التمرين الأول :

في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لدينا النقط $A(2,0,-1)$ و $B(2,4,2)$

و $C(3,3,3)$ و الفلكة (S) التي معادلتها الديكارتية هي : $x^2+y^2+z^2-4x-4y-8z+20=0$

1) نبين ان مركز الفلكة **(S)** هي النقطة $\Omega(2,2,4)$ أن شعاعها يساوي 2

$\forall M(x,y,z)\in(S) \Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-4x-4y-8z+20=0$ 1

$$\Leftrightarrow (x^2-4x)+(y^2-4y)+(z^2-8z)+20=0$$

$$\Leftrightarrow (x^2-4x+4)-4+(y^2-4y+4)-4+(z^2-8z+16)-16+20=0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)^2+(y-2)^2+(z-4)^2=2^2$$

إذن مركز الفلكة **(S)** هي النقطة $\Omega(2,2,4)$ و شعاعها **R**$=2$.

2) نبين أن معادلة ديكارتية للمستوى (P) هي : $x-y+z-1=0$

معادلة المستوى (P)تكتب على الشكل $ax+by+cz+d=0$ حيث $\vec{n}(a,b,c)$ متجهة منظمية عليه.

لدينا $B(2,4,2)$ و$C(3,3,3)$ إذن $\overrightarrow{BC}(1,-1,1)$ 0,75

لدينا المستوى (P) عمودي على المستقيم **(BC)** إذن المتجهة $\overrightarrow{BC}(1,-1,1)$ منظمية على (P)

ومنه فان معادلة (P) هي $x-y+z+d=0$

لدينا المستوى (P)يمر من النقطة $A(2,0,-1)$ إذن $2-0+(-1)+d=0$ أي $d=-1$

إذن معادلة ديكارتية للمستوى (P) هي : $x-y+z-1=0$.

3) أ – نبين أن المستوى (P) يقطع الفلكة (S) وفق دائرة (Γ) شعاعها يساوي **1**.

لدينا معادلة ديكارتية للمستوى (P) هي : $x-y+z-1=0$ ومركز الفلكة **(S)** هي النقطة $\Omega(2,2,4)$ 1

لدينا $d(\Omega,(P))=\dfrac{|2-2+4-1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2+1^2}}=\dfrac{3}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}$ ولدينا **R = 2**

بما أن $d(\Omega,(P))\prec R$ إذن المستوى (P) يقطع الفلكة (S) وفق دائرة (Γ) شعاعها **r** حيث :

$$r=\sqrt{R^2-d^2}=\sqrt{2^2-\sqrt{3}^2}=\sqrt{4-3}=1$$

ب– نحدد تمثيلا بارا متريا للمستقيم (Δ) المار من Ω و العمودي على (P).

لدينا معادلة ديكارتية للمستوى (P) هي : $x-y+z-1=0$ إذن $\vec{n}(1,-1,1)$ متجهة منظمية عليه.

لدينا المستقيم (Δ) عمودي على (P)إذن $\vec{n}(1,-1,1)$ موجهة للمستقيم (Δ).

إذن التمثيل البارامتري للمستقيم (Δ) المار من النقطة $\Omega(2,2,4)$ و الموجه بالمتجهة $\vec{n}(1,-1,1)$ هو: 0,25

$$\begin{cases} x=2+t \\ y=2-t \\ z=4+t \end{cases}$$

ج– نحدد مثلوث إحداثيات النقطة ωمركز الدائرة (Γ).

ωمركز الدائرة (Γ) هي تقاطع (Δ)و (P). 0,5

$\{\omega\}=(\Delta)\cap(P)\Leftrightarrow \omega\in(P)$ و $\omega\in(\Delta)$

$$\Leftrightarrow (1):\ x-y+z-1=0 \text{ و } (2):\begin{cases} x=2+t \\ \text{y=2-t} \\ z=4+t \end{cases}$$

نعوض (2) في (1)نحصل على : $(2+t)-(2-t)(2+t)-(2-t)+(4+t)-1=0$

نجـــــــد $t=-1$

نعوض قيمة $t=-1$ في (2) نحصل على

$$\begin{cases} x = 2+(-1) = 1 \\ y = 2-(-1) = 3 \\ z = 4+(-1) = 3 \end{cases}$$

إذن $\omega(1,3,3)$.

التمرين الثاني:

يحتوي كيس على ثلاث بيد بيضاء و أربع بيد قات سوداء (لا يمكن التمييز بين البيد قات باللمس).
نسحب عشوائيا وفي آن واحد ثلاث بيد قات من الكيس .

لدينا $card(\Omega) = C_7^3 = 35$

1) الحدث A " الحصول على بيدقتين بالضبط لونهما أبيض "أي (B,B,N) 0,75

لدينا $card(A) = C_3^2 \cdot C_4^1 = 12$ إذن $p(A) = \dfrac{card(A)}{card(\Omega)} = \dfrac{12}{35}$

2) الحدث B " الحصول على ثلاث بيد قات من نفس اللون ."اي (N,N,N) أو (B,B,B) 0,75

$card(B) = C_3^3 + C_4^3 = 1+4 = 5$ إذن $P(B) = \dfrac{card(B)}{card(\Omega)} = \dfrac{5}{35} = \dfrac{1}{7}$

3) الحدث C " الحصول على بيدقة بيضاء على الأقل " 1

الحدث المضاد $\bar{C}$ "عدم الحصول على أية بيدقة بيضاء " يعني (البيد قات الثلاث المسحوبة سوداء)

لدينا $card(\bar{C}) = C_4^3 = 4$: إذن $P(\bar{C}) = \dfrac{card(\bar{C})}{card(\Omega)} = \dfrac{4}{35}$ إذن :

$$\begin{aligned} p(C) &= 1 - p(\bar{C}) \\ &= 1 - \frac{4}{35} \\ &= \frac{31}{35} \end{aligned}$$

التمرين الثالث:

لتكن (u_n) المتتالية المعرفة بما يلي : $u_0 = 2$ و $u_{n+1} = \dfrac{1}{5}(u_n - 4n - 1)$ لكل n من $\mathbb{N}$.

نضع $v_n = u_n + n - 1$ لكل n من $\mathbb{N}$.

1) نبين أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\dfrac{1}{5}$. 1

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}: \quad v_{n+1} &= u_{n+1} + (n+1) - 1 \\ &= \frac{1}{5}(u_n - 4n - 1) + n \\ &= \frac{1}{5}(u_n - 4n - 1 + 5n) \\ &= \frac{1}{5}(u_n + n - 1) \\ &= \frac{1}{5} v_n \end{aligned}$$

0,5

ادن (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = \dfrac{1}{5}$

2) أ – نحسب v_n بدلالة n . 0,5

لدينا (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = \dfrac{1}{5}$ وحدها الأول $v_0 = u_0 + 0 - 1 = 2 - 1 = 1$ إذن $v_n = v_0 \cdot q^n$ أي $v_n = \left(\dfrac{1}{5}\right)^n$

ب− استنتاج u_n بدلالة n ثم حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} u_n$.

لدينا $v_n = u_n + n - 1$ إذن $u_n = v_n - n + 1$. ومنه فان $u_n = \left(\frac{1}{5}\right)^n - n + 1$ 0,5

لدينا $-1 \prec \frac{1}{5} \prec 1$ إذن $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^n = 0$ و لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty}(-n+1) = -\infty$ إذن $\lim\limits_{x\to+\infty} u_n = -\infty$

3) $S_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$ و $T_n = v_0 + v_1 + ... + v_n$

نبين أن : $T_n = \frac{1}{4}\left(5 - \frac{1}{5^n}\right)$ 1

$$\begin{aligned}
T_n &= v_0 + v_1 + ... + v_n \\
&= v_0 \cdot \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \\
&= 1 \cdot \frac{1-\left(\frac{1}{5}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{5}} \\
&= \frac{5}{4}\left(1-\left(\frac{1}{5}\right)^{n+1}\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(5-5\left(\frac{1}{5}\right)^{n+1}\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(5-5\cdot\frac{1}{5^{n+1}}\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(5-\frac{1}{5^n}\right)
\end{aligned}$$

نبن أن $S_n = T_n - \frac{(n+1)(n-2)}{2}$

لدينا $u_n = v_n - n + 1$ اذن :

$$\begin{aligned}
S_n &= u_0 + u_1 + ... + u_n \\
&= (v_0 - (-1)) + (v_1 - 0) + (v_2 - 1) + ... + (v_n - (n-1)) \\
&= (v_0 + v_1 + ... + v_n) - ((-1) + 0 + 1 + 2 + ... + (n-1)) \\
&= T_n - \frac{((-1)+(n-1))(n+1)}{2} \\
&= T_n - \frac{(n+1)(n-2)}{2}
\end{aligned}$$

التمرين الرابع:

1) نتحقق من أن : $(\sqrt{2}+2i)^2 = -2 + 4\sqrt{2}i$

$$\begin{aligned}
(\sqrt{2}+2i)^2 &= \sqrt{2}^2 + 2\sqrt{2}\cdot 2i + (2i)^2 \\
&= 2 + 4\sqrt{2}i - 4 \\
&= -2 + 4\sqrt{2}i
\end{aligned}$$

0,25

2) نحل في مجموعة الأعداد العقدية $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2-(\sqrt{2}+2)z+2+\sqrt{2}-\sqrt{2}i=0$ 0,75

لدينا مميز المعادلة هو

$$\begin{aligned}\Delta &= \left[-\left(\sqrt{2}+2\right)\right]^2-4\left(2+\sqrt{2}-\sqrt{2}i\right)\\ &= 2+4\sqrt{2}+4-8-4\sqrt{2}+4\sqrt{2}i\\ &= -2+4\sqrt{2}i\\ &= (\sqrt{2}+2i)^2\end{aligned}$$

إذن حلي المعادلة هما: $z_1=\dfrac{\sqrt{2}+2-\left(\sqrt{2}+2i\right)}{2}=1-i$ و $z_2=\dfrac{\sqrt{2}+2+\left(\sqrt{2}+2i\right)}{2}=\sqrt{2}+1+2i$

3) لدينا العددين العقديين $z_1=1-i$ و $z_2=1+\sqrt{2}+i$.

أ – نحدد الشكل المثلثي للعدد العقدي z_1 .

لدينا $|z_1|=|1-i|=\sqrt{2}$ إذن : 0,5

$$z_1=1-i=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

ب – نبين أن : $z_1.z_2=\sqrt{2}\overline{z}_2$ ($\overline{z}_2$ هو مرافق العدد z_2) .

لدينا : 1

$$\begin{aligned}z_1\cdot z_2 &= (1-i)\left(1+\sqrt{2}+i\right)\\ &= 1+\sqrt{2}+i-i-i\sqrt{2}+1\\ &= 2+\sqrt{2}-i\sqrt{2}\\ &= \sqrt{2}\left(\sqrt{2}+1-i\right)\\ &= \sqrt{2}\overline{z}_2\end{aligned}$$

استنتاج : $\arg(z_1)+2\arg(z_2)\equiv 0[2\pi]$

لدينا $z_1.z_2=\sqrt{2}\overline{z}_2$ اذن : $\arg\left(z_1.z_2\right)\equiv\arg\left(\sqrt{2}\overline{z}_2\right)[2\pi]$ أي $\arg(z_1)+\arg(z_2)\equiv\arg\left(\sqrt{2}\right)+\arg\left(\overline{z}_2\right)[2\pi]$

وبما أن $\arg\left(\overline{z}_2\right)\equiv-\arg\left(z_2\right)[2\pi]$ و $\arg\left(\sqrt{2}\right)\equiv 0[2\pi]$ فان $\arg(z_1)+2\arg(z_2)\equiv 0[2\pi]$

ج – نحدد عمدة للعدد z_2 0,5

لدينا $\arg(z_1)+2\arg(z_2)\equiv 0[2\pi]$ و $\arg\left(z_1\right)\equiv-\dfrac{\pi}{4}[2\pi]$ إذن $\arg\left(z_2\right)\equiv-\dfrac{\pi}{8}[2\pi]$

مسألة :

I) لدينا g الدالة العددية المعرفة على $]0,+\infty[$ بما يلي : $g(x)=x-\dfrac{1}{x}-2\ln x$.

1) نبين أن $g'(x)=\dfrac{(x-1)^2}{x^2}$ لكل x من $]0,+\infty[$ ثم نستنتج منحى تغيرات الدالة g على $]0,+\infty[$. 1

$$\forall x\in\,]0,+\infty[:\quad g'(x)=1+\frac{1}{x^2}-2\ln x$$
$$=1+\frac{1}{x^2}-2\cdot\frac{1}{x}$$
$$=\frac{x^2+1-2x}{x^2}$$
$$=\frac{(x-1)^2}{x^2}$$

لدينا لكل x من $]0,+\infty[$ $\quad (x-1)^2\geq 0$ و $x^2\succ 0$.

إذن $\forall x\in\,]0,+\infty[:\ g'(x)\geq 0$ وبالتالي فان الدالة g تزايدية على المجال $]0,+\infty[$

2) لدينا الدالة g تزايدية على المجال $]0,+\infty[$ و خصوصا على المجال $]0,1]$ إذن

$$\forall x\in\,]0,1]\Rightarrow 0\prec x\leq 1\Rightarrow g(x)\leq g(1)$$

بما أن $g(1)=0$ فان $g(x)\leq 0$ لكل x من المجال $]0,1]$ 0,5

لدينا الدالة g تزايدية على المجال $[1,+\infty[$ إذن $\forall x\in[1,+\infty[\Rightarrow 1\leq x\Rightarrow g(1)\leq g(x)$

بما أن $g(1)=0$ فان $g(x)\geq 0$ لكل x من المجال $[1,+\infty[$

II) الدالة العددية f المعرفة على $]0,+\infty[$ بما يلي : $f(x)=x+\frac{1}{x}-(\ln x)^2-2$

1) أ – نبين أن $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)^2}{x}$ (يمكن وضع $t=\sqrt{x}$) ثم نحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 0,75

نضع $t=\sqrt{x}$ إذن $x=t^2$ عندما $x\to+\infty$ فان $t\to+\infty$

لدينا $$\frac{(\ln x)^2}{x}=\frac{\left(\ln t^2\right)^2}{t^2}=\frac{(2\ln t)^2}{t^2}=4\left(\frac{\ln t}{t}\right)^2$$

لدينا $\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{\ln t}{t}=0$ إذن $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)^2}{x}=\lim\limits_{t\to+\infty}4\left(\frac{\ln t}{t}\right)^2=0$

$$f(x)=x+\frac{1}{x}-(\ln x)^2-2=x\left(1+\frac{1}{x^2}-\frac{(\ln x)^2}{x}-\frac{2}{x}\right)$$

لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{x}=0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)^2}{x}=0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}=0$ إذن $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

ب – نتحقق من أن : $f(\frac{1}{x})=f(x)$ لكل x من $]0,+\infty[$.

لكل x من $]0,+\infty[$ لدينا 0,25

$$f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x}+\frac{1}{\frac{1}{x}}-\left(\ln\left(\frac{1}{x}\right)\right)^2-2$$
$$=\frac{1}{x}+x-(-\ln x)^2-2$$
$$=\frac{1}{x}+x-(\ln x)^2-2$$
$$=f(x)$$

ج – نحسب $\lim_{\substack{x\to 0\\ x\succ 0}} f(x)$ 0,5

نضع $t=\frac{1}{x}$ إذن عندما $x\to 0^+$ فان $t\to +\infty$ و منه فان $\lim_{\substack{x\to 0\\ x\succ 0}} f(x)=\lim_{\substack{x\to 0\\ x\succ 0}} f\left(\frac{1}{x}\right)=\lim_{t\to+\infty} f(t)=+\infty$

إذن المنحنى (C) يقبل مقاربا رأسي معادلته $x=0$

د – – نبين أن (C) يقبل فرعا شلجميا اتجاهه المقارب هو المستقيم الذي معادلته هي : $y=x$ 0,5

لدينا $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x^2}-\frac{(\ln x)^2}{x}-\frac{2}{x}\right)=1$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)-x=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}-(\ln x)^2-2=-\infty$ إذن (C) يقبل فرعا شلجميا اتجاهه المقارب هو المستقيم الذي معادلته هي : $y=x$

2) بين أن : $f'(x)=\frac{g(x)}{x}$ لكل x من $]0,+\infty[$ 1,5

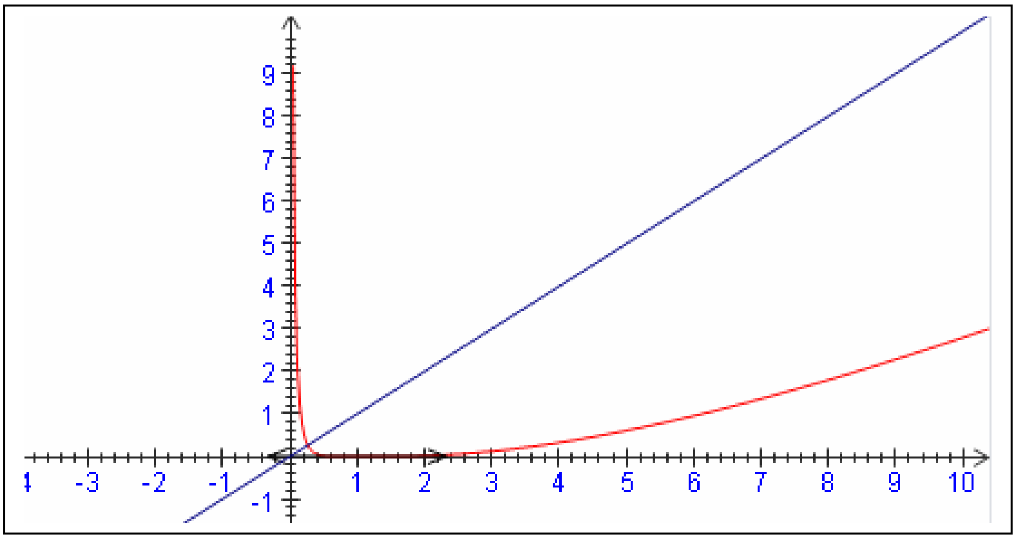
$$f'(x)=1-\frac{1}{x^2}-2(\ln x)(\ln x)'$$
$$=1-\frac{1}{x^2}-2(\ln x)\cdot\frac{1}{x}$$
$$=\frac{1}{x}\left(x-\frac{1}{x}-2\ln x\right)$$
$$=\frac{g(x)}{x}$$

إشارة $f'(x)$ هي إشارة $g(x)$

جدول تغيرات الدالة f

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	||	-	0	+	
$f(x)$	|| $+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

3) المنحنى 1



4) أ - نبين أن الدالة $G:x\ln x-x$ دالة أصلية للدالة $g:x\to\ln x$ على $]0,+\infty[$	0,5

لدينا

$$\forall x\in\,]0,+\infty[:\ G'(x)=x'\ln x+x(\ln x)'-1$$
$$=\ln x+x\cdot\frac{1}{x}-1$$
$$=\ln x+1-1$$
$$=\ln x$$

إذن الدالة **G** دالة أصلية للدالة **g**.

ب - باستعمال مكاملة بالأجزاء ، نبين أن : $\int_1^e(\ln x)^2dx=e-2$ — 0,75

نضع $\begin{cases}u(x)=(\ln x)^2\\ v'(x)=1\end{cases}$ إذن $\begin{cases}u'(x)=2\dfrac{\ln x}{x}\\ v(x)=x\end{cases}$

إذن

$$\int_1^e(\ln x)^2dx=\left[x(\ln x)^2\right]_1^e-\int_1^e 2\frac{\ln x}{x}\cdot x\,dx$$
$$=\left[x(\ln x)^2\right]_1^e-2\int_1^e\ln x\,dx$$
$$=\left[x(\ln x)^2\right]_1^e-2[x\ln x-x]_1^e$$
$$=\left(e(\ln e)^2-1(\ln 1)^2\right)-2\left((e\ln e-e)-(1\ln 1-1)\right)$$
$$=e-2$$

ج - مساحة حيز المستوى المحصور (C) و محور الأفاصيل و المستقيمين اللذين معادلتاهما : $x=1$ و $x=e$ — 0,75

لدينا f دالة موجبة و متصلة على المجال $[1,e]$ إذن المساحة المطلوبة هي

$$A=\int_1^e f(x)\,dx=\int_1^e\left(x+\frac{1}{x}-(\ln x)^2-2\right)\mathrm{dx}$$
$$=\int_1^e\left(x+\frac{1}{x}-2\right)\mathrm{dx}-\int_1^e(\ln x)^2\ \mathrm{dx}$$
$$=\left[\frac{x^2}{2}+\ln|x|-2x\right]_1^e-(e-2)$$
$$=\left(\frac{e^2}{2}+\ln e-2e\right)-\left(\frac{1}{2}+\ln 1-2\right)-e+2$$
$$=\frac{e^2}{2}+1-2e-\frac{1}{2}+2-e+2$$
$$=\frac{e^2}{2}-3e+\frac{9}{2}$$

إذن $A=\dfrac{e^2}{2}-3\,\mathrm{e}+\dfrac{9}{2}$ بوحدة قياس المساحة