

الدورة العادية 2004

التمرين الأول :

$$(1) \text{ لدينا } x^2 + y^2 + z^2 - 4y + 2z + 2 = x^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 - 3$$

إذن $x^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 3$ معادلة ديكارتية لـ (S) فلكة مركزها $\Omega(0,2,-1)$ و شعاعها $r = \sqrt{3}$.

$$(2) \text{ أ- } \Omega A = \sqrt{3} \Rightarrow A \in (S)$$

$$\text{ب- } M(x, y, z) \in (P) \Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega A} \cdot \overrightarrow{AM} = 0 \Leftrightarrow x + y - z = 0$$

$$(3) \text{ أ- } \vec{n}(1,1,1) \text{ منتظمة على } (Q) \Leftrightarrow x + y + z + d = 0 \Leftrightarrow d = -2 \Leftrightarrow B \in (Q)$$

$$\text{ب- } d = -2 \Leftrightarrow B \in (Q) \text{ و } (Q) \text{ يقطع } (S) \text{ وفق دائرة شعاعها } \frac{|0+2-1-2|}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{و مركزها } H(a, b, c) \text{ المسقط العمودي لـ } \Omega \text{ على } (Q). R = \sqrt{r^2 - d^2} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\text{إذن : } H\left(\frac{1}{3}, \frac{7}{3}, -\frac{1}{3}\right) \Leftrightarrow t = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R} / \begin{cases} a = t \\ b = 2 + t \\ c = -1 + t \\ a + b + c - 2 = 0 \end{cases}$$

التمرين الثاني :

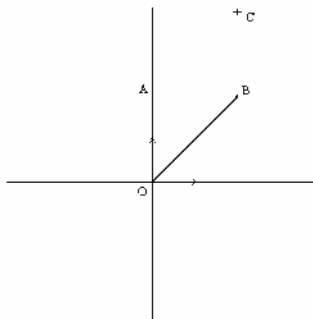
$$(1) \Delta = (2\sqrt{2}(1+i))^2 \Leftrightarrow 2i = (1+i)^2 \text{ و } \Delta = -16 + 16(1+i) = 16i$$

$$z'' = 2i + 2\sqrt{2}(1+i) = 2\sqrt{2} + (2+2\sqrt{2}) \text{ و } z' = 2i - 2\sqrt{2}(1+i) = -2\sqrt{2} + (2-2\sqrt{2})$$

$$z' = z_2 \text{ و } z'' = z_1 \Leftrightarrow \text{Re}(z'') > 0$$

$$(2) \text{ أ- } b = \left[2, \frac{\pi}{4}\right] \text{ و } a = \left[2, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$(3)$$



$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} \Leftrightarrow \text{aff}(C) = \text{aff}(A) + \text{aff}(B)$$

$$\text{ب- } OA = OB \Leftrightarrow \frac{OA}{OB} = \frac{|a|}{|b|} = 1$$

$$\text{ب- } OBCA \Leftrightarrow \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} \text{ متوازي الأضلاع}$$

$$\text{معين } OBCA \Leftrightarrow OA = OB \text{ معين } [\vec{e}_1, \overrightarrow{OC}] 2\pi . \arg(z_1) \equiv$$

$$\cdot (\vec{e}_1, \overrightarrow{OC}) \equiv \arg(b) + \frac{1}{2} (\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA}) \equiv \frac{3\pi}{8} [2\pi] \Leftarrow (\vec{e}_1, \overrightarrow{OC}) \equiv (\vec{e}_1, \overrightarrow{OB}) + (\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}) [2\pi]$$

التمرين الثالث :

$$p(B) = \frac{C_5^3 + C_4^3}{C_9^3} = \frac{1}{6} \quad , \quad p(A) = \frac{C_2^1 C_3^1 C_4^1}{C_9^3} = \frac{2}{7} \quad (1)$$

$$p(C) = 1 - p(\overline{C}) : \overline{C} : \text{"لا توجد أي بيضة حمراء من بين البيدقات المسحوبة"}$$

$$p(C) = \frac{16}{21} \Leftarrow p(\overline{C}) = \frac{C_6^3}{C_9^3} = \frac{5}{21}$$

$$\cdot p(A \cap B) = \frac{C_2^1 C_1^1 C_2^1}{C_9^3} = \frac{1}{21} \Leftarrow "B_1 R_1 N_1": A \cap B \quad (2)$$

التمرين الرابع :

$$\cdot \forall x \in \mathbb{R}, \quad \frac{1}{e^{-x} + 1} = \frac{e^x}{1 + e^x} = \frac{e^x + 1 - 1}{1 + e^x} = 1 - \frac{1}{e^x + 1} \quad \text{أ-} \quad (1)$$

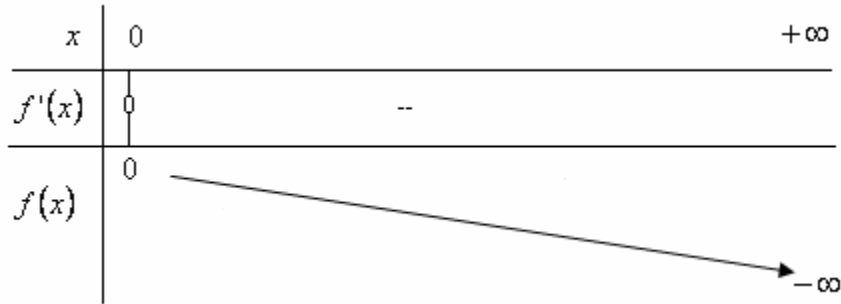
ب- $\mathbb{R}$ متماثل بالنسبة للصفر

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(-x) = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{2}{e^{-x} + 1} = 1 + \frac{1}{2}x - 2\left(1 - \frac{1}{e^x + 1}\right) = -f(x) \quad \text{و}$$

$$\cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty \quad (2)$$

$$\cdot \forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = -\frac{1}{2} + \frac{2e^x}{(e^x + 1)^2} = -\frac{1}{2} \left(\frac{e^{2x} - 2e^x + 1}{(e^x + 1)^2} \right) = -\frac{1}{2} \left(\frac{e^x - 1}{e^x + 1} \right)^2 \quad \text{أ-} \quad (3)$$

ب- لكل x من $\mathbb{R}^+$ لدينا $f'(x) < 0 \Leftarrow f$ تناقصية قطعاً على $\mathbb{R}^+$ ، إذن :



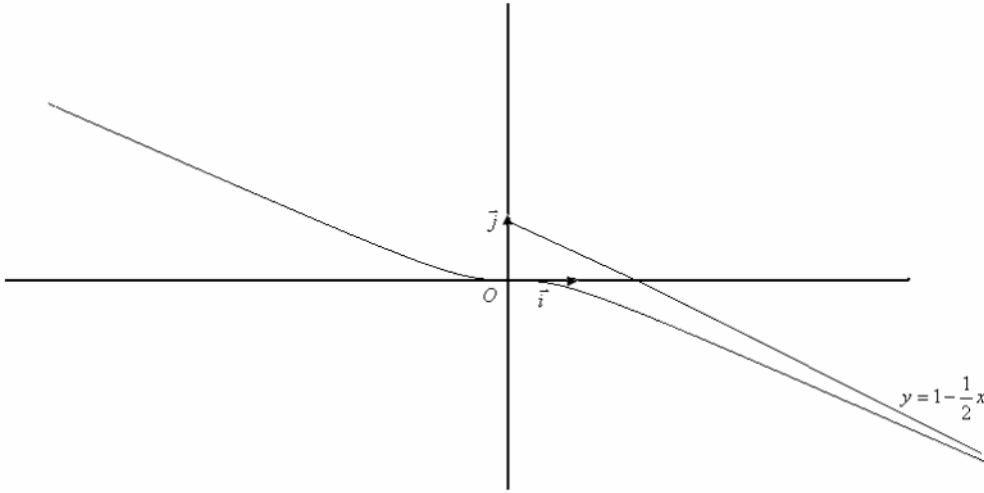
$$\text{ج- } f \text{ تناقصية قطعاً على } \mathbb{R}^+ \text{، إذن : } x \geq 0 \Leftarrow f(x) \leq f(0) \text{ يعني } 1 - \frac{1}{2}x - \frac{2}{e^x + 1} \leq 0$$

$$\cdot \forall x \in \mathbb{R}^+ : 1 - \frac{2}{e^x + 1} \leq \frac{1}{2}x \quad \text{و منه}$$

$$\cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[f(x) - \left(1 - \frac{1}{2}x \right) \right] = 0 \quad (4)$$

$$(C) \text{ يقبل مقارباً مانلاً بجوار } +\infty \text{ معادلته } y = 1 - \frac{1}{2}x$$

(5) المنحنى



$$(6) \quad \int_{-1}^0 \frac{1}{1+e^x} dx = \int_e^1 \frac{t}{1+t} \left(-\frac{dt}{t} \right) = -\int_e^1 \frac{1}{1+t} dt = \ln\left(\frac{e+1}{2}\right) \quad \text{إذن} \quad dx = -\frac{dt}{t} \Leftrightarrow t = e^{-x} \quad \text{أ-}$$

$$\text{ب-} \quad A = \int_{-1}^0 f(x) dx = \left[x - \frac{1}{4} x^2 \right]_{-1}^0 - 2 \ln\left(\frac{e+1}{2}\right) = \frac{5}{4} - 2 \ln\left(\frac{e+1}{2}\right) (um)$$

-II

$$(1) \quad \text{من أجل } n=0 : U_0 = 1 > 0$$

$$\text{نفترض أن } U_n > 0 \quad \text{إذن} \quad e^{U_n} + 1 > 2 \quad \text{ومنه} \quad \frac{2}{e^{U_{n+1}}} < 1 \quad \text{أي} \quad U_{n+1} = 1 - \frac{2}{e^{U_{n+1}}} > 0$$

$$\text{إذن :} \quad U_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$(2) \quad \text{أ- لدينا } x \in \mathbb{R}^+ : 1 - \frac{2}{e^x + 1} \leq \frac{1}{2} x \quad \text{نضع } x = U_n \quad (U_n > 0) \quad \text{فنجد} \quad 1 - \frac{2}{e^{U_n} + 1} \leq \frac{1}{2} U_n$$

$$\text{أي} \quad U_{n+1} \leq \frac{1}{2} U_n \quad \text{لكل } n \text{ من } \mathbb{N}$$

$$\text{ب- لدينا } U_{n+1} \leq \frac{1}{2} U_n \quad \Leftrightarrow U_{n+1} - U_n \leq -\frac{1}{2} U_n < 0 \quad \Leftrightarrow (U_n) \text{ متتالية تناقصية.}$$

$$(3) \quad \text{من أجل } n=0 : U_0 = 1 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^0 = 1$$

$$\text{نفترض أن } U_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n \quad \text{إذن} \quad \frac{1}{2} U_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \quad \text{ومنه} \quad U_{n+1} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \quad (\text{لأن } U_{n+1} \leq \frac{1}{2} U_n)$$

إذن $U_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$ لكل n من IN .

لدينا $0 < U_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$ و $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ $\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} U_n = 0$.