الدورة العادية 2003

التمرين الأول :

1) $I=\left[x\ln(x)-x\right]_1^2=2\ln 2-1$.

2) $(t=\sqrt{e^x}\Rightarrow dx=\frac{2dt}{t})\ \Rightarrow J=4I=8\ln 2-4$.

التمرين الثاني :

1) $p(A)=\frac{C_6^2+C_2^2}{C_8^2}=\frac{4}{7}$. $p(B)=\frac{C_4^1C_4^1+C_4^2}{C_8^2}=\frac{11}{14}$.

2)

x_i	0	1	2	3
$p(X=x_i)$	$\frac{C_4^2}{C_8^2}=\frac{3}{14}$	$\frac{C_3^1C_4^1}{C_8^2}=\frac{3}{7}$	$\frac{C_3^2+C_1^1C_4^1}{C_8^2}=\frac{1}{4}$	$\frac{C_1^1C_3^1}{C_8^2}=\frac{3}{28}$

التمرين الثالث :

1) $(m\overline{m}=2)\ \Delta'=1-m\overline{m}=-1\ \Rightarrow z'=\frac{1+i}{m}$, $z''=\frac{1-i}{m}$

2) $z'=\left[1,\frac{\pi}{4}-\alpha\right]$ و $z''=\left[1,-\frac{\pi}{4}-\alpha\right]$ إذن $\frac{z'}{z''}=\left[1,\frac{\pi}{2}\right]$.

3) $OABC$ متوازي الأضلاع $\Leftarrow \overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\Leftarrow aff(C)=aff(A)+aff(B)$.

$OABC$ مربع $\Leftarrow \left(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OA}\right)=\arg\left(\frac{z'}{z''}\right)\equiv\frac{\pi}{2}\left[2\pi\right]$ و $OABC$ معين $\Leftarrow \frac{OA}{OB}=\left|\frac{z'}{z''}\right|=1$

التمرين الرابع :

1) $(D)\begin{cases}x=2+t\\ y=t\\ z=2-t\end{cases}\quad t\in IR$.

2) $B(x,y,z)=(D)\cap(P)\Rightarrow\exists t\in IR\ /\ (2+t)+t-(2-t)-3=0$
$\Rightarrow t=1\Rightarrow B(3,1,1)$

3) أ- $R^2=r^2+d^2$ (R شعاع الفلكة ، r شعاع الدائرة ، $d=d(A,(P))$)

$R=\sqrt{7}\Leftarrow$ ($d=AB=\sqrt{3}$ أو) $d=\frac{|2-2-3|}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}$ و $r=2$.

ب- $(S):\ (x-2)^2+y^2+(z-2)^2=7$

مسألة :

1) أ- $\lim\limits_{0^-} f(x)=\lim\limits_{0^+} f(x)=0=f(0)$.

ب- $\lim\limits_{0^+}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{0^+} 4\sqrt{x}-3x=0 \Leftarrow f_d'(0)=0$.

$f_g'(0)=0 \Leftarrow \left(\lim\limits_{0}\dfrac{\ln(1+t)}{t}=1\right)$. $\lim\limits_{0^-}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{0^-}\dfrac{\ln(1-x^3)}{x}=\lim\limits_{0^-} -x^2.\dfrac{\ln(1-x^3)}{-x^3}=0$

$f \Leftarrow f_d'(0)=f_g'(0)$ قابلة للاشتقاق في 0.

2) $\forall x\in\ ]-\infty,0[\quad f'(x)\prec 0$ $\forall x\prec 0\quad f'(x)=\dfrac{-3x^2}{1-x^3}\Rightarrow$.

$\forall x\succ 0\quad f'(x)=6\sqrt{x}\left(1-\sqrt{x}\right)$ ($x\sqrt{x}=x^{\frac{3}{2}}$) .

و لدينا $1-\sqrt{x}\geq 0$ على المجال $[0,1]$ و $1-\sqrt{x}\leq 0$ على المجال $[1,+\infty[$ ، إذن :

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	1	↘	$-\infty$

3) أ- $\lim\limits_{-\infty} f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{+\infty} f(x)=\lim\limits_{+\infty} x^2\left(\dfrac{4}{\sqrt{x}}-3\right)=-\infty$.

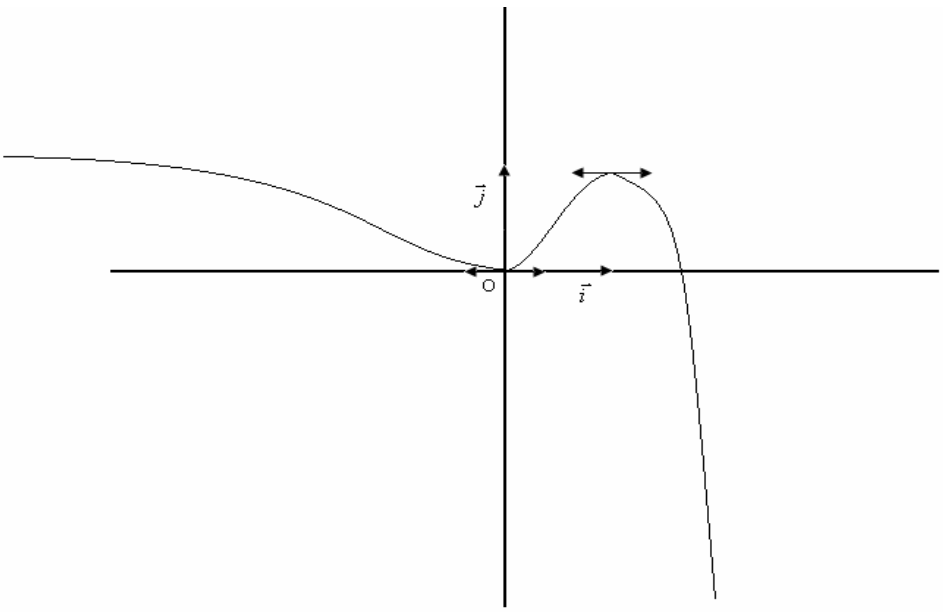
ب- $\forall x\prec 0\quad \dfrac{\ln(1-x^3)}{x}=\dfrac{\ln -x^3\left(-x^{-3}+1\right)}{x}=\dfrac{3\ln(-x)+\ln(1-x^{-3})}{x}$

$=\dfrac{3\ln(-x)}{x}+\dfrac{\ln(1-x^{-3})}{x}$

ج- $\lim\limits_{+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{+\infty} 4\sqrt{x}-3x=-\infty \Leftarrow C$ يقبل فرعا شلجميا في اتجاه (Oy) بجوار $+\infty$.

$\lim\limits_{-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=0 \Leftarrow C$ يقبل فرعا شلجميا في اتجاه (Ox) بجوار $-\infty$.

4) المنحنى :



5) أ- h متصلة و تناقصية قطعا على $]-\infty,0]$ إذن h تقابل من $]-\infty,0]$ نحو $[0,+\infty[=h(]-\infty,0])$.

ب- $y\in]-\infty,0]$ و $x\in[0,+\infty[$ $/$ $x=h(y)\Leftrightarrow y=h^{-1}(x)$

$$\Leftrightarrow y^3=1-e^x \Leftrightarrow x=\ln(1-y^3)$$

$$\Leftrightarrow (-y)^3=e^x-1$$

$$\Leftrightarrow y=-\sqrt[3]{e^x-1} \quad \text{إذن} \quad h^{-1}(x)=-\sqrt[3]{e^x-1} \quad \forall x\succ 0 .$$

6) أ- من أجل $n=0$: $\frac{4}{9}\le U_0=\frac{4}{9}\le 1$ (العلاقة محققة)

نفترض أن $\frac{4}{9}\le U_n\le 1$: f تزايدية على المجال $\left[\frac{4}{9},1\right]$ إذن $f\left(\frac{4}{9}\right)\le f(U_n)\le f(1)$

يعني $\frac{4}{9}\le\frac{16}{27}\le U_{n+1}\le 1$.

إذن : $\frac{4}{9}\le U_n\le 1$ $\forall n\in IN$.

ب- بالترجع : لدينا $U_1=\frac{16}{27}\ge U_0=\frac{4}{9}$ (العلاقة محققة من أجل $n=0$).

نفترض أن $U_{n+1}\ge U_n$: f تزايدية على المجال $\left[\frac{4}{9},1\right]$ إذن $f(U_{n+1})\ge f(U_n)$

يعني $U_{n+2}\ge U_{n+1}$ إذن (U_n) تزايدية.

ج- نضع $I=\left[\frac{4}{9},1\right]$. f متصلة على I و $f(I)=\left[\frac{16}{27},1\right]\subset I$.

(U_n) متقاربة (تزايدية و مكبورة) إذن نهايتها l تحقق $f(l)=l$.

إذن : $l=\frac{1}{9}$ أو $l=1$ أو $f(l)=l\Leftrightarrow l=0$ و منه $\lim\limits_{+\infty}U_n=1$.