تصحيح الامتحان الوطني الموحد للدورة العادية2006
شعبة العلوم الاقتصادية

التمرين الأول

1) ليكن t عنصرا من $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ لدينا :

$$t^2-t+1-\frac{1}{1+t}=\frac{(t^2-t+1)(1+t)-1}{1+t}=\frac{t^2-t+1+t^3-t^2+t-1}{1+t}$$
$$=\frac{t^3}{1+t}$$

وباتالي فإن :
$$I=\int_0^1\frac{t^3}{1+t}dt=\int_0^1\left(t^2-t+1-\frac{1}{1+t}\right)dt$$
$$=\left[\frac{t^3}{3}-\frac{t^2}{2}+t-\ln(1+t)\right]_0^1=\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+1-\ln 2=\frac{5}{6}-\ln 2$$

2) حساب $J=\int_0^1 t^2\ln(1+t)dt$ باستعمال مكاملة بالأجزاء .

نضع $u(t)=\ln(1+t)$ و $v'(t)=t^2$

إذا : $u'(t)=\frac{1}{1+t}$ و $v(t)=\frac{t^3}{3}$

ومنه فإن :
$$J=\left[\frac{t^3}{3}\ln(1+t)\right]_0^1-\int_0^1\left(\frac{t^3}{3}\times\frac{1}{1+t}\right)dt$$
$$=\frac{1}{3}\ln 2-\frac{1}{3}I=\frac{2}{3}\ln 2-\frac{5}{18}$$

التمرين الثاني

1) بما أن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية هندسية أساسها q فإن $u_1=u_0q$ و $u_2=u_0q^2$ إذا :

$$u_0+u_1+u_2=\frac{7}{2}\Leftrightarrow 2+2q+2q^2=\frac{7}{2}$$
$$\Leftrightarrow 2q^2+2q-\frac{3}{2}=0$$

نحصل إذا على معادلة من الدرجة الثانية مجهولها q . وهي تقبل حلين $q_1=-\frac{3}{2}$ و $q_2=\frac{1}{2}$

وبما أن $q>0$ فإن $q=\frac{1}{2}$.

2) أ- لكل n من $\mathbb{N}$ لدينا $v_n=\ln(u_n)$ إذا $v_0=\ln(u_0)=\ln 2$. انبين أن $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية حسابية . لدينا $u_{n+1}=\frac{1}{2}u_n$ (لأن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$) إذا :

$$v_{n+1}=\ln(u_{n+1})=\ln\left(\frac{1}{2}u_n\right)=\ln(u_n)+\ln\frac{1}{2}=v_n-\ln 2$$

وبالتالي فإن $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية حسابية أساسها $r=-\ln 2$ وحدها الأول $v_0=\ln 2$.

ب- لدينا : $S_n = v_0 + v_1 + ...+ v_{n-1} = \frac{n}{2}\left(v_0 + v_{n-1}\right) = \frac{n}{2}\left[v_0 + \left(v_0 + (n-1)r\right)\right]$

$$= \frac{n}{2}\left[\ln 2 + \ln 2 + (n-1)(-\ln 2)\right] = \frac{n}{2}(-n+3)\ln 2$$

ج- لدينا $S_n + 9\ln 2 \le 0 \Leftrightarrow \left[\frac{n}{2}(-n+3)+9\right]\ln 2 \le 0$

$\Leftrightarrow -\frac{n^2}{2} + \frac{3n}{2} + 9 \le 0$ (لأن $\ln 2 > 0$)

$\Leftrightarrow -n^2 + 3n + 18 \le 0$

$\Leftrightarrow (6-n)(n+3) \le 0$

$\Leftrightarrow 6 - n \le 0$ (لأن $n+3>0$)

$\Leftrightarrow n \ge 6$

إذا أصغر عدد صحيح طبيعي يحقق الشرط المطلوب هو $n=6$

<u>التمرين الثالث</u>

I) 1) $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} - 1 = -1$ (لأن $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} = 0 \Leftarrow \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$)

$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x}{e^x} - 1 = -\infty$ (لأن $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0^+$)

$\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{e^x} - \frac{1}{x}\right) = +\infty$ (لأن $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{e^x} = +\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$)

2) أ- لكل x من $\mathbb{R}$ لدينا : $g'(x) = e^{-x} - xe^{-x} = (1-x)e^{-x}$.

نلاحظ أن إشارة $g'(x)$ هي إشارة $(1-x)$ إذا :

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ و $g'(x) > 0 \Leftrightarrow x < 1$ و $g'(x) < 0 \Leftrightarrow x > 1$

ويكون جدول تغيرات g على الشكل التالي :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
g	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{e}-1$	$\searrow$	-1

ب- لدينا $\frac{1}{e}-1$ قيمة قصوى مطلقة للدالة g على $\mathbb{R}$ إذا : $g(x) \le \frac{1}{e} - 1$ لكل x من $\mathbb{R}$

وبما أن $\frac{1}{e} - 1 < 0$ فإن $g(x) < 0$ لكل x من $\mathbb{R}$.

II) 1) أ- بما أن $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -1$ فإن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$ ومنه فإن (C) يقبل مقاربا أفقيا معادلته $y = 1$.

ب- بما أن $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$ فإن $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}x\left[\frac{g(x)}{x}\right]^2=-\infty$ (لأن $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{g(x)}{x}=+\infty$)

نستنتج من النتيجة أن (C) يقبل فرعا شلجميا في اتجاه محور الأراتيب .

2) أ- لكل x من $\mathbb{R}$ لدينا : $f'(x)=2g(x)\times g'(x)$

إذا إشارة $f'(x)$ هي عكس إشارة $g'(x)$ لأن $g(x)<0$.

ب- جدول تغيرات f :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	$+\infty$	$\searrow$	$\left(\frac{1}{e}-1\right)^2$	$\nearrow$	1

3) أ- معادلة المماس (T) للمنحنى (C) في النقطة ذات الأفصول 0 هي :

$y=f'(0)(x-0)+f(0)$ أي $y=-2x+1$

ب- التمثيل المبياني للدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$.