[0,+\infty[$ فإن G معرفة كما يلي $\begin{cases} G(x)=e^{\frac{-1}{x}};x>0 \\ G(0)=\lim\limits_{x\to 0^+} e^{\frac{-1}{x}}=0 \end{cases}$

نستنتج أن

$$\boxed{(\forall x>0);L(x)=e^{\frac{-1}{x}}}$$

ج) لدينا $\lim_{x\to 0^+} L(x) = \lim_{x\to 0^+} e^{\frac{-1}{x}} = 0$ و بما أن L متصلة على اليمين في 0 فإن $L(0)=0$

3) لنبين أن المتتالية $(s_n)_{n\geq 1}$ متقاربة و لنحدد نهايتها

لدينا $(\forall n\in \mathbb{N}^*) ; s_n = \frac{1}{n}\sum_{p=0}^{p=n-1} g\left(\frac{p}{n}\right)$

بما أن الدالة g متصلة على المجال $[0,1]$ فإن المتتالية $(s_n)_{n\geq 1}$ متقاربة و لدينا $\lim s_n = \int_0^1 g(t)dt = L(1) = \frac{1}{e}$

$$\boxed{\lim s_n = \frac{1}{e}}$$

إضافة

مبيان الدوال f g و L