Correction de l'examen national juin 2005
Proposée par Wadifi, prof de maths, cycle qualificatif Marrakech

Site : http://arabmaths.site.voila.fr

__Questions__ :

1- *Résolution de l'équation* $z \in \mathbb{C}$ $\quad z^2 - 2(1+2i)z + 1 + 4i = 0$

Le discriminant réduit de cette équation est : $\Delta = -4 = (2i)^2$

Donc les racines de cette équation sont : $z_1 = 1$ *et* $z_2 = 1 + 4i$

Ainsi : $S = \{1; 1+4i\}$

2- On montre que $\left(\dfrac{\sqrt{3}+i}{2}\right)^{12} = 1$

La forme trigonométrique de $\dfrac{\sqrt{3}+i}{2}$ *est* $\left[1, \dfrac{\pi}{6}\right]$

Donc : d'après la formule de Moivre on a: $\left(\dfrac{\sqrt{3}+i}{2}\right)^{12} = \left[1, \dfrac{\pi}{6}\right]^{12} = [1, 2\pi]$.

Ainsi :

$$\boxed{\left(\dfrac{\sqrt{3}+i}{2}\right)^{12} = 1}$$

3- *En utilisant l'intégration par partie ; montrons que* $\int_1^e x^2 \ln x dx = \dfrac{2e^3+1}{9}$

Posons $\begin{cases} u(x) = \ln x \\ v'(x) = x^2 \end{cases}$ *donc* $\begin{cases} u'(x) = \dfrac{1}{x} \\ v(x) = \dfrac{x^3}{3} \end{cases}$

Donc : $\int_1^e x^2 \ln x dx = \left[\dfrac{x^3}{3}\ln x\right]_1^e - \int_1^e \dfrac{x^2}{3} dx = \dfrac{e^3}{3} - \left[\dfrac{x^3}{9}\right]_1^e = \dfrac{2e^3+1}{9}$

Ainsi :

$$\boxed{\int_1^e x^2 \ln x dx = \dfrac{2e^3+1}{9}}$$

4- *on montre que* $\int_2^4 \dfrac{dx}{x\sqrt{x-1}} = \dfrac{\pi}{6}$ *(posons* $t = \sqrt{x-1}$ *)*

Posons : $t = \sqrt{x-1}$ *donc :* $x = t^2 + 1$ *d'ou :* $dx = 2tdt$

Pour x=2 on a : t=1 ; Pour x=4 on a : $t = \sqrt{3}$.

Par suite : $\int_2^4 \dfrac{dx}{x\sqrt{x-1}} = \int_1^{\sqrt{3}} \dfrac{2tdt}{(t^2+1)t} = 2.\int_1^{\sqrt{3}} \dfrac{dt}{1+t^2} = 2.[\arctan t]_1^{\sqrt{3}} = 2\left(\dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\pi}{6}$

Ainsi :

$$\boxed{\int_2^4 \dfrac{dx}{x\sqrt{x-1}} = \dfrac{\pi}{6}}$$

Exercice 1 :

1- Montrons que : le plan $\mathcal{P}$ est tangent a la sphère $\mathcal{S}$.

d'après l'équation on déduit que $\mathcal{S}$ est la sphère de centre $\Omega(1;0;1)$ et de rayon $r=\sqrt{2}$

on a : $d(\Omega,P)=\dfrac{|1+0-3|}{\sqrt{1+1+0}}=\sqrt{2}=r$.

dc : le plan $\mathcal{P}$ est tangent a la sphère $\mathcal{S}$.

2- Déterminons l'intersection $\mathcal{P}$ et $\mathcal{S}$

soit $\mathcal{H}$ le pt d intersection de $\mathcal{P}$ avec $\mathcal{S}$.

on sait que $\mathcal{H}$ est aussi l intersection de $\mathcal{S}$ et la droite $\mathcal{D}$ perpendiculaire a $\mathcal{P}$ passant par le centre $\Omega(1;0;1)$.

on sait également que tout vecteur normal à $\mathcal{P}$ est directeur de $\mathcal{D}$, or $\vec{n}(1;1;0)$ est normal à $\mathcal{P}$

dc : une représentation analytique de $\mathcal{D}$ est : $\begin{cases} x=1+t \\ y=t \quad (t\in\mathbb{R}) \\ z=1 \end{cases}$

On a : $H(x,y,z)\in D\cap P \Leftrightarrow \begin{cases} x=1+t \\ y=t \\ z=1 \\ x+y-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1+t \\ y=t \\ z=1 \\ 1+2t-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=1 \\ z=1 \\ t=1 \end{cases}$

ainsi le point d intersection de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{S}$ est : $H(2,1,1)$

Exercice 2 :

La caisse contient 3 boules blanches et 7 boules noires

1- le tirage se fait simultanément. Nous avons donc des combinaisons.

d ou :

$$p(A)=\frac{C_7^2}{C_{10}^2}=\frac{7\times6}{10\times9}=\frac{7}{15}$$

on a $B=\overline{A}$ donc : $p(B)=1-p(A)=\dfrac{8}{15}$

2- on utilisera un arbre :

a- la réalisation de l événement C consiste a tirer une boule blanche parmis les trois dc : $p(C)=\dfrac{C_3^1}{C_{10}^1}=\dfrac{3}{10}$

b- pour avoir une boule blanche ; soit qu on tire une boule blanche et on s arrête, soit qu on tire une boule noire puis une autre blanche.

donc : $p(D)=\dfrac{3}{10}+\dfrac{C_7^1}{C_{10}^1}\cdot\dfrac{C_3^1}{C_9^1}=\dfrac{8}{15}$

Problème

Partie une : $\forall x\in\left]0;+\infty\right[\quad g(x)=x-1-\ln x \quad ; \quad h(x)=x+(x-2)\ln x$

1-

a- $\forall x\in\left]0;+\infty\right[\quad : \quad g'(x)=1-\dfrac{1}{x}=\dfrac{x-1}{x}$

Sur $\left]0;+\infty\right[$ le signe de $\dfrac{x-1}{x}$ est celui de $(x-1)$. Dc : $g'(x)\succ 0$ sur $\left]1;+\infty\right[$ et $g'(x)\prec 0$ sur $\left]0;1\right[$.

Par conséquent :

g est décroissante sur $]0;1[$ *et croissante sur* $]1;+\infty[$

b- *on a* : $\forall x \geq 1 \qquad g(x) \geq g(1)$ *(car g est croissante sur* $[1,+\infty[$ *) et* $g(1)=0$

autrement dit g est positive sur $[1,+\infty[$.

De plus : $\forall x \in]0,1]$, $g(x) \geq g(1)$ *(car g est décroissante sur* $]0,1]$ *)*

autrement dit :g est positive sur $]0,1]$.

Ainsi :

g est positive sur $]0;+\infty[$.

2-

a- Montrons que $\forall x \in]0;+\infty[\qquad h(x) = 1 + g(x) + (x-1)\ln x$

soit x de $]0;+\infty[$

alors : $1+g(x)+(x-1)\ln x = 1+x-1-\ln x+(x-1)\ln x = x+(x-2)\ln x$

donc :

$\forall x \succ 0, \quad h(x)=1+g(x)+(x-1)\ln x$

b- le tableau de signe de $(x-1)\ln x$ *est :*

X	0		1		$+\infty$
$x-1$		-	0	+	
Lnx	‖	-	0	+	
$(x-1)\ln x$	‖	+	0	+	

On en déduis que : $\forall x \succ 0, \quad (x-1)\ln x \geq 0$.

3- *on a :* $\forall x \in]0;+\infty[\qquad h(x) = 1+g(x)+(x-1)\ln x$ *et* $\forall x \succ 0, \ g(x) \geq 0$ *et* $(x-1)\ln x \geq 0$

Donc : $\forall x \succ 0, \quad h(x) \succ 0$.

<u>Partie deux</u>: $\qquad \forall x \in]0;+\infty[\qquad f(x) = 1 + x\ln x - (\ln x)^2$

1-

a- on a : $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x = 0$ *et* $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$

donc : $\lim\limits_{0^+} f(x) = -\infty$.

on en déduit que:

la droite d'équation x=0 est une asymptote à la courbe (C)

b- l'expression de f *présente une forme indéterminée en* $+\infty$ *de la forme :* $(+\infty)+(-\infty)$.

On a : $f(x) = 1 + x\ln x.\left(1 - \dfrac{\ln x}{x}\right)$.

Comme $\lim\limits_{+\infty} x\ln x = +\infty$ *et* $\lim\limits_{+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$

Donc :

$\lim\limits_{+\infty} f(x) = +\infty$

On a de plus : $\dfrac{f(x)}{x} = \dfrac{1}{x} + \ln x.\left(1 - \dfrac{\ln x}{x}\right)$

Donc : $\lim\limits_{+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$

Par suite :

$\boxed{(C) \text{ admet une branche parabolique de direction asymptotique l'axe } (Oy) \text{ au voisinage de } +\infty .}$

2 –

a- $\forall x \succ 0\ :\ f'(x) = \ln x + x.\dfrac{1}{x} - 2.\dfrac{1}{x}.\ln x = 1 + \ln x - 2\dfrac{\ln x}{x} = \dfrac{x + (x-2)\ln x}{x} = \dfrac{h(x)}{x}$.

b- *on a : h est strictement positive sur* $]0,+\infty[$.

donc : $\forall x \succ 0,\ f'(x) \succ 0$

ainsi : f est strictement croissante sur $]0,+\infty[$.

3 -

a- *l'équation réduite de la droite* (Δ) *tangente à* (C) *au point* $A(1,1)$ *est :*

$y = f'(1).(x-1) + 1$. *c'est à dire :* $y = x$.

b- *soit x de* $]0,+\infty[$

alors :

$f(x) - x = 1 + x\ln x - (\ln x)^2 - x = 1 - (\ln x)^2 + x.(\ln x - 1) = (1 - \ln x)(1 + \ln x) + x(\ln x - 1)$

$\boxed{\forall x \succ 0,\ f(x) - x = (\ln x - 1).g(x)}$

c- *on a déjà montrer que :* $g(x) \geq 0$ *pour tout x de* $]0,+\infty[$.

donc le signe $f(x) - x$ *est celui de* $(\ln x - 1)$.

on a : $\ln x - 1 = 0 \Leftrightarrow \ln x = 1 \Leftrightarrow x = e$

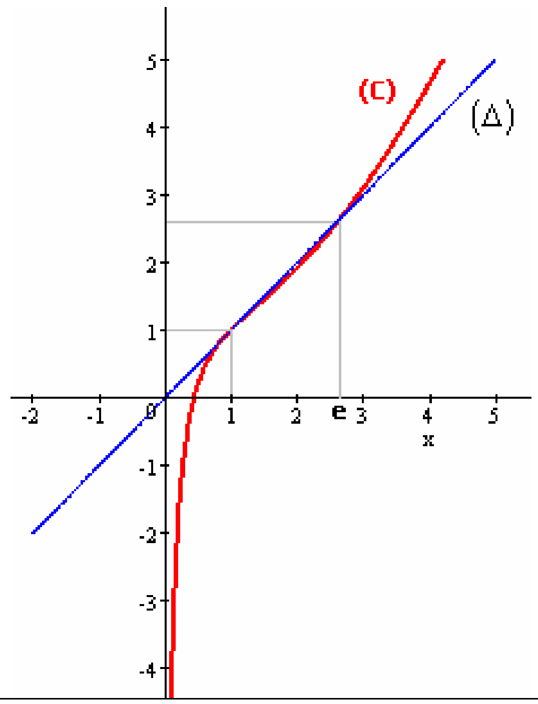
et ; $\ln x - 1 \succ 0 \Leftrightarrow \ln x \succ 1 \Leftrightarrow x \succ e$

ainsi : $f(x) - x$ *est positive sur* $[e,+\infty[$ *est négative sur* $]0, e]$.

on en déduit que :

$\boxed{(C) \text{ est au dessus de } (\Delta) \text{ sur } [e,+\infty[\text{ et au dessous de } (\Delta) \text{ sur }]0, e] .}$

4- *construction :*



partie trois :

1- $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = f(u_n) \quad ; \quad u_0 = \sqrt{e}$

a- *on a* $u_0 = \sqrt{e}$ *donc :* $1 \prec u_0 \prec e$

donc la proposition est vraie pour $n = 0$

soit n un entier naturel.

supposons que $1 \prec u_n \prec e$ *et montrons* $1 \prec u_{n+1} \prec e$.

on a : $1 \prec u_n \prec e$ *et* f *strictement croissante sur* $[1, e]$.

donc : $f(1) \prec f(u_n) \prec f(e)$

d ou : $1 \prec u_{n+1} \prec e$.

ainsi:

$$\boxed{\forall n \in N \ : \ 1 \prec u_n \prec e}$$

2-

soit n un entier naturel,

on a $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n$

or $f(x) - x$ *est négative sur* $]0, e]$ *et comme* $\forall n \in N, \quad 1 \prec u_n \prec e$

Alors : $f(u_n) - u_n \prec 0$

Ainsi : $\forall n \in N, \quad u_{n+1} - u_n \prec 0_n$

Ceci montre que (u_n) *est décroissante.*

2- *la suite* (u_n) *est décroissante et minorée par 1 donc convergente. soit* l *sa limite.*

Comme $u_0 \in]1, e[$ *et* $\forall n \in N, \quad u_n \in]1, e[$

f *est continue sur* $]1, e[$ *et* $f(]1; e[) \subset]1; e[$.

alors : $l = f(l)$.

D ou : $f(l) - l = 0$

Autrement dit : $(\ln l - 1).g(l) = 0$ *(question 6-3-partie 2)*

Par suite : $\ln l - 1 = 0$ *ou* $g(l) = 0$

D ou : $l = e$ *ou* $l = 1$

Comme (u_n) *est décroissante alors* $l = 1$.

C'est avec un grand plaisir
Bonne chance