

الدورة الإستدراكية 2004

التمرين الأول:

(1) أ- من أجل $n = 0 : U_0 = 1 > 0$. نفترض أن $U_n > 0$ إذن $U_n^3 > 0$ ومنه $U_{n+1} = \frac{U_n^3}{1+U_n^2} > 0$

وبالتالي $U_n > 0$ لكل n من IN .

ب- لدينا $U_{n+1} - U_n = \frac{-U_n^2(U_n + 1)}{1 + U_n^2} < 0$ إذن (U_n) تناقصية .

ج- (U_n) تناقصية و مصغرة بـ 0 ، فهي إذن متقاربة .

(2) أ- لدينا $3U_n^2 + 1 \geq 3U_n^2$ إذن $\frac{U_n^3}{3U_n^2 + 1} \leq \frac{U_n^3}{3U_n^2}$ أي $U_{n+1} \leq \frac{1}{3}U_n$ لكل n من IN .

$$\left\{ \begin{array}{l} U_n \leq \frac{1}{3}U_{n-1} \\ U_{n-1} \leq \frac{1}{3}U_{n-2} \\ \vdots \\ U_2 \leq \frac{1}{3}U_1 \\ U_1 \leq \frac{1}{3}U_0 \end{array} \right. \quad \text{ب- لدينا :}$$

نضرب طرفا بطرف (كل الأطراف موجبة) نجد $U_n \leq \left(\frac{1}{3}\right)^n$ لكل n من IN

$\lim_{n \rightarrow \infty} U_n = 0$ و لدينا $U_n > 0$ إذن $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0 \Leftarrow -1 < \frac{1}{3} < 1$

التمرين الثاني :

(1) أ- $d(\Omega, (P)) = \frac{|0+1-3|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$

ب- $S(\Omega, r)$ مماسة للمستوى (P) ، إذن $r = \sqrt{2}$ ومنه $(S): x^2 + (y-1)^2 + (z+1)^2 = 2$

إذن معادلة ديكارتية للفلكة هي : $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2y + 2z = 0$

(2) أ- $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = -\vec{i} + \vec{k} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}(-1, 1, -1)$ و $\overrightarrow{AC}(0, -1, 0)$

$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \neq \vec{0}$ إذن النقط A و B و C غير مستقيمية .

ب- لدينا $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ منظمية على (ABC) ، إذن $-x + z + d = 0$

$(ABC): x - z - 3 = 0$ ومنه $d = 3$ إذن $B(0, 3, -3) \in (ABC)$

(3) أ- لدينا $d(\Omega, (ABC)) = \frac{|0+1-3|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} = r$ إذن الفلكة (S) مماسة للمستوى (ABC).

ب- $\Omega C = \sqrt{2} \Leftarrow \overrightarrow{\Omega C}(1,0,-1)$ إذن $C \in (S)$ و لدينا $C \in (ABC)$ إذن : C هي نقطة تماس (S) و (ABC).

التمرين الثالث:

(1) أ- $\Delta' = 1 \Leftarrow z' = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$ و $z'' = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$ لدينا إذن $\text{Re}(z'') > 0$ أي $z' = z_2$ و $z'' = z_1$.

ب- لدينا $z_1 = \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\pi}{4} \right]$ و $z_2 = \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{3\pi}{4} \right]$

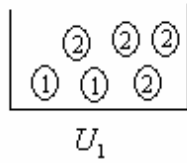
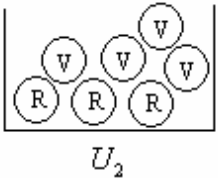
(2) أ- لدينا $\frac{a-s}{b-s} = \frac{1-i}{-1-i} = i$ إذن $\frac{a-s}{b-s} = \left[1, \frac{\pi}{2} \right]$

ب- لدينا $\frac{SA}{SB} = \left| \frac{a-s}{b-s} \right| = 1$ إذن المثلث SAB متساوي الساقين رأسه S.

و $\left(\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{SB} \right) = \arg\left(\frac{a-s}{b-s} \right) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$ يعني أن المثلث SAB قائم الزاوية في S.

ج- لدينا $s = a + b$ يعني $\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ ومنه $\text{aff}(S) = \text{aff}(A) + \text{aff}(B)$ إذن الرباعي OASB متوازي الأضلاع ، و بما أن المثلث SAB قائم الزاوية و متساوي الساقين رأسه S فإن OASB مربع.

التمرين الرابع :



(1) $p(A) = \frac{1}{3}$ و $p(B) = \frac{4}{6}$

(2) أ- $p(E_1) = \left(\frac{1}{3} \times \frac{3}{7} \right) + \left(\frac{2}{3} \times \frac{C_3^1 C_4^1}{C_7^2} \right) = \frac{1}{7} + \frac{8}{21} = \frac{11}{21}$

و $p(E_2) = \frac{2}{3} \times \frac{C_3^2}{C_7^2} = \frac{2}{21}$

ب- لدينا $p(A \cap E_1) = p(A)p_{E_1}(A) = \frac{1}{3} \times \frac{3}{7} = \frac{1}{7}$ و $p_{E_1}(A) = \frac{p(A \cap E_1)}{p(E_1)}$

إذن $p_{E_1}(A) = \frac{3}{11}$

التمرين الخامس:

(1) أ- لدينا $x^2 - 2x + 2 = x^2 - 2x + 1 + 1 = (x-1)^2 + 1$ لكل x من $\mathbb{R}$.

ب- $(x-1)^2 + 1 > 0$ لكل x من $\mathbb{R}$ إذن $D_f = \mathbb{R}$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

(2) لدينا $f(2-x) = 4 - 4x + x^2 - 4 + 2x + 2 = x^2 - 2x + 2 = f(x)$ إذن $f(2-x) = f(x)$ لكل x من $\mathbb{R}$.

الاستنتاج: المستقيم ذو المعادلة $x = a$ محور تماثل (C) في م م $(O, \vec{i}, \vec{j}) \Leftrightarrow f(2a-x) = f(x) \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R} f(2a-x) = f(x)$ إذن : المستقيم ذو المعادلة $x = 1$ محور تماثل (C).

أول: لدينا $(C) \Leftrightarrow M(x, y) \in (C)$ و $y = f(x)$ و لتكن $M'(x', y')$ مماثلة M بالنسبة للمستقيم ذي المعادلة $x = 1$ ،

إذن :
$$\begin{cases} \frac{x+x'}{2} = 1 \\ y' = y \end{cases} \text{ وهذا يكافئ } \begin{cases} x' = 2-x \\ y' = y \end{cases} . \text{ وبما أن } f(2-x) = f(x) \text{ فإن } y' = f(x')$$

إذن $M' \in (C)$ و بالتالي (C) متمائل بالنسبة للمستقيم ذي المعادلة $x = 1$.

(3) أ- $f(x) = \ln \left[x^2 \left(1 - \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2} \right) \right] = \ln x^2 + \ln \left(1 - \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2} \right)$ وبما أن $x \in [1, +\infty[$

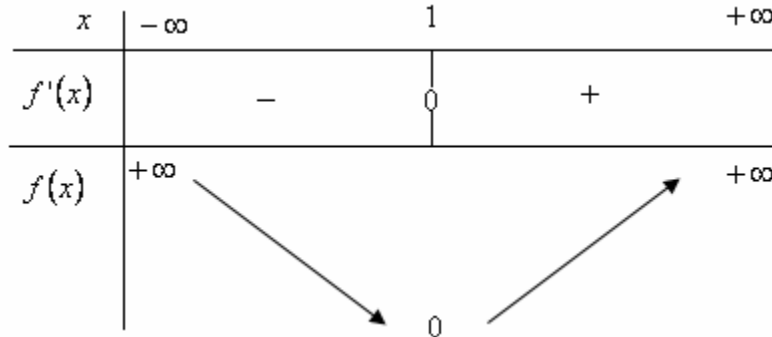
فإن $\ln x^2 = 2 \ln x$ إذن $f(x) = \ln \left[x^2 \left(1 - \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2} \right) \right] = 2 \ln x + \ln \left(1 - \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2} \right)$

ب- لدينا $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2 \frac{\ln x}{x} + \frac{\ln \left(1 - \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2} \right)}{x} = 0$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ و $\frac{0}{+\infty} = 0$

إذن (C) يقبل فرعاً شلجيمياً في اتجاه محور الأفاصيل بجوار $+\infty$.

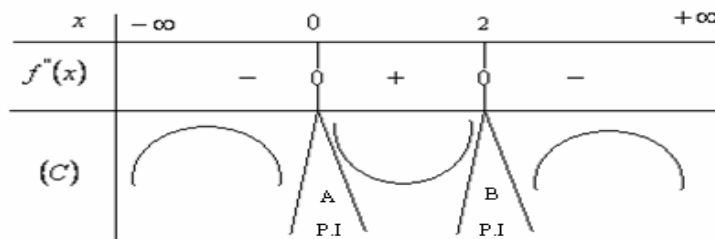
(4) أ- $\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = \frac{(x^2 - 2x + 2)}{x^2 - 2x + 2} = \frac{2(x-1)}{(x-1)^2 + 1}$

ب-



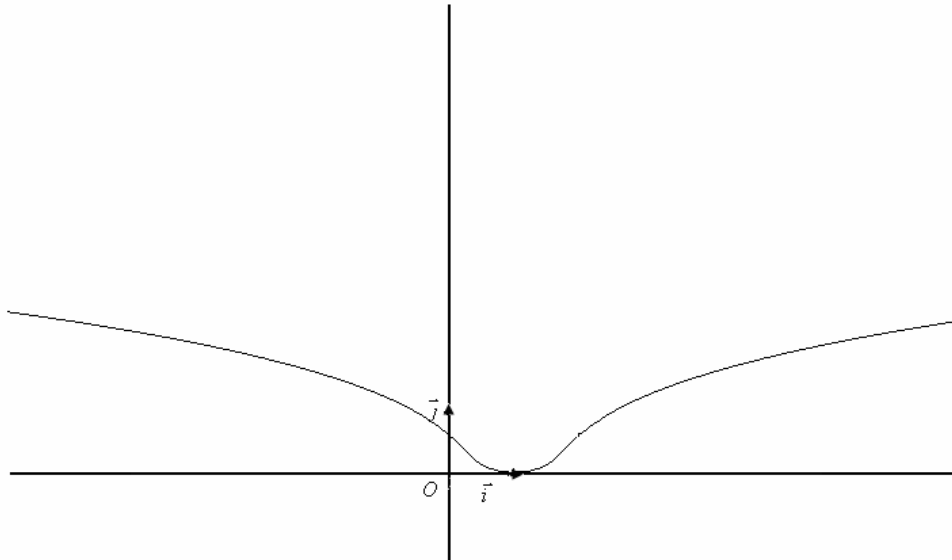
(5) أ- $\forall x \in \mathbb{R} \quad f''(x) = \frac{2(x^2 - 2x + 2) - 4(x-1)^2}{[(x-1)^2 + 1]^2} = \frac{2x(2-x)}{[(x-1)^2 + 1]^2}$

ب- نلخص إشارة $f''(x)$ في الجدول التالي :



المنحنى له نقطتي انعطاف $A(0, \ln(2))$ و $B(2, \ln(2))$

(6) المنحنى



(7) أ- h متصلة وتزايدية قطعاً على المجال $[1, +\infty[$ ، فهي تقابل من $[1, +\infty[$ نحو $h([1, +\infty[) = [0, +\infty[$.
 ب- لدينا : $\forall x \in [0, +\infty[, \forall y \in [1, +\infty[\quad y = h^{-1}(x) \Leftrightarrow x = h(y)$
 إذن $(x > 0 \Leftrightarrow e^x - 1 > 0) \quad y - 1 = \pm \sqrt{e^x - 1} \Leftrightarrow e^x = (y - 1)^2 + 1 \Leftrightarrow x = \ln[(y - 1)^2 + 1]$
 وبما أن $y - 1 > 0$ فإن $y - 1 = \sqrt{e^x - 1}$ إذن $\boxed{\forall x \in [0, +\infty[\quad h^{-1}(x) = 1 + \sqrt{e^x - 1}}$
 (8) أ- لدينا $f(x) = \ln[(x - 1)^2 + 1]$ إذن $t = x - 1 \Leftrightarrow f(t) = \ln(t^2 + 1)$ و $dt = dx$.
 ومنه $\int_0^1 f(x) dx = \int_{-1}^0 \ln(1 + t^2) dt$

ب- نضع $u(t) = \ln(1 + t^2)$ و $v'(t) = 1$ فنجد $u'(t) = \frac{2t}{1 + t^2}$ و $v(t) = t$ إذن :

$$\int_{-1}^0 \ln(1 + t^2) dt = \left[t \ln(1 + t^2) \right]_{-1}^0 - \int_{-1}^0 \frac{2t^2}{1 + t^2} dt = \ln 2 - 2 \int_{-1}^0 \frac{t^2}{1 + t^2} dt$$

ج- لدينا $\frac{t^2}{1 + t^2} = 1 - \frac{1}{1 + t^2}$ إذن $\int_{-1}^0 \frac{t^2}{1 + t^2} dt = \int_{-1}^0 1 - \frac{1}{1 + t^2} dt = \left[t - \arctg(t) \right]_{-1}^0 = 1 - \frac{\pi}{4}$

د- لتكن A مساحة الحيز المحصور بين المنحنى (C) ومحور الأفاصل والمستقيمين اللذين معادلتهما على التوالي

$$A = \int_{-1}^0 f(x) dx = \ln(2) - 2 \left(1 - \frac{\pi}{4} \right) = \ln(2) - 2 + \frac{\pi}{2} \quad \text{إذن } x = 0 \text{ و } x = 1$$