الدوال اللوغارتمية النيبيرية

الكفاءات المستهدفة :

– تعريف الدالة اللوغاريتم النيبيري.

و معرفة الخواص المميزة لها.

– استعمال حاسبة لحساب قيم الدوال.

تدخل في تعريفها الدالة اللوغاريتم النيبيري.

– حل معادلات أو متراجحات تتضمن لوغاريتمات.

– حساب نهايات جداءات أو حواصل قسمة يدخل فيها $\ln x$ و x^n .

– دراسة دوال من الشكل $\ln u$.

– استعمال الكتابات المألوفة: $\ln x$، e، $\log x$

– معرفة وتفسير النهايتين $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ و $\lim_{x \to 0^+} x \ln x = 0$

تصميم الدرس

- نشاطان تمهيديان
1 – تعريف، ترميز.
2 – الدالة ln و الترتيب.
3 – الدالة المشتقة لدالة من الشكل $x \rightarrow \ln[u(x)]$.
4 – الخاصية الجبرية الأساسية للدالة ln و استنتاجات لها.
5 – العدد e.
6 – نهايات مرجعية.
7 – جدول تغيرات الدالة ln و تمثيلها البياني.
8 – التزايد المقارن للدالة ln و الدوال "قوى".
9– الدالة اللوغاريتم العشري.
10 – الدالة اللوغاريتم ذات الأساس a
11 – الدالة اللوغاريتم ذات الأساس a.
12 – تمارين و مشكلات حول الدوال اللوغارتمية
13 – حلول التمارين حول الدوال اللوغارتمية.

نشاطان تمهيديان

الرمز ln (و هو موجود على واحدة من لمسات حاسبة علمية أو بيانية) هو رمز دالة تسمى **الدالة اللوغاريتم النيبيري**).

العدد	0,0001	0,007	1	100	100000
توجد له صورة بالدالة ln					

النشاط1 : تخمينات حول مجموعة تعريف الدالة لو و خواص لها.

***الأسئلة** :

1- استعمال اللمسة ln من حاسبتك لإكمال الجدول التالي بوضع نعم أو لا في كل خانة من الخانات التي تشكل سطره الثاني.

ماذا يبدو فيما يخص مجموعة تعريف الدالة ln ؟

2- دائما باستعمال الحاسبة،

- أ- أكمل الجدول التالي (ستعطي النتائج مدورة إلى 10^{-3})

A	0,05	0,25	1,75	3	7
B	0,2	3	2	5	2,5
Ln(a× b)					
Ln(a)+ln(b)					

A	$\sqrt{2}$	100	40	900	121,5
B	$\sqrt{3}$	3,7	0,025	$\frac{1}{900}$	13,71
Ln(a× b)					
Ln(a)+ln(b)					

A	$\sqrt{2}$	100	40	900	121,5
B	$\sqrt{3}$	3,7	0,025	$\frac{1}{900}$	13,71
Ln(a× b)					
Ln(a)+ln(b)					

ماذا يبدو لك؟

ما هي قيمة $\ln(1)$ ؟

ب-نقبل أن ما بدى لك عند الإجابة على الأسئلة السابقة صحيحا، من أجل a عدد حقيقي موجب تماما، كيفي:

- أعط عبارة كل من $\ln(a^2)$ ، $\ln(a^3)$،$\ln(a^4)$ بدلالة $\ln(a)$.
- استعمل المساواة $1 = a\times\left(\frac{1}{a}\right)$ لإعطاء عبارة $\ln\left(\frac{1}{a}\right)$ بدلالة $\ln(a)$

و المساواة $a = \left(\sqrt{a}\right)^2$ لإعطاء عبارة $\ln(\sqrt{a})$ بدلالة $\ln(a)$.

- أعط عبارة $\ln\left(\frac{a}{b}\right)$ بدلالة $\ln(a)$ و $\ln(b)$ و هذا من أجل a و b عددان حقيقيان موجبان تماما كيفيان.

*** الأجوبة :**

-1-الجدول يكمل كما يلي:

العدد	-100	-1	-0,5	-0,001	0
توجد له صورة بالدالة ln	لا	لا	لا	لا	لا

A	$\sqrt{2}$	100	40	900	121,5
B	$\sqrt{3}$	3,7	0,025	$\frac{1}{900}$	13,71
Ln(a× b)	0,896	5,914	0	0	7,418
Ln(a)+ln(b)	0,896	5,914	0	0	7,418

العدد	0,0001	0,007	1	100	100000
توجد له صورة بالدالة ln	نعم	نعم	نعم	نعم	نعم

يبدو و كأن مجموعة تعريف الدالة ln هي $\Re_+^*$

-2-

أ-إكمال الجدول

A	0,05	0,25	1,75	3	7
B	0,2	3	2	5	2,5
Ln(a× b)	-4,605	-0,288	1,253	2,708	2,862
Ln(a)+ln(b)	-4,605	-0,288	1,253	2,708	2,862

يبدو و كأنه: من أجل a و b عددان حقيقيان موجبان تماما

ln(a.b)=ln(a)+ln(b) $\ln 1 = \ln\left(900 \times \frac{1}{900}\right)$ منه $\boxed{\ln(1)=0}$ ....(1)

ب- نقبل إذن أم مجموعة تعريف الدالة ln هي $\Re_+^*$ و أنه من أجل كل عنصرين a و b من $\Re_+^*$ يكون : ln(a×b)=ln(a)+ln(b)

من أجل a عنصر كيفي من $\Re_+^*$.

- $a^2=a\times a$ منه $\ln(a^2)=\ln(a\times a)$ منه $\ln(a^2)=\ln(a)+\ln(b)$

منه : $\boxed{\ln(a^2)=2\ln(a)}$......(2)

$a^3=a^2\times a$ منه $\ln(a^3)=\ln(a^2\times a)$ منه $\ln(a^3)=\ln(a^2)+\ln(a)$.

منه: $\ln(a^3)=2\ln(a)+\ln(a)$ (من (1) نعوض $\ln(a^2)$ بـــ $2\ln(a)$)

منه $\boxed{\ln(a^3)=3\ln(a)}$..............(3)

و بطريقة مماثلة ، نجد $\boxed{\ln(a^4)=4\ln(a)}$.....(4)

- لدينا $a\times\left(\frac{1}{a}\right)=1$ منه $\ln\left[a\times\left(\frac{1}{a}\right)\right]=\ln(1)$ .....(α)

و مما سبق $\ln(1)=0$ و $\ln\left(a\times\frac{1}{a}\right)=\ln(a)+\ln\left(\frac{1}{a}\right)$

و هكذا المساواة (α) تصبح: $\ln(a)+\ln\left(\frac{1}{a}\right)$

و عليه : $\boxed{\ln\left(\frac{1}{a}\right)=-\ln(a)}$......(5)

- و لدينا : $(\sqrt{a})^2=a$ منه $\ln((\sqrt{a})^2)=\ln(a)$ .....(β)

و $\ln(\sqrt{a})^2=2\ln(\sqrt{a})$ و (β) تصبح :

$$2\ln(\sqrt{a})=\ln(a)$$

و عليه : $\boxed{\ln(\sqrt{a})=\frac{1}{2}\ln(a)}$ ......(6)

- من أجل a و b عنصران من $\Re_+^*$

$$\ln\left(\frac{a}{b}\right)=\ln\left(a\times\frac{1}{b}\right)$$

$$=\ln(a)+\ln\left(\frac{1}{b}\right)$$

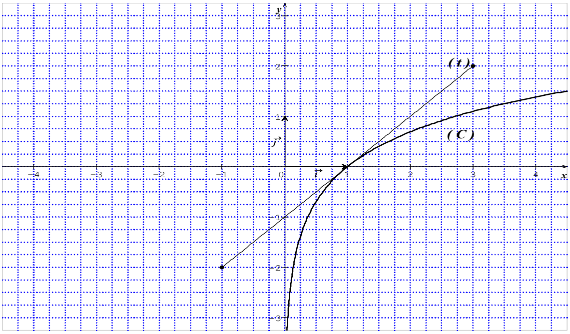
$$=\ln(a)-\ln(b)$$ (حسب المساواة (5))

منه : $\boxed{\ln\left(\frac{a}{b}\right)=\ln(a)-\ln(b)}$

النشاط2: تخمينات أخرى حول الدالة ln

*** المعطيات و الأسئلة :**

-1-في الشكل الموالي (C) هو المنحني الممثل للدالة ln (رسم باستعمال برمجية (sinequanon)) بالنسبة إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.



- أ- بالاعتماد على الشكل ،ماذا يمكنك أن تخمن فيما يخص:

- اتجاه تغير الدالة ln ؟
- $\lim_{+\infty} \ln$ و $\lim_{0} \ln$؟

-ب-بقراءة بيانية ،أثبت أن المعادلة ln(x)=1 حيث x هو المجهول في $\Re$ لها حل وحيد و أعط حصرا لهذا الحل.

-2-

-أ- إذا كان a عددا حقيقيا و كان I مجالا بحيث $a\in I$ و كانتf دالة مجموعة تعريفها تحتوي المجال I و كانت النهاية $\lim_{0}\left(h \to \frac{f(a+h)-f(a)}{h}\right)$

(أي النهاية $\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$) تساوي عددا حقيقيا ℓ.

ماذا يمكننا أن نقول عن الدالة f و ما هو العدد ℓ بالنسبة إلى الدالة f ؟

-ب-لقد أنجزت الجداول (I)، (II)،(III)،(IV) التالية ، حيث القيم في السطر الثاني من كل جدول مدورة إلى 10^{-5} ، باستعمال حاسبة قابلة للبرمجة.

الجدول I:

h	-0,003	-0,002	-0,001	0	0,001	0,002	0,003
$\frac{(0,5+h)-\ln(0,5)}{h}$	2,00602	2,00401	2,00200		1,99800	1,99601	1,99402

الجدول II:

h	-0,003	-0,002	-0,001	0
$\frac{\ln(2+h)-\ln(2)}{h}$	0,50038	0,50025	0,50013	

h	0,001	0,002	0,003
$\frac{\ln(2+h)-\ln(2)}{h}$	0,49988	0,49975	0,49963

الجدول III:

h	-0,003	-0,002	-0,001	0
$\frac{\ln(10+h)-\ln(10)}{h}$	0,10002	0,10001	0,10001	

h	0,001	0,002	0,003
$\frac{\ln(10+h)-\ln(10)}{h}$	0,10000	0,09999	0,09999

الجدول IV:

h	-0,003	-0,002	-0,001	0
$\frac{\ln(0,1+h)-\ln(0,1)}{h}$	10,153069	10,10135	10,05034	

h	0,001	0,002	0,003
$\dfrac{\ln(0{,}1+h)-\ln(0{,}1)}{h}$	9,95033	9,90131	9,85293

ماذا تلاحظ فيما يخص الجدول (I) ؟ فيما يخص الجدول (II) ؟ فيما يخص الجدول (III) ؟فيما يخص الجدول (IV)؟

و ماذا يمكنك أن تخمن فيما يخص الدالة ln من حيث القابلية للاشتقاق؟

و ما هو العنصر في الشكل الذي يتماشى مع هذا التخمين؟

***الأجوبة :**

-**1**-أ- بالاعتماد على الشكل يمكننا أن نخمن:

- الدالة ln متزايدة تماما على $\Re_+^*$.
- $\lim_{0} \ln = -\infty$ و $\lim_{+\infty} \ln = +\infty$.

-ب- حلول المعادلة ln(x)=1 هي فواصل نقط تقاطع المنحني (C) و المستقيم (d) ذو المعادلة y=1 و من خلال الشكل نرى أن (C)و (d) يتقاطعان في نقطة وحيدة فاصلتها بين 2,75 و2,5.

منه: بقراءة بيانية نستنتج أن المعادلة ln(x)=1 لها حل وحيد وأن هذا الحل ينتمي إلى المجال]2,75; 2,5[.

-2-

- أ - إذا كانت النهاية $\lim_{0}\left(h \to \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}\right)$ تساوي عددا حقيقيا ℓ تكون الدالة f قابلة للاشتقاق عند العدد a و ℓ هو العدد المشتق للدالة f عند العدد a واصطلاحا نكتب $f'(a)=\ell$.

- ب -

- الملاحظات حول الجداول:

في الجدول (I):"كل ما اقتربت قيم h من 0 فإن قيم $\dfrac{\ln(0{,}5+h)-\ln(0{,}5)}{h}$ تقترب من2"...(1)

في الجدول (II):"كل ما اقتربت قيم h من 0 فإن قيم $\dfrac{\ln(2+h)-\ln(2)}{h}$ تقترب من0,5"...(2)

في الجدول (III):"كل ما اقتربت قيم h من 0 فإن قيم $\dfrac{\ln(10+h)-\ln(10)}{h}$ تقترب من0,1"...(3)

في الجدول (IV):"كل ما اقتربت قيم h من 0 فإن قيم $\dfrac{\ln(0{,}1+h)-\ln(0{,}1)}{h}$ تقترب من10"...(4)

• **التخمينات :**

من(1): $\lim_{h\to 0}\left(\frac{\ln(0,5+h)-\ln(0,5)}{h}\right)=2$ منه ln قابلة للاشتقاق عند 0,5

و $\ln'(0,5)=2$ (A)

من (2):ln قابلة للاشتقاق عند 2 و $\ln'(2)=0,5$ (B)

من (3):ln قابلة للاشتقاق عند 10 و $\ln'(10)=0,1$ (C)

من (4):ln قابلة للاشتقاق عند 0,1 و $\ln'(0,1)=10$ (D)

تخمين آخر:

من (A) : $\ln'(0,5)=\frac{1}{0,5}$ و من (B) : $\ln'(2)=\frac{1}{2}$

و من (C) : $\ln'(10)=\frac{1}{10}$ و من (D) : $\ln'(0,1)=\frac{1}{0,1}$.

و من الشكل في كل نقطة من نقطة المنحني (C) يقبل مماسا لا يوازي حامل محور التراتيب وعليه يمكننا أن نفترض أن الدالة ln قابلة للاشتقاق على المجال $]0;+\infty[$ و أن دالتها المشتقة $\ln'$ معرفة على $]0;+\infty[$ بالدستور $\ln'(x)=\frac{1}{x}$

في الشكل (t) هو مماس (C) عند النقطة $A(1;0)$ و$B(0;1)$ منه معامل توجيه (t) هو $\frac{(-1)-0}{0-1}$ و هو 1.

و هو ،حسب التعريف العدد المشتق للدالة ln عند فاصلة A إذن $\ln'(1)=1$ و بالتالي: $\ln'(1)=\frac{1}{1}$ و هذه النتيجة تتماشى مع التخمين السابق.

*** الملاحظة :**

بعد كل هذه التخمينات، نرفع الستار على الدالة ln بإعطاء تعريفها:

الدالة ln هي الدالة الأصلية للدالة "مقلوب" على المجال التي تأخذ القيمة 0 من أجل القيمة1 للمتغير.

(الدالة "مقلوب" مستمرة على $]0;+\infty[$ منه هي تقبل دوالا أصلية على هذا المجال و حسب المبرهنة من بين الدوال أصلية للدالة " مقلوب" على المجال $]0;+\infty[$ هناك واحدة و واحدة فقط تأخذ القيمة 0 من أجل القيمة واحد للمتغير وعليه وجود الدالة ln و وحدانيتها مضمونان) و في الدرس سنتوسع في دراسة الدالة ln التي ستلتحق بــ : " الدوال المرجعية".

تعريف، ترميز

جميع الدوال المعتبرة في هذا الدرس هي دوال عددية لمتغير حقيقي، و في حالة عدم التحديد، كل مجال معتبر هو مجال – من $\Re$– يحتوي مجالا مفتوحا غير خال.

- الدالة اللوغاريتم النبيري هي ، بالتعريف، الدالة الأصلية للدالة "مقلوب" على المجال $]0;+\infty[$ التي تأخذ القيمة 0 من أجل القيمة 1 للمتغير.
- رمز الدالة اللوغاريتم النبيري هو $\ln$.

بعبارات أخرى :

الدالة اللوغاريتم النيبيري هي الدالة المرمز إليها بالرمز $\ln$ و المعرفة بما يلي:

مجموعة تعريف الدالة $\ln$ هي مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة تماما.

الدالة $\ln$ قابلة للاشتقاق على المجال المفتوح $]0;+\infty[$ و دالتها المشتقة $\ln'$ معرفة على المجال $]0;+\infty[$ بالدستور: $\ln'(x)=\dfrac{1}{x}$

صورة العدد 1بالدالة $\ln$ هي 0 (أي $\ln(1)=0$)

* للحصول على قيم (مقربة) للدالة $\ln$ تستعمل اللمسة $\boxed{\text{LN}}$ لحاسبة علمية أو بيانية (في بعض الحاسبات اللمسة هي $\boxed{\ln}$).

فمثلا، لحساب قيمة مقربة للعدد $\dfrac{\ln(2+\sqrt{3})}{1+\ln(7)}$ باستعمال حاسبة علمية تكون الخطوات، مرتبة من اليسار إلى اليمين كما يلي:

ln	(	2	+	√	3	)	÷	(	1	+	ln	7	)	=

فيظهر على الشاشة : 0,447046186

***تمرين:**تعيين مجموعة تعريف دالة

نص التمرين :

عين المجموعة D_f مجموعة تعريف الدالة f المعرفة بالدستور : $f(x)=\dfrac{\ln(x^2-5x+4)}{x+2}$

الحل: D_f هي مجموعة الأعداد الحقيقية x التي تحقق:

$$\begin{cases} (1)\ldots\ldots\ x^2-5x+4>0 \\ \text{و} \\ (2)\ldots\ldots\ldots\ldots x+2\neq 0 \end{cases}$$

(1) هو الشرط اللازم والكافي حتى يكون $\ln(x^2-5x+4)$ موجودا في $\Re$

لنحل، في $\Re$، المتراجحة $x^2-5x+4>0$.

لتكن $T(x)$ ثلاثي الحدود للمتغير الحقيقي x حيث: $T(x)=x^2-5x+4$

Δ مميز $T(x)$ $\Delta=9$ حلا المعادلة $T(x)=0$ هما1 و 4 و معامل الحد الأعلى درجة لكثير الحدود$T(x)$ هو 1 و هو موجب تماما و عليه إشارة $T(x)$.

تبعا لقيم x تلخص في الجدول التالي:

x	$-\infty$		1		4		$+\infty$
إشارة$T(x)$		+	0	-	0	+	

منه مجموعة الأعداد الحقيقية x التي تحقق (1)هي $]-\infty;1[\cup]4;+\infty[$

و الشرط (2) هو $x\neq-2$

و عليه $\boxed{D_f=]-\infty;2[\cup]2;1[\cup]4;+\infty[}$

الدالة ln و الترتيب

تعريف الدالة ln لدينا: مجموعة تعريف الدالة ln هي المجال $]0;+\infty[$ و الدالة ln قابلة للاشتقاق على المجال $]0;+\infty[$ و دالتها المشتقة $\ln'$ معرفة على المجال $]0;+\infty[$ بالدستور $\ln'(x)=\dfrac{1}{x}$

و مهما تكون قيمة x في المجال $]0;+\infty[$ ، $\dfrac{1}{x}>0$ و عليه مهما تكون قيمة x في المجال $]0;+\infty[$ $\ln'(x)>0$ و عليه :

مبرهنة:

الدالة ln متزايدة تماما على المجال $]0;+\infty[$

استنتاجات:

بما أن الدالة ln متزايدة تماما على المجال $]0;+\infty[$ فإن هذه الدالة "تحافظ على الترتيب و عليه:

مهما يكون العددان الحقيقيان الموجبان تماما a و b :
$a<b$ يكافئ $\ln(a)<\ln(b)$
$a=b$ يكافئ $\ln(a)=\ln(b)$
$a\leq b$ يكافئ $\ln(a)\leq\ln(b)$

و بالأخص:مهما يكون العدد الحقيقيx الموجب تماما:

$1<x$ يكتافئ $\ln(1)<\ln(x)$

$1=x$ يكافئ $\ln(1)=\ln(x)$ و بما أن $\ln(1)=0$

$x<1$ يكافئ $\ln(x)<\ln(1)$

مهما يكون العدد الحقيقي x **الموجب تماما** :
$x>1$ يكافئ $\ln(x)>0$
$x<1$ يكافئ $\ln(x)<0$
$x=1$ يكافئ $\ln(x)=0$

مثال:

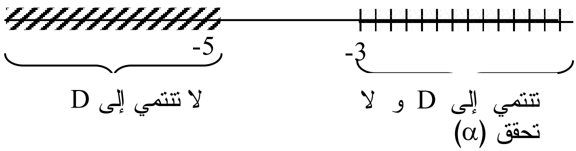
لنحل ، في $\Re$، المتراجحة $\ln(x+5)<\ln(2)$.....(α) حيث x هو المجهول .

D مجموعة تعريف المتراجحة (α) هي مجموعة الأعداد الحقيقية x التي تحقق $x>-5$

و من أجل x في المجموعة D:

(α) تكافئ $(x+5)<2$ (لأن الدالة ln متزايدة تماما على المجال $]0\,;+\infty[$)

تكافئ $x<-3$



منه $\boxed{\text{مجموعة حلول المتراجحة } (\alpha) \text{ هي المجال }]-5\,;-3[}$

ⓘلكي نحل معادلة (أو متراجحة) -ذات المجهول الحقيقي- مجموعة تعريفها D ليست $\Re$ كاملة: نعين المجموعة D ثم نحل المعادلة (أو المتراجحة) في المجموعة D .

الدالة المشتقة لدالة من الشكل $x \rightarrow \ln[u(x)]$

مبرهنة :

ليكن I مجالا و لتكن u دالة مجموعة تعريفها تحتوي المجال I. إذا كان : 1) الدالة u قابلة للاشتقاق على المجال I. 2) مهما تكون قيمة x في المجال I، $u(x)>0$. فإن: الدالة f المعرفة بالدستور $f(x)=\ln[u(x)]$ قابلة للاشتقاق على المجال I و دالتها المشتقة f' بحيث مهما تكون قيمة x في I: $f'(x)=\dfrac{u'(x)}{u(x)}$.

البرهان :

و معطيات النص السابق و فرضياته سائدة :

لدينا : من أجل كل عنصر x من I : $f(x)=\ln[u(x)]$

منه : $f(x)=(\ln o\ u)(x)$

و u قابلة للاشتقاق على I.

مهما يكون العنصر x_0 من I، $u(x_0)>0$ منه ln قابلة للاشتقاق عند $u(x_0)$ (لأن الدالة ln قابلة للاشتقاق عند كل عدد حقيقي موجب تماما)

منه و حسب المبرهنة حول اشتقاق دالة مركبة ، الدالة المركبة (lnou) قابلة للاشتقاق على I و دالتها المشتقة $(\ln o u)'$ بحيث مهما تكون قيمة x في I : $(\ln o u)'(x)=\ln'(u(x))\times u'(x)$

و مهما تكون قيمة x في $]0;+\infty[$، $\ln'(x)=\dfrac{1}{x}$

منه مهما تكون قيمة x في I:

$$(\ln\circ u)'(x)=\frac{1}{u(x)}\times u'(x)$$

إذن مهما تكون قيمة x في I : $f'(x)=\dfrac{u'(x)}{u(x)}$

مثال :

لتكن f الدالة المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بالدستور:

$f(x)=\ln(x^3+x^2+3x)$ مهما تكون قيمة x في $]0;+\infty[$: $f(x)=\ln[u(x)]$ حيث: $u(x)=x^3+x^2+3x$

و لدينا u قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ و مهما تكون قيمة x في $]0;+\infty[$ $u(x)>0$ منه و حسب المبرهنة الدالة f قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ و مهمال تكون قيمة x في $]0;+\infty[$:

$$f'(x)=\frac{u'(x)}{u(x)}$$

أي: $$f'(x)=\frac{3x^2+2x+3}{x^3+x^2+3x}$$

استنتاج:

مبرهنة :

> ليكن I مجالا و لتكن u دالة مجموعة تعريفها تحتوي المجال I.
>
> إذا كان : 1) u قابلة للاشتقاق على المجال I.
>
> 2) مهما تكون قيمة x في I: $u(x)>0$
>
> فإن: الدالة G المعرفة على المجال I بالدستور $G(x)=\ln[u(x)]$ هي واحدة من الدوال الأصلية،
>
> على المجال I ، للدالة g المعرفة بالدستور: $g(x)=\dfrac{u'(x)}{u(x)}$

البرهان:

و معطيات النص السابق و فرضياته سائدة ، حسب المبرهنة السابقة الدالة G قابلة للاشتقاق على I و مهما تكون قيمة x في I: $G'(x)=g(x)$. منه و حسب تعريف دالة أصلية لدالة على مجال، الدالة G هي واحدة من الدوال الأصلية للدالة g على المجال I.

مثال:

- لتكن f الدالة المعرفة ، على المجال $]1;+\infty[$ بالدستور : $f(x)=\dfrac{1}{x\ln(x)}$

مهما تكون قيمة x في المجال $]1;+\infty[$: $\ln(x)>0$ و $\ln'(x)=\dfrac{1}{x}$

و $f(x)=\dfrac{1}{x}\cdot\dfrac{1}{\ln(x)}$

منه $f(x)=\dfrac{\left(\dfrac{1}{x}\right)}{\ln(x)}$ منه $f(x)=\dfrac{\ln'(x)}{\ln(x)}$

و عليه الدالة F المعرفة على المجال $]1;+\infty[$ بالدستور $\ln[\ln(x)]$ هي واحدة من الدوال الأصلية للدالة f على المجال $]1;+\infty[$.

- لتكن g الدالة المعرفة على المجال $]-\infty;-2[$ بالدستور

$$g(x)=\frac{x^2-x-4}{x^2-4}$$

مهما تكون قيمة x في المجال]-∞ ;-2[لدينا :

$$g(x) = \frac{(x^2-4)-x}{x^2-4} \quad \text{منه} \quad g(x) = 1 - \frac{x}{x^2-4}$$

بوضع $u(x)=x^2-4$ لدينا : $u'(x)=2x$ منه : $x = \frac{1}{2}u'(x)$

منه $g(x) = 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{u'(x)}{u(x)}\right)$

و لدينا $u(x)>0$، من أجل كل عنصر x من المجال]-∞ ;-2[.

- الدالة $x \to \ln[u(x)]$ هي واحدة من الدوال الأصلية على]-∞ ;-2[، للدالة $x \to \frac{u'(x)}{u(x)}$
- الدالة $x \to x$ هي واحدة من الدوال الأصلية للدالة $x \to 1$، على]-∞ ;-2[منه ، و حسب المبرهنات حول الدوال الأصلية.

الدالة G ، المعرفة على المجال]-∞ ;-2[، بالدستور $G(x) = x - \frac{1}{2}\ln(x^2-4)$ هي واحدة من الدوال الأصلية للدالة g على المجال]-∞ ;-2[.

ⓘعند تعيين دالة أصلية لحاصل قسمة دالة علة دالة ، على مجال I : • نحاول إبراز حواصل قسمة :

–من الشكل $\frac{u'(x)}{u(x)}$ حيث : $u(x)>0$ ، من أجل كل عنصر x من I.

–أو من الشكل $\frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$ حيث : $u(x)>0$،من أجل كل عنصر x من I.

– أو من الشكل $\frac{u'(x)}{(u(x))^n}$ حيث n عدد طبيعي أكبر تماما من 1 و من أجل كل عنصر x من I : $u(x)\neq 0$

– ثم نطبق المبرهنات حول الدوال الأصلية .

الخاصية الجبرية الأساسية للدالة ln و استنتاجات لها

مبرهنة :الخاصية الجبرية الأساسية للدالة ln

من أجل كل عددين حقيقيين موجبين تماما a و b يكون:

$\ln(a.b)=\ln(a)+\ln(b)$

البرهان:

ليكن a و b عددين حقيقيين موجبين تماما.

لنعتبر الدالة d المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بالدستور:

$D(x)=\ln(abx)-\ln(bx)$

حسب المبرهنات على المشتقات و بالأخص مشتقة دالة من الشكل $x\to\ln[u(x)]$ الدالة d قابلة للاشتقاق على المجال $]0;+\infty[$ و دالتها المشتقة d' بحيث مهما تكون قيمة x في $]0;+\infty[$:

$$d'(x)=\frac{ab}{abx}-\frac{b}{bx}$$

و بالتالي مهما تكون قيمة x في $]0;+\infty[$ يكون $d'(x)=0$ ، و عليه الدالة d ثابتة على المجال $]0;+\infty[$ منه مهما يكون العنصران x_1 و x_2 من المجال $]0;+\infty[$ $d(x_1)=d(x_2)$

و بالأخص: $d(1)=d\left(\frac{1}{b}\right)$

منه $\ln(ab)-\ln(b)=\ln\left(ab.\frac{1}{b}\right)-\ln\left(b.\frac{1}{b}\right)$

إذن : $\ln(ab)-\ln(b)=\ln(a)-\ln(1)$ و لدينا: $\ln(1)=0$ منه :

$\ln(ab)-\ln(b)=\ln(a)$

و عليه : $\ln(ab)=\ln(a)+\ln(b)$

استنتاجات للخاصية الجبرية الأساسية للدالة ln :

مبرهنة :

مهما يكون العددان الحقيقيان الموجبان تماما a و b يكون:

$$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$$

$$\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a)$$

$$\ln\left(\sqrt{a}\right) = \frac{1}{2}\ln(a)$$

لقد تم البرهان على النتيجة السابقة في مرحلة من مراحل النشاط1

مبرهنة :

من اجل كل عدد حقيقي موجب تماما a و من أجل كل عدد صحيح n يكون: $\boxed{\ln(a^n)=n.\ln(a)}$

البرهان:

ليكن a عددا حقيقيا موجبا تماما.

- لدينا : $\ln(a^0)=\ln(1)$ منه $\ln(a^0)=0$ منه : $\ln(a^0)=0.\ln(a)$ ..(1)

من أجل كل عدد طبيعي m

إذا كان $\ln(a^m)=m.\ln(a)$ يكون $\ln(a^{m+1})=\ln(a^m\times a)$

$$=\ln(a^m)+\ln(a)$$
$$=m.\ln(a)+\ln(a)$$
$$=(m+1).\ln(a)$$

منه : من أجل كل عدد طبيعي m إذا كان: $\ln(a^m)=m.\ln(a)$ يكون

$\ln(a^{m+1})=(m+1).\ln(a)$....(2)

من (1) و (2) و حسب مبدأ البرهان بالتراجع المساواة $\ln(a^n)=n.\ln(a)$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي (أي من أجل كل عدد صحيح موجب) n.....(I) .

- مهما يكون العدد الصحيح السالب n يوجد عدد صحيح موجب p بحيث : $n=-p$

و $\ln(a^n)=\ln(a^{-p})$

$$= \ln\left(\frac{1}{a^p}\right)$$

$$= -\ln(a^p)$$

$=-p.\ln(a)$

$=n.\ln(a)$

(لأن p عدد صحيح موجب نستطيع تطبيق (I))

منه : المساواة $\ln(a^n)=n.\ln(a)$ صحيحة من أجل كل عدد صحيح سالب n...(II) .

و من (I) و (II) المساواة $\ln(a^n)=n.\ln(a)$ صحيحة من أجل كل عدد صحيح n و كل عدد حقيقي موجب تماما a .

أمثلة :

$\ln(6)=\ln(2\times3)$ منه $\ln(6)=\ln(2)+\ln(3)$

$\ln(2,5) = \ln\left(\frac{5}{2}\right)$ منه $\ln(2,5)=\ln(5)-\ln(2)$

$\ln(243)=\ln(7^3)$ منه $\ln(243)=3.\ln(7)$

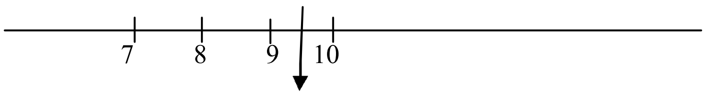
من أجل n عدد طبيعي : $2^n>1000$ يكافئ $\ln(2^n)>\ln(1000)$

(لأن الدالة ln متزايدة تماما على $]0;+\infty[$).

منه : $2^n>1000$ يكافئ $n.\ln(2)>\ln(1000)$

يكافئ $n > \frac{\ln(1000)}{\ln(2)}$ ($2>1$ منه $\ln(2)>0$)

و باستعمال حاسبة : نجد $\frac{\ln(1000)}{\ln(2)} = 9,96578...$



$$\frac{\ln(1000)}{\ln(2)}$$

منه : من أجل n عدد طبيعي، حتى يكون $2^n>1000$ يلزم و يكفي أن يكون $n\geq10$.

العدد e

باستعمال حاسبة نجد ....$\ln(2)=0,693$ و ...$\ln(3)=1,098$

منه $\ln(2)\leq 1\leq \ln(3)$ و الدالة ln مستمرة على المجال [2 ;3] (لأنها قابلة للاشتقاق على $\Re_+^*$).

و الدالة ln متزايدة تماما على المجال [2 ;3] (لأنها متزايدة تماما على $\Re_+^*$) .

منه و حسب المبرهنة حول دالة مستمرة و رتيبة تماما على مجال مغلق، من بين الأعداد التي تنتمي إلى المجال [2 ;3] يوجد عدد وحيد يرمز إليه بالرمز e بحيث : $\ln(e)=1$ و لنا $e\neq 3$ و $e\neq 2$ لأن $\ln(3)\neq 1$ و $\ln(2)\neq 1$.

و بما أن الدالة ln متزايدة تمام على $]0 ;+\infty[$ مهما يكون العنصر x من $\Re_+^*$.

إذا كان : $x>e$ يكون $\ln(x)>\ln(e)$ منه $\ln(x)>1$ منه : $\ln(x)\neq 1$

إذا كان : $0<x<e$ يكون $\ln(x)<\ln(e)$ منه $\ln(x)<1$ منه $\ln(x)\neq 1$

و عليه مهما يكون العنصر x من $\Re_+^*$ ، إذا كان $x\neq e$ يكون $\ln(x)\neq 1$

منه e هو العدد الحقيقي الموجب تماما الوحيد الذي صورته بالدالة ln تساوي 1.

مبرهنة و ترميز:

من بين الأعداد الحقيقية الموجبة تماما يوجد عدد "وحيد" يرمز إليه بالرمز e صورته بالدالة ln تساوي 1 (العدد e معرف إذن بالمساواة $\ln(e)=1$)

ملاحظات :

- مثل ما آلفنا العدد π و العدد $\sqrt{2}$ و أعداد أخرى علينا أن نألف العدد e (المعرف بـــ: $e\in\Re_+^*$ و $\ln(1)=1$)
- قيمة عشرية مقربة إلى 10^{-5} بالنقصان للعدد e هي 2,71828
- للحصول على قيمة عشرية مقربة للعدد e باستعمال حاسبة :

2ndF	ln	1	=

و للحصول على قيمة عشرية مقربة لقوة من الشكل e^n :

2ndF	ln	n	=

أمثلة حول استعمال العدد e :

- بدون استعمال حاسبة $\ln(e^2)=2.\ln(e)$ منه $\ln(e^2)=2,1$

منه: $\ln(e^2)=2$

و بصورة عامة، من أجل $n\in Z$ ، $\ln(e^2)=n.\ln(e)$

$=n.1$

منه : $\ln(e^n)=n$

- من أجل x عدد حقيقي موجب:

$\ln\left(\sqrt{x}+3\right)>4$ يكافئ $\ln\left(\sqrt{x}+3\right)>4.1$

يكافئ $\ln\left(\sqrt{x}+3\right)>4.\ln(e)$ (الدالةln متزايدة تماما على $\Re_{+++}$)

يكافئ $\ln\left(\sqrt{x}+3\right)>\ln(e^4)$

يكافئ $(\sqrt{x}+3)>e^4$

يكافئ $\sqrt{x}>e^4-3$ [لأن $\sqrt{x}$ و (e^4-3)موجبان]

يكافئ $x>\left(e^4-3\right)^2$

نهايات مرجعية

مبرهنات (مقبولة)

$\boxed{\lim\limits_{+\infty}\ln=+\infty}$ $\boxed{\lim\limits_{0^+}\ln=-\infty}$ أي: $\boxed{\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(x)=+\infty\\ \lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\ln(x)=-\infty\end{array}}$

من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما a

$\boxed{\lim\limits_{a}\ln=\ln(a)}$ أي $\boxed{\lim\limits_{x\to a}\ln(x)=\ln(a)}$

مثال:

لتكن f الدالة المعرفة على المجال $]2;+\infty[$ بالدستور :

$$f(x)=\ln\left(\frac{x-1}{2x-4}\right)$$

لدينا : $\lim\limits_{+\infty}\left(x \to \dfrac{x-1}{2x-4}\right) = \dfrac{1}{2}$ (حسب المبرهنة حول نهاية دالة ناطقة عند +∞)

و $\lim\limits_{\frac{1}{2}} \ln = \ln\left(\dfrac{1}{2}\right)$ (حسب النهايات المرجعية للدالة ln)

منه و حسب المبرهنة حول نهاية دالة مركبة : $\lim\limits_{+\infty} f = \ln\left(\dfrac{1}{2}\right)$

أي : $\boxed{\lim\limits_{+\infty} f = -\ln(2)}$

جدول تغيرات الدالة ln و تمثيلها البياني

* من النتائج المكتسبة و المتعلقة بمجموعة تعريف الدالة ln و نهاياتها و اتجاه تغيرها يكون جدول تغيرات الدالة ln كما يلي:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
ln(x)		$-\infty$ ↗	$+\infty$

* ليكن (C) المنحني الممثل للدالة ln في المستوي المنسوب إلى معلم $(O;\vec{i};\vec{j})$.

– لدينا : $\lim\limits_{0^+} \ln = -\infty$ منه المستقيم ذو المعادلة x=0 (أي حامل محور التراتيب) هو مستقيم مقارب للمنحني (C).

– النقطة A(1 ;0) تنتمي إلى (C) و معادلة للمماس (t) للمنحني (C) عند A هي y=ln′(1).(x-1)+ln(1) و لنا ln(1)=0 و $\ln'(1) = \dfrac{1}{1}$

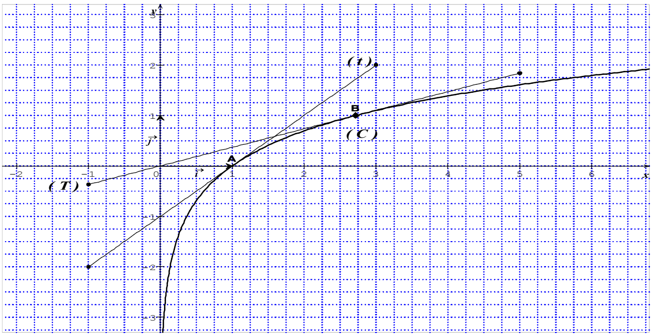
منه (t) :y=x-1

– النقطة B(e ;1) تنتمي إلى (C) و معادلة للمماس (t) للمنحني (C) عند B هي : y=ln′(e).(x-e)+ln(e) و لنا : $\ln'(e) = \dfrac{1}{e}$ و ln(e)=1.

و بعد التعويض و الحسابات : $(T): y=\frac{1}{e}x$

منه المستقيم (T) يشمل النقطة O مبدأ المعلم

منه الشكل:



التزايد المقارن للدالة ln و الدوال "قوى"

- **دراسة مسألة :**

فرع المنحني الممثل للدالة ln المرفق بالقيم الكبيرة للمتغير يفكرنا بفرع المنحني الممثل للدالة "جذر تربيعي" المرفق بالقيم الكبيرة للمتغير لذا نهتم بالفرق $\sqrt{x}-\ln(x)$ من أجل قيم x الكبيرة.

لذا لندرس اتجاه تغير الدالة δ المعرفة على المجال $]e^2;+\infty[$ بالدستور: $\delta(x)=\sqrt{x}-\ln(x)$ (اختيار المجال تم قصد تبسيط الحسابات).

δ قابلة للاشتقاق على المجال $]e^2;+\infty[$ و دالتها المشتقة δ' معرفة على $]e^2;+\infty[$ بالدستور :

$$\delta'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{x}$$

و من أجل كل عنصر x من $]e^2;+\infty[$ لدينا: $\delta'(x)=\frac{\sqrt{x}-2}{2x}$

و لدينا : $\sqrt{x}\geq e$ منه $\sqrt{x}-2\geq e-2$ و $e-2>0$

$\sqrt{x}-2>0$ و $2x>0$ منه $\delta'(x)>0$ منه الدالة δ متزايدة تماما على المجال $]e^2;+\infty[$.

و من أجل كل عنصر x من $]e^2;+\infty[$ ، لدينا $x \geq e^2$ منه $\delta(x) \geq \delta(e^2)$

ولنا: $\delta(e^2)=\sqrt{e^2}-\ln(e^2)$ منه $\delta(e^2)=e-2$ و $e-2>0$ منه $\delta(e^2)>0$ منه $\delta(x)>0$ و عليه :

من أجل كل عنصر x من المجال $]e^2;+\infty[$ يكون : $\sqrt{x}-\ln(x)>0$ (أي يكون $\sqrt{x}>\ln(x)$)

- **استنتاج:**

من أجل كل قيم x في المجال $]e^2;+\infty[$:

$\ln(x)<\sqrt{x}$ (مما سبق)

$x \geq e^2$ منه $\ln(x) \geq 2$ منه $\ln(x)>0$ و $x>0$

و عليه : من أجل كل قيم x في $]e^2;+\infty[$:

$$0<\ln(x)<\sqrt{x}$$

و منه : $$0<\frac{\ln(x)}{x}<\frac{\sqrt{x}}{x}$$

منه : $0<\frac{\ln(x)}{x}<\frac{1}{\sqrt{x}}$ و لدينا: $\lim\limits_{+\infty}\left(x \to \frac{1}{x}\right)=0$ و $\lim\limits_{+\infty}\left(x \to 0\right)=0$ منه و حسب مبرهنة الحصر : $\boxed{\lim\limits_{+\infty}\left(x \to \frac{\ln(x)}{x}\right)=0}$

- من أجل كل قيمة لــ x في $]0;+\infty[$ لدينا : $\ln\left(\frac{1}{x}\right)=-\ln(x)$ منه :

$\ln(x)=-\ln\left(\frac{1}{x}\right)$ منه : $x.\ln(x)=-x.\ln\left(\frac{1}{x}\right)$

منه : $$x.\ln(x)=-\frac{\ln\left(1/x\right)}{1/x}$$

و لدينا : $\lim\limits_{0^+}\left(x \to \frac{1}{x}\right) = +\infty$ و $\lim\limits_{+\infty}\left(x \to \frac{\ln(x)}{x}\right) = 0$ منه ز حسب المبرهنات حول النهايات : $\lim\limits_{0^+}\left(x \to \frac{\ln\left(1/x\right)}{1/x}\right) = 0$ منه : $\boxed{\lim\limits_{0^+}\left(x \to x.\ln(x)\right) = 0}$

- من أجل n عدد طبيعي بحيث : n≥2

مهما تكون قيمة x في $\Re_+^*$ لدينا : $\frac{\ln(x)}{x^n} = \frac{1}{x^{n-1}} - \frac{\ln(x)}{x}$

و لدينا : $n-1 \geq 1$ منه $\lim\limits_{+\infty}\left(x \to x^{n-1}\right) = +\infty$ $\lim\limits_{+\infty}\left(x \to \frac{1}{x^{n-1}}\right)$

و $\lim\limits_{+\infty}\left(x \to \frac{\ln(x)}{x}\right) = 0$ منه $\boxed{\lim\limits_{+\infty}\left(x \to \frac{\ln(x)}{x^n}\right) = 0}$

و مهما تكون قيمة x في $\Re_+^*$ لدينا

$$x^n.\ln(x) = x^{n-1} \times (x.\ln(x))$$

و $(n-1) \geq 1$ منه $\lim\limits_{0^+}\left(x \to x^{n-1}\right) = 0$ و $\lim\limits_{0^+}\left(x \to x.\ln(x)\right) = 0$ منه

$$\boxed{\lim\limits_{0^+}(x \to x^n.\ln(x)) = 0}$$

و هكذا لقد برهنا على

المبرهنات :

$\lim\limits_{+\infty}\left(x \to \frac{\ln(x)}{x}\right) = 0$	$\lim\limits_{0^+}\left(x \to x.\ln(x)\right) = 0$
(أي $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$	$\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} x.\ln(x) = 0$)
من أجل كل عدد طبيعي n بحيث n≥2 :	
$\lim\limits_{+\infty}\left(x \to \frac{\ln(x)}{x^n}\right) = 0$	$\lim\limits_{0^+}(x \to x^n.\ln(x)) = 0$
(أي $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x^n} = 0$	$\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} x^n.\ln(x) = 0$)

تفسير للنتائج السابقة :

ليكن n عددا طبيعيا معدوما.

– عندما يؤول x إلى ∞+ : ln(x) يؤول إلى ∞+ و $\dfrac{1}{x^n}$ يؤول إلى 0

و الجداء $\dfrac{1}{x^n}.\ln(x)$ يؤول إلى 0 إذن نهاية الجداء $\dfrac{1}{x^n}.\ln(x)$ "تأثرت" بنهاية العامل $\dfrac{1}{x^n}$ المتعلق بـــ x^n و "همشت" نهاية العامل ln(x) .

– كذلك عندما يؤول x إلى 0 بقيم موجبة تماما ln(x) يؤول إلى ∞−

و x^n يؤول إلى 0.

و الجداء $x^n.\ln(x)$ يؤول إلى 0 ، هنا كذلك نهاية الجداء $x^n.\ln(x)$ "تأثرت بنهاية العامل حيث x^n و "همشت" نهاية العامل ln(x) .

–للتعبير على هذه النتائج نقول:" في نهاية الجداء $x^n.\ln(x)$ (حيث x عدد طبيعي غير معدوم) عندما يؤول المتغير x إلى 0 : x^n يتفوق على ln(x) ".

" في نهاية حاصل القسمة $\dfrac{\ln(x)}{x^n}$ (حيث n عدد طبيعي غير معدوم) عندما يؤول المتغير x إلى ∞+: x^n يتفوق على ln(x) ".

مثال : لتكن الدالة f المعرفة على المجال]0 ;+∞[

بالدستور : $f(x)=x^2-\ln(x)$

لدينا : $\lim\limits_{0^+}(x \to x^2) = 0$ و $\lim\limits_{0^+}(x \to -\ln(x)) = +\infty$

منه : $\boxed{\lim\limits_{0^+} f = +\infty}$

و لدينا : $\lim\limits_{+\infty}(x \to x^2) = +\infty$

و $\lim\limits_{+\infty}(x \to -\ln(x)) = -\infty$

حالة عدم التعيين

إزالة حالة عدم التعيين :

مهما تكون قيمة x في $\Re^*_+$: $f(x) = x^2\left(1-\dfrac{\ln(x)}{x^2}\right)$

و لدينا : $\lim_{+\infty}(x \to x^2) = +\infty$ و $\lim_{+\infty}\left(x \to \frac{\ln(x)}{x^2}\right) = 0$

منه : $\boxed{\lim_{+\infty} f = +\infty}$

الدالة اللوغاريتم العشري

أ- تعريف، ترميز:

الدالة اللوغاريتم العشري هي الدالة المرمز إليها بالرمز log و المعرفة على مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة تماما بالدستور :

$$\log(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(10)}$$

ب-خواص جبرية (تستنتج من خواص الدالة ln باستعمال تعريف الدالة log)

$\boxed{\log(10)=1 \text{ و } \mathrm{Log}(1)=0}$

مهما يكون العددان الحقيقيان الموجبان تماما a و b مهما يكون العدد الصحيح n :

$\log(a\times b)=\log(a)+\log(b)$ ، $\log\left(\frac{1}{a}\right) = -\log(a)$

$\log\left(\frac{a}{b}\right) = -\log(a) - \log(b)$ ، $\log(a^n) = n\log(a)$

$$\log(\sqrt{a}) = \frac{1}{2}.\log(a)$$

مثلا: $\log(1000)=\log(10^3)$

$=3.\log(10)$

$= 3\times 1$

منه: $\log(1000)=3$

ملاحظتان :

- الدالة log تستعمل كثيرا في مختلف العلوم و هذا نظرا لأهمية استعمال قوى العدد 10 و كون : من أجل كل عدد صحيح n ، $\log(10^n)=n$.
- اللمسة $\boxed{\log}$ من حاسبة تمكن من إيجاد قيم (تقريبية) للدالة اللوغاريتم العشري.

جـــ–الدراسة التحليلية و استنتاجات :

مبرهنات : (تبرهن بالاعتماد على تعريف الدالة log و النتائج حول الدالة ln)

مجموعة تعريف الدالة log هي $\Re_+^*$.

$$\lim_{0^+}(x \to \log(x)) = -\infty \qquad \lim_{+\infty}(x \to \log(x)) = +\infty$$

الدالة log قابلة للاشتقاق (منه مستمرة) على $\Re_+^*$

و دالتها المشتقة $\log'$ معرفة على $\Re_+^*$ بالدستور : $\log'(x) = \dfrac{1}{x.\ln(10)}$

- الدالة log متزايدة تماما على $\Re_+^*$.
- مهما يكون العددان الحقيقيان الموجبان تماما a و b :

$a<b$ يكافئ $\log(a)<\log(b)$

$a\leq b$ يكافئ $\log(a)\leq\log(b)$

$a=b$ يكافئ $\log(a)=\log(b)$

- مهما يكون العدد الحقيقي الموجب تماما x

$x=1$ يكافئ $\log(x)=0$

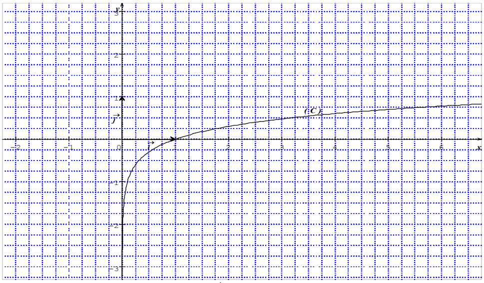
$x<1$ يكافئ $\log(x)<0$

$x>1$ يكافئ $\log(x)>0$

د– جدول تغيرات الدالة log و تمثيلها البياني:

x	$-\infty$ 0	$+\infty$
log(x)	‖ $-\infty$	$+\infty$

جدول تغيرات الدالة log



(C) المنحنى الممثل للدالة Log

بالنسبة إلى معلم $(O;\vec{i};\vec{j})$

الدالة اللوغاريتم ذات الأساس a

حيث a عدد حقيقي مفروض بحيث $a>0$ و $a\neq 0$

أ- تعريف، ترميز :

ليكن a عدد حقيقيا مفروضا ، بحيث $a>1$ و $a\neq 0$.
الدالة اللوغاريتم ذات الأساس a هي الدالة المرمز إليها بالرمز $\log_a$
و المعرفة على مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة تماما بالدستور :

$$\log_a(x)=\frac{\ln(x)}{\ln(a)}$$

ملاحظتان :

- الدالة ln هي الدالة اللوغاريتم ذات الأساس e و الدالة log هي الدالة اللوغاريتم ذات الأساس 10.
- من أجل a عدد حقيقي بحيث $a>0$ و $a\neq 1$ ، لحساب قيم (مقربة) للدالة $\log_a$ بواسطة حاسبة، نستعمل تعريف الدالة $\log_a$ و اللمسة $\boxed{\text{LN}}$

مثلا: $\log_3(5)=\frac{\ln(5)}{\ln(3)}$ فنجد : $\log_3(5)=1,4649735....$

ب- خواص جبرية :

(تستنتج من تعريف الدالة $\log_a$ و خواص الدالة ln).

ليكن a عددا حقيقيا مفروضا بحيث : $a>0$ و $a\neq 1$.

$\log_a(a)=1$ و $\log_a(1)=0$

مهما يكون العددان الحقيقيان الموجبان تماما x و y مهما يكون العدد الصحيح n .

$$\log_a(x.y)=\log_a(x)+\log_a(y)$$

$$\log_a\left(\frac{1}{x}\right)=-\log_a(x)$$

$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right)=\log_a(x)-\log_a(y)$$

$$\log_a(x^n)=n.\log_a(x)$$

$$\log_a(x^n)=n.\log_a(x)$$

$$\log_a(\sqrt{x})=\frac{1}{2}.\log_a(x)$$

جـ-الدراسة التحليلية واستنتاجات :

مبرهنات:

(تبرهن بالاعتماد على تعريف الدالة $\log_a$ والنتائج حول الدالة ln)

* ليكن a عددا حقيقيا مفروضا بحيث : $a>0$ و $a\neq 1$

مجموعة تعريف الدالة $\log_a$ هي مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة تماما.

* الدالة $\log_a$ قابلة للاشتقاق على $\Re_+^*$ (منه هي مستمرة على $\Re_+^*$) و دالتها المشتقة $\log_a'$معرفة على $\Re_+^*$ بالدستور : $\log'_a(x)=\dfrac{1}{x.\ln(x)}$

** و الوضع في النص السابق سائد ، إشارة مهما تكون قيمة x في $\Re$، إشارة $\log'_a(x)$ هي إشارة $\ln(a)$ و لدينا $\ln(a)>0$ و لدينا : $a>1$

و $\ln(a)<0$ لما $1>a>0$ إذن إذا كان $a>1$ تكون الدالة $\log_a$ متزايدة تماما على $\Re_+^*$ و إذا كان $0<a<1$ تكون الدالة $\log_a$ متناقصة تماما على $\Re_+^*$.

** من أجل a عدد حقيقي مفروض بحيث a>0 و a≠1 ،

$$\log_a(x) = \frac{1}{\ln(x)} \times \ln(x)$$

لدينا : $\lim\limits_{+\infty}(x \to \ln(x)) = +\infty$ و $\lim\limits_{0^+}(x \to \ln(x)) = -\infty$

في الحالة a>0 يكون ln(a)>0 و يكون : $\lim\limits_{+\infty}(x \to \log_a(x)) = +\infty$

و $\lim\limits_{0^+}(x \to \log_a(x)) = -\infty$

في الحالة 0<a<1 يكون ln(a)<0 و يكون : $\lim\limits_{+\infty}(x \to \log_a(x)) = -\infty$

و $\lim\limits_{0^+}(x \to \log_a(x)) = +\infty$

منه:

المبرهنات:

ليكن a عددا حقيقيا مفروضا بحيث a>0 و a≠1 .

في الحالة $0<a<1$

$$\lim_{0^+}\left(x \rightarrow \log_a(x)\right) = +\infty$$

و $$\lim_{+\infty}\left(x \rightarrow \log_a(x)\right) = -\infty$$

الدالة $\log_a$ متناقصة تماما على $\Re_+^*$.

منه : مهما يكون العنصران x

و y من $\Re_+^*$.

$x=y$ يكافئ $\log_a(x)=\log_a(x)$

$x<y$ يكافئ $\log_a(x)>\log_a(y)$

$x\leq y$ يكافئ $\log_a(x)\geq\log_a(y)$

و مهما يكون العنصر x من $\Re_+^*$

$x=1$ يكافئ $\log_a(x)=0$

$x<1$ يكافئ $\log_a(x)>0$

$x>1$ يكافئ $\log_a(x)<0$

فيالحالة

$a>1$ $$\lim_{0^+}\left(x \rightarrow \log_a(x)\right) = -\infty$$

و $$\lim_{+\infty}\left(x \rightarrow \log_a(x)\right) = +\infty$$

الدالة $\log_a$ متزايدة تماما على $\Re_+^*$.

منه : مهما يكون العنصران x

و y من $\Re_+^*$.

$x=y$ يكافئ $\log_a(x)=\log_a(x)$

$x<y$ يكافئ $\log_a(x)<\log_a(y)$

$x\leq y$ يكافئ $\log_a(x)\leq\log_a(y)$

و مهما يكون العنصر x من $\Re_+^*$

$x=1$ يكافئ $\log_a(x)=0$

$x>1$ يكافئ $\log_a(x)>0$

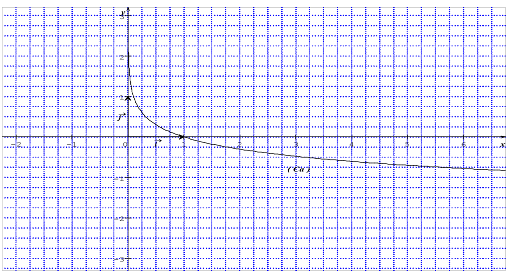
$x<1$ يكافئ $\log_a(x)<0$

د-جدول تغيرات الدالة $\log_a$ و تمثيلها البياني:

a عدد حقيقي مفروض بحيث: $a>0$ و $a\neq1$

في الحالة $0<a<1$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\text{Log}_a(x)$		$\Vert +\infty$	$\searrow -\infty$



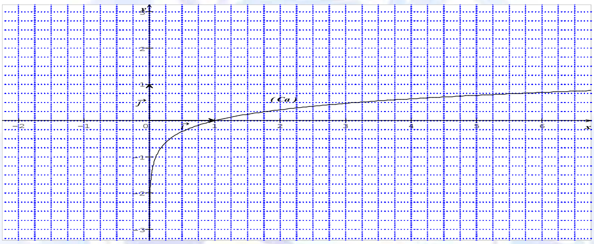
جدول تغيرات الدالة $\log_a$ في الحالة $0<a<1$

شكل المنحني (C_a) الممثل للدالة $\log_a$ ، في الحالة $0<a<1$ ، بالنسبة إلى معلم $(o,\vec{i},\vec{j})$

في الحالة $a>1$:

x	$-\infty$ 0 $+\infty$
$Log_a(x)$	▨ ‖ $-\infty$ ↗ $+\infty$

جدول تغيرات الدالة $\log_a$ في الحالة$a>1$



شكل المنحني (C_a) الممثل للدالة $\log_a$ ، في الحالة $a>1$ ، بالنسبة إلى معلم $(o,\vec{i},\vec{j})$

ملاحظة هامة :

المعرفة الدقيقية لمعنى كل واحد من الرمزو : ln، log، $\log_a$ ضرورية. **ملاحظة أخرى :**مثل ما هو الحال في دوال مرجعية مثل الدالة $\sqrt{\ }$ ، الدالة sin ، الدالة cos، بدلا من $\ln(x)$ ، $\log_a(x)$ يكتب كذلك ln x، $\log_a(x)$ على الترتيب و هذا في حالة عدم وجود خطر الالتباس.

مثلا :صور 2 بالدالة ln تكتب $\ln(2)$ و تكتب كذلك $\ln2$:

صورة $(5+\sqrt{3})$بالدالة log تكتب $\log 5+\sqrt{3}$

لأن $\log 5+\sqrt{3}$ هي (صورة 5بالدالة log) + $\sqrt{3}$.

تمارين و مشكلات حول الدوال اللوغارتمية

تحويل عبارات مقارنة :

التمرين 01 :

1-أعط العبارة بدلالة $\ln(3)$ لكل واحد من الأعداد: A،B،C،D،E التالية :

$A = \ln(81)$ ، $B = \ln\left(\frac{1}{27}\right)$ ، $C = \frac{1}{4}\ln(9)$ ، $D = \ln(9\sqrt{3})$ ،

$E = \ln\left(\frac{\sqrt{3}}{243}\right)$.

2- أكتب على أبسط شكل ممكن كل واحدة من العبارات : F،G،H، التالية :

$F = \ln(e^7)$ ، $G = \ln\left(\frac{1}{e^{10}}\right)$ ، $H = e\sqrt{e}$ ، $K = \ln\left(\frac{e\sqrt{e}-e}{e-\sqrt{e}}\right)$

التمرين 02 :

1-قارن العددين X وY في كل حالة من الحالات التالية :

1) $Y = 7\ln(2)$ و $X = 3\ln(5)$.

2) $Y = \ln(0,35)$ و $X = \ln(35) - \ln(100)$.

3) $Y = \frac{1}{4}\ln(9)$ و $X = \frac{1}{2}\ln(5)$.

2- أثبت أنه من أجل كل عدد حقيقي x يكون :

$$\ln(x^4+12) - \ln(x^2+5) < 1 + \ln(x^2+1)$$

مجموعات تعريف و مشتقات :

التمرين 03 :

عين المجموعة D مجموعة تعريف الدالة f و الدالة f' الدالة المشتقة للدالة f في كل حالة من الحالات التالية :

1) f معرفة بالدستور : $f(x) = 3x^2 + x + \ln(x)$

2) f معرفة بالدستور : $f(x) = \sqrt{x} + (x^2+2x)\ln(x)$

3) f معرفة بالدستور : $f(x)=\dfrac{\ln 2\times\ln(x)}{x.\ln 3}$

4) f معرفة بالدستور : $f(x)=2x+1+\ln(3x^3-4x-8)$

5) f معرفة بالدستور : $f(x)=\ln(x-x^2)-\ln(-2x+1)$

6) f معرفة بالدستور : $f(x)=\ln\left(\dfrac{3-2x}{5x+10}\right)$

7) f معرفة بالدستور : $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}+\left(\ln(-5x+1)\right)^2$

8) f معرفة بالدستور : $f(x)=\dfrac{5-2\ln(x)}{1+\ln(x)}$

9) f معرفة بالدستور : $f(x)=(x-1).(\ln(x^2-1))^2$

10) f معرفة بالدستور : $f(x)=(x-3).\ln\left[(x^2-4x+3)^2\right]$

11) f معرفة بالدستور : $f(x)=\ln\left[\ln(2x+3)\right]$

12) f معرفة بالدستور : $f(x)=\dfrac{\ln(-x)}{\ln(\sqrt{x^2-3})}$

معادلات ، متراجحات ، جمل:

التمرين 04 :

حل ، في $\Re$،كل واحدة من المعادلات *–حيث x هو المجهول– التالية :

- $\ln(4x-1)=\ln(x^2+x+1)$ ....**(1)**
- $\ln(x+2)+\ln(3x-5)=\ln(x^2+5)$ .....**(2)**
- $\ln\left(\dfrac{x-4}{2x+3}\right)=0$ ....**(3)**
- $\ln(-2x+7)=\dfrac{\ln(2)}{2}$ ....**(4)**
- $\ln(5x+\sqrt{3})=3$ ....**(5)**
- $\ln(4x^2-x^3)=\ln(4-x)+2\ln 3$ ....**(6)**
- $2(\ln(x))^2+5\ln(x)=3$ ....**(7)**

التمرين 05 :

حل ، في مجموعة الثنائيات من الأعداد الحقيقية ،كل واحدة من الجمل التالية ، حيث (x ;y) هو المجهول:

$$\text{I}\ldots\begin{cases} x - y = \dfrac{24}{5} \\ \ln(x) + \ln(y) = 0 \end{cases}$$

$$\text{II}\ldots\begin{cases} 3\ln(x) + 2\ln(y) = 3 \\ 5\ln(x) + 4\ln(y) = 7 \end{cases}$$

$$\text{III}..\begin{cases} \ln(xy) = 2 \\ \ln(x) \times \ln(y) = -15 \end{cases}$$

$$\text{IV}..\begin{cases} \ln(x) + \ln(y) = 2 + \ln 2 \\ x + y = 3e \end{cases}$$

المرين 06 :

حل ، في $\Re$، كل واحدة من المتراجحات-حيث x هو المجهول- التالية:

- $\ln(3x+1) < 2$ ....**(1)**
- $(3x+5) \geq \ln(9x+2)$ ....**(2)**
- $\ln(x+2) - \ln(x-3) \geq 1$ ....**(3)**
- $(\ln x)^2 - 4\ln(x) < 5$ ....**(4)**

التمرين 07 :

إذا أودعنا مبلغا قدره 80000DA في مشروع يضمن له أن رأس المال يزداد سنويا بنسبة قدرها 5% (الفوائد مركبة) بعدكم سنة ، على الأقل، يصبح رأس المال أكثر من 15000DA ؟

التمرين 08 :

عين المجموعة D مجموعة تعريف الدالة f ثم أدرس إشارة f(x) ، حسب قيم x في المجموعة D (تلخص نتائج الدراسة في جدول إشارة) في كل حالة من الحالات التالية :

1) f معرفة بالدستور : $f(x) = -4x^2 \ln(x+3)$

2) f معرفة بالدستور : $f(x) = \ln(x) \times (1 - \ln(x))$

3) f معرفة بالدستور : $f(x) = \dfrac{\ln(5-x)}{x^2 - 1}$

4) f معرفة بالدستور : $f(x) = 1 - (\ln(x))^2$

دوال أصلية و تكاملات :

التمرين 09 :

عين واحدة من الدوال الأصلية للدالة f على المجال I فيكل حالة من الحالات التالية :

1) f معرفة بالدستور : $f(x) = 5x^3 + 3x + 1 + \dfrac{1}{x}$ و I=]0 ;+∞[

2) f معرفة بالدستور : $f(x) = \dfrac{x^2 + x + 3}{x+1}$ و I=]-1 ;+∞[

3) f معرفة بالدستور : $f(x) = 1 - \dfrac{5}{\sqrt{x}} + \dfrac{3}{x}$ و I=]-∞ ;0[

4) f معرفة بالدستور : $f(x) = \dfrac{3x}{2x^2 + 1}$ و I=ℜ

5) f معرفة بالدستور : $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x + 2}{x^3 + 3x^2 + 6x + 2}$ و I=[0 ;+∞[

6) f معرفة بالدستور : $f(x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{2}{x^2} + \dfrac{3}{x^3}$ و I=]-∞ ;0[

7) f معرفة بالدستور : $f(x) = \dfrac{5x+1}{5x^2 + 2x + 20} - \dfrac{5x}{\sqrt{x^2 + 3}}$

و I=ℜ

8) f معرفة بالدستور : $f(x) = \dfrac{(\ln x)^3}{x}$ و I=]0 ;+∞[

9) f معرفة بالدستور : $f(x)=\frac{1}{x.\sqrt{\ln(x)}}$ و I=]1 ;+∞[

10) f معرفة بالدستور : $f(x)=\frac{1}{x.\ln(x)}$ و I=]1 ;+∞[

التمرين 10 :

لتكن f الدالة المعرفة بالدستور : $f(x)=\frac{6x^2+5x}{2x+1}$

-1- عين المجموعة D مجموعة تعريف الدالة f .

-2- أوجد أعداد حقيقية a،b،c بحيث من أجل كل عنصر x من المجموعة D يكون :

$$f(x)=ax+b+\frac{c}{2x+1}$$

-3-عين مجموعة الدوال الأصلية للدالة f على المجال $]-\infty\,;\,-\frac{1}{2}[$

التمرين 11 :

11/أحسب التكاملات التالية :

$$I_1=\int_1^e \frac{1}{x}dx \text{ ، } I_2=\int_e^{e^2}\frac{x^2+x+1}{x^3}dx \text{ ، } I_3=\int_0^1\frac{x}{x^2+1}dx$$

التمرين 12 :

لتكن f الدالة المعرفة على المجال]0 ;+∞[بالدستور:

$$f(x)=x\ln(x)-x$$

-1- عين الدالة المشتقة للدالة f .

-2- عين مجموعة الدوال الأصلية للدالة ln على المجال]0 ;+∞[.

التمرين 13 :

لتكن f الدالة المعرفة علة المجال]-1 ;+∞[بالدستور :

$$f(x)=(x+1).\ln(x+1)-(x+2).\ln(x+2)$$

-1- عين الدالة المشتقة للدالة f .

-2- عن مجموعة الدوال الأصلية ، على المجال $]-1;+\infty[$ ، للدالة g المعرفة بالدستور :

$$g(x) = x^3 + \ln\left(\frac{x+2}{x+1}\right)$$

حساب النهايات :

التمرين 14 :

أحسب النهايات التالية :

1) $\lim_{-\infty}\left(x \to \ln\left(\frac{2x+1}{x-2}\right)\right)$

2) $\lim_{(-3)^-}\left(x \to \ln\left(\frac{x+3}{x+1}\right)\right)$

3) $\lim_{(-1)^+}\left(x \to \ln\left(\frac{x+3}{x+1}\right)\right)$

4) $\lim_{+\infty}\left(x \to \ln(3x^3 + x^2 + 1)\right)$

5) $\lim_{-\infty}\left(x \to x^3 + x\ln(-x)\right)$

6) $\lim_{5^+}\left(x \to x + \ln(x-5)\right)$

7) $\lim_{-\frac{1}{2}^+}\left(x \to x^2 + (4x+2)^3.\ln(2x+1)\right)$

8) $\lim_{+\infty}\left(x \to \frac{\ln(x+3)}{(5x+8)^5}\right)$

9) $\lim_{-\infty}\left(x \to \frac{\ln(x^2+1)}{x+1}\right)$

10) $\lim_{+\infty}\left(x \to \frac{\ln(3x^2+2x+1)}{\ln(2x^2+x+4)}\right)$

11) $\lim_{0}\left(x \to \frac{\ln(x+2) - \ln 2}{x}\right)$

12) $\lim_{0}\left(x \to \frac{\ln(x+1)}{x}\right)$

13) $\lim_{3}\left(x \to \frac{\ln(x-2)}{x-3}\right)$

14) $\lim_{1}\left(x \to \frac{\ln(x^2+1) - \ln 2}{x-1}\right)$

15) $\lim_{-1^+}\left(x \to \frac{1}{x+1} + \ln(x+1)\right)$

16) $\lim_{+\infty}\left(x \to (x^2+7) - \ln(x^2+x+3)\right)$.

متتاليات

التمرين 15 :

$(U_n)_{n\in N}$متتالية عددية جميع حدودها موجبة تماما و هي بحيث $U_0=3$ و مهما تكون قيمة n في N، $\ln(U_{n+1})=-2+\ln(U_n)$.

1- أعط عبارة U_{n+1} بدلالة U_n ،من أجل n كيفي في N ،ما هي طبيعة المتتالية (U_n) ؟

2-أعط عبارة الحد العام للمتتالية (U_n) ثم أدرس اتجاه تغيرها و تقاربها .

3- لتكن (V_n) المتتالية العددية المعرفة بـــ : من أجل كل عدد طبيعي n، $V_n=\ln(U_n)$.

أ) ما هي طبيعة المتتالية (V_n)؟

ب)أحسب، بدلالة العدد الطبيعي n،مجموع S_n حيث $S_n=V_0+\ldots+V_n$

ج) استنتج عبارة الجداء Π_n حيث $\Pi_n=u_0\times\ldots\times u_n$

دراسات دوال

التمرين 16 :

لتكن f الدالة المعرفة بالدستور : $f(x)=\dfrac{9\ln(x)}{x}$ و ليكن (C_f) المنحني الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ (وحدة الطول 1cm)

1- أدرس تغيرات الدالة f .

2- أدرس الفروع اللانهائية للمنحني (C_f).

3- أكتب معادلة للمستقيم (d) المماس للمنحني (C_f) في نقطة تقاطعه مع حامل محور الفواصل.

4- أرسم المستقيم (d)ثم المنحني (C_f).

5- أحسب المساحة المقدرة بالسنتيمتر المربع للحيز المستوي (D) المحدد بالمنحني (C_f)و المستقيمات ذات المعادلات $y=0$، $x=e$ ، $x=e^2$

التمرين 17 :

لتكن f الدالة المعرفة بالدستور: $f(x)=\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$ و ليكن (C_f) المنحني الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد متجانس(وحدة الطول 2cm).

1- أدرس تغيرات الدالة f .

2- عين مماسات (C_f) الموازية للمستقيم(Δ) ذو المعادلة

$y=\frac{1}{2}x+3$.

3- أثبت أن النقطة ω حيث $\omega(-\frac{1}{2};0)$ هي مركز تناظر للمنحني (C_f)

4-أدرس الفروع اللانهائية للمنحني (C_f) ثم أرسم المنحني (C_f).

5- أثبت أن الدالة F المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بالدستور:

$F(x)=x+\ln(x)-(x+1)\ln(x+1)$ هي واحدة من الدوال الأصلية للدالة f على المجال $]0;+\infty[$.

6- لتكن g الدالة المعرفة بالدستور : $g(x)=\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$

أ-بدون دراسة تغيرات الدالة g ، أنشئ(C_g) المنحني الممثل للدالة g بالنسبة إلى نفس المعلم السابق $(O;\vec{i};\vec{j})$.

ب-أحسب المساحة ، المقدرة بالسنتيمتر المربع ، للحيز المستوي $\mathcal{D}$ المحدد بالمنحنيين (C_f) و(C_g) و المستقيمين ذا المعادلتين x=1 و x=2 .

التمرين 18 :

لتكن f الدالة المعرفة على المجال $]-2;+\infty[$ بالدستور: $f(x)=x+1-\ln\left(\frac{x+3}{x+2}\right)$

و ليكن (C_f) امنحني الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1- أدرس تغيرات الدالة f .

2- أثبت أن المعادلة $f(x)=0$ ، حيث x هو المجهول في المجال

$]-2;+\infty[$ ، لها حل وحيد α و أن هذا الحل α يحقق :

$-0,5<\alpha<-0,25$.

-3- أثبت أن المنحني (C_f) له مستقيمان مقاربان أحدهما مائل نرمز إليه بالرمز (Δ) .

-4-أدرس الوضعية النسبية للمنحني (C_f) و المستقيم (Δ).

-5- أرسم (C_f) و المستقيمان المقاربين له.

-6-في دراسة سوق، x يرمز إلى الكمية المنتجة، في وحدة معطاة، $\mathcal{V}(x)$ يرمز إلى سعر الوحدة المقترح من طرف المنتجين (حسب الكية المنتجة) و $\mathcal{D}(x)$ سعر الوحدة الموافق عليه من طرف المستهلكين (حسب الكمية المنتجة).

أعط القيمة المقربة لسعر الوزن و لكمية التوازن علما أن $0<x<3$ و $\mathcal{V}(x)=f(x)$ و $\mathcal{D}(x)=x+1-\ln(x)$.

حلول التمارين حول الدوال اللوغارتمية

التمرين:1

1/إعطاء العبارة بدلالة ln(3):

لدينا : $A=\ln(81)=\ln(3^4)=4\ln(3)$

و لدينا : $B=\ln\left(\frac{1}{27}\right)=\ln\left(\frac{1}{3^3}\right)=-\ln(3^3)$

و منه $B=-3\ln(3)$.

و لدينا : $C=\frac{1}{4}\ln(9)=\frac{1}{4}\ln\left(3^2\right)=\frac{1}{2}\ln(3)$

و لدينا : $D=\ln(9\sqrt{3}))\ln(9)+\ln(\sqrt{3})=\ln(9)+\ln(3^{\frac{1}{2}})$

أي أن : $D=\ln(3^2)+\frac{1}{2}\ln(3)$

$$=\frac{5}{2}\ln(3)$$

و لدينا : $E=\ln\left(\frac{\sqrt{3}}{243}\right)=\ln\left(\sqrt{3}\right)-\ln(3^5)$

حسب الخاصية الجبرية الأساسية و نتائجها

$$=\frac{1}{2}\ln 3-5\ln(3)$$

$$=-\frac{9}{2}\ln(3)$$

2/كتابة كل واحدة من العبارات المعطاة على أبسط شكل:

لدينا : $F=\ln(e^7)=7\ln(e)=7\times 1=7$

و لدينا : $G=\ln\left(\frac{1}{e^{10}}\right)=-\ln e^{10}=-10\ln e=-10$

و لدينا : $\mathrm{H}=\ln\left(e\sqrt{e}\right)=\ln(e)+\ln(\sqrt{e})=1-\frac{1}{2}\ln e$

و منه : $\mathrm{H}=\frac{1}{2}$

و لدينا : $\mathrm{K}=\ln\frac{e\sqrt{e}-e}{e-\sqrt{e}}=\ln\frac{\sqrt{e}\left(e-\sqrt{e}\right)}{e-\sqrt{e}}$

و منه : $\mathrm{K}=\ln\left(\sqrt{\mathrm{e}}\right)=\frac{1}{2}$

التمرين :2

1/ المقارنة بين العددين X ; Y في كل حالة من الحالات المعطاة:

1)X=3ln(5) و Y=7ln(2).

لندرس إشارة الفرق.

لدينا : $X-Y=3\ln(5)-7\ln(2))\ln(5^3)-\ln(2^7)$

أي أن : $X-Y=\ln\frac{125}{128}$

و لكن : $0<\frac{125}{128}<1$

و عليه : $\ln\left(\frac{125}{128}\right)<0$

و منه $X-Y<0$

و عليه $X<Y$.

– بنفس الكيفية من الحالتين المتبقيتين.

2/الإثبات أنه من أجل كل عدد حقيقي x يكون :

$\ln(x^4+12)-\ln(x^2+5)w1+\ln(x^2+1)$...........(I)

ليكن x عددا حقيقيا كيفيا.

الجملة (I) تعني أن : $\ln\frac{x^4+12}{x^2+5}<\ln e+\ln(x^2+1)$

و هذا يعني أن : $\ln\frac{x^4+12}{x^2+5} < \ln(e(x^2+1))$

و هذا يعني أن " $\frac{x^4+12}{x^2+5} < e(x^2+1)$ (الدالة ln متزايدة تماما على]0,+∞[)

و هذا يعني أن : $x^4+12 < e(x^2+1)(x^2+5)$ (لان: $x^4+5>0$)

و هذا يعني أن : $(e-1)x^4+6ex^2+(5e-12)>0$

و بما أن : $(e-1)x^4>0$ و $6ex^2>0$ و $5e-12>0$

فإن : $(e-1)x^4+6ex^2+(5e-12)>0$

و منه المجملة (I) صحيحة من أجل كل عدد حقيقي x .

التمرين 3:

تعيين المجموعة D مجموعة تعريف الدالة f و الدالة f' الدالة المشتقة للدالة f في كل حالة مما يلي:

1/ $f(x)=3x^2+x+\ln(x)$

لدينا : D=]0 ;+∞[

و من أجل كل x من D لدينا:

$$f'(x)=6x+1+\frac{1}{x}$$

$$=\frac{6x^2+x+1}{x}$$

2/ $f(x)=\sqrt{x}+(x^2+2x)\ln(x)$

لدينا {(x>0) و (x≥0) : $x\in\Re$,D={x

=]0 ;+∞[

و من أجل كل x من D لدينا :

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}+(2x+2)\ln(x)+(x^2+2x)\frac{1}{x}$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{x}}+(2x+2)\ln(x)+x+2$$

3/ $f(x)=\frac{\ln(2).\ln(x)}{x.\ln(3)}$

لدينا $D=\{x,x\in\Re : (x\neq0)$ و $(x>0)\}$

$=]0;+\infty[$

و من أجل كل x من D لدينا :

$$f'(x)=\frac{\ln(2)}{\ln(3)}.\frac{\frac{1}{x}.x-1.\ln(x)}{x^2}$$

$$=\frac{\ln(2)}{\ln(3)}.\frac{1-\ln(x)}{x^2}$$

$$=\log_3(2).\frac{1.\ln(x)}{x^2}$$

4/ $f(x)=2x+1+\ln(3x^2-4x-8)$

لدينا $D=\{x,x\in\Re : 3x^2-4x-8>0\}$

$$]-\infty;\frac{4-2\sqrt{7}}{3}[\cup]\frac{4+2\sqrt{7}}{3};+\infty[$$

و من أجل كل x من D لدينا :

$$f'(x)=2+\frac{6x-4}{3x^2-4x-8}$$

$$=\frac{6x^2-2x-20}{3x^2-4x-8}$$

5/ $f(x)=\ln(x-x^2)-\ln(-2x+1)$

لدينا $D=\{x,x\in\Re : (x-x^2>0)$ و $(-2x+1>0)\}$

$$=]0;\frac{1}{2}[$$

و من أجل كل x من D لدينا :

$$f'(x)=\frac{1-2x}{x-x^2}-\frac{-2}{1-2x}$$

أي أن: $$f'(x)=\frac{(1-2x)^2+2(x-x^2)}{(x-x^2)(1-2x)}$$
$$=\frac{2x^2+2x+1}{(x-x^2)(1-2x)}$$

6/ $$f(x)=\ln\left(\frac{3-2x}{5x+10}\right)$$

و لدينا : $$D=\left\{x, x\in R:(5x+10\neq 0)\ \left(\frac{3-2x}{5x+10}>0\right)\ \right\}$$
$$=]-2;\frac{3}{2}[$$

من أجل كل عدد xمن D لدينا :

$$f(x)=-\ln(5)+\ln\left(\frac{3-2x}{x+2}\right)=-\ln(5)+\ln(3-2x)-\ln(x+2)$$

و عليه : $$f'(x)=\frac{-2}{3-2x}-\frac{1}{x+2}$$
$$=\frac{-7}{(3-2x)(x+2)}$$

7/ $$f(x)=\frac{x}{x^2+1}+(\ln(-5x+1))^2$$

و لدينا : $$D=\left\{x, x\in R:(x^2+1\neq 0)\ (-5x+1>0)\ \right\}$$
$$=]-\infty;\frac{1}{5}[$$

من أجل كل عدد xمن D لدينا :

$$f'(x)=\frac{x^2+1-2x^2}{\left(x^2+1\right)^2}+2.\frac{-5}{-5x+1}.\ln(-5x+1)$$

$$=\frac{1-x^2}{\left(x^2+1\right)^2}-\frac{10\ln(-5x+1)}{-5x+1}$$

/8 $f(x)=\dfrac{5-2\ln(x)}{1+\ln(x)}$

و لدينا : $D=\left\{x,x\in R:(x>0)\ \ \left(1+\ln(x)\neq 0\right)\ \right\}$

$$=]0;\frac{1}{e}[\cup]\frac{1}{e};+\infty[$$

من أجل كل عدد xمن D لدينا :

$$f'(x)=\frac{\frac{2}{x}\left(1+\ln(x)\right)-\frac{1}{x}\left(5-2\ln(x)\right)}{\left(1+\ln(x)\right)^2}$$

$$=\frac{1+\ln(x)-5+2\ln(x)}{x\left(1+\ln(x)\right)^2}$$

$$=\frac{-4+3\ln(x)}{x\left(1+\ln(x)\right)^2}$$

/9 $f(x)=\left(x-1\right).\left(\ln\left(x^2-1\right)\right)^2$

و لدينا : $D=\left\{x,x\in R:(x^2-1>0)\ \right\}$

$$=]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$$

من أجل كل عدد xمن D لدينا :

$$f'(x)=1.\left(\ln\left(x^2-1\right)\right)^2+\left(x-1\right).2.\frac{2x}{x^2-1}.\ln\left(x^2-1\right)$$

$$=\ln\left(x^2-1\right)+\frac{4x\left(x-1\right)\ln\left(x^2-1\right)}{x^2-1}$$

$$= \ln\left(x^2-1\right)+\frac{4x\ln\left(x^2-1\right)}{X+1}$$

$$f(x)=(x-3).\ln\left[\left(x^2-4x+3\right)^2\right]/10$$

و لدينا : $D=\{x, x\in R : x^2-4x+3\neq 0) \}$

$$= R-\{\ 1;3\ \}$$

من أجل كل عدد xمن D لدينا :

$$f'(x)=1.\ln(x^2-4x+3)+(x-3).\frac{2\left(x^2-4x+3\right)\left(2x-4\right)}{\left(x^2-4x+3\right)^2}$$

$$=\ln(x^2-4x+3)+\frac{4\left(x-3\right)\left(x-2\right)}{x^2-4x+3}$$

$$=\ln(x^2-4x+3)+\frac{4\left(x-2\right)}{x-1}$$

$$f(x)=\ln[\ln(2x+3)]/11$$

و لدينا : $D=\{x, x\in R : (2x+3>0)\ \ (\ln(2x+3)>0)\ \}$

$$D=\left\{x, x\in R : (x>-\frac{3}{2})\ \ (2x+3>1)\ \right\}$$

$$=]-1;+\infty[$$

و لدينا من أجل عدد xمن D :

$$f'(x)=\frac{\frac{2}{2x+3}}{\ln(2x+3)}$$

$$=\frac{2}{\left(2x+3)\right)\ln(2x+3)}$$

$$f(x)=\frac{\ln(-x)}{\ln(\sqrt{x^2-3})}$$ /12

و لدينا :

$$D=\{\ x,x\in R:(-x>0)\quad(x^2-3>0)\quad(\ln(\sqrt{x^2-3})\neq 0\ \}$$

أي أن : $$D=\{\ x,x\in R:(x<0)\quad(x^2>3)\quad(x^2-3\neq 1)\ \}$$

$$=]-\infty;-2[\cup]-2;-\sqrt{3}[$$

و من أجل كل عدد x من D لدينا:

$$f(x)=2.\frac{\ln(-x)}{\ln(x^2-3)}$$

و عليه : $$f'(x)=\frac{\frac{1}{x}\ln(x^2-3)-\frac{2x}{x^2-3}\ln(-x)}{(\ln(x^2-3))^2}$$

$$=\frac{(x^2-3)\ln(x^2-3)-2x^2\ln(-x)}{x(x^2-3)(\ln(x^2-3))^2}$$

التمرين4:

الحلول ،في$\Re$، لكل واحدة من المعادلات المعطاة :

في كل ما يلي نسمي D مجموعة تعريف المعادلة المعطاة:

/1 $\ln(4x-1)=\ln(x^2+x+1)$ ....**(1)**

أ) لدينا : $$D=\{\ x/x\in R:(4x-1>0)\quad(x^2+x+1>0)\ \}$$

$$=]\frac{1}{4};+\infty[$$

ب) و من أجل كل عدد x من D لدينا :

(1) تكافئ $4x-1=x^2+x+1$

و هذا يكافئ $x^2-3x+2=0$

و هذا يكافئ $(x=1)$ أو $(x=2)$

(لأن الدالة ln متزايدة تماما على $]0;+\infty[$)

و منه مجموعة حلول المعادلة (1) هي $\{1;2\}$.

* بنفس المنهجية يتم حل المعدلات الأخرى مع الملاحظة أن :

– من أجل x من D لدينا :

(2) تكافئ $\ln[(x+2)(3x-5)]=\ln(x^2+5)$

– من أجل x من D لدينا :

(4) تكافئ $\ln(-2x+7)=\ln\sqrt{2}$

– من أجل x من D لدينا :

(5) تكافئ $\ln(5x+\sqrt{3})=\ln\left(e^3\right)$

– من أجل x من D لدينا :

(6) تكافئ $\ln(4x^2-x^3)=\ln\dfrac{4-x}{3^2}$

– بالنسبة للمعادلة(7) يمكننا وضع $\ln(x)=y$ حيث $x>0$.

التمرين 5:

الحلول ، في مجموعة الثنائيات من الأعداد الحقيقية، كل واحدة من الجمل المعطاة.

$$\mathrm{I}\ldots\begin{cases} x-y=\dfrac{24}{5} \\ \ln(x)+\ln(y)=0 \end{cases}$$

ليكن x و y عنصرين من $\Re$.

الجملة (I) تكافئ

$$\begin{cases} x-y=\dfrac{24}{5} \\ \ln(xy)=0 \\ (x>0)\quad (y>0) \end{cases}$$

و هذا يكافئ

$$\begin{cases} x = y + \dfrac{24}{5} \\ y = \dfrac{1}{x} \\ (x > 0) \quad (y > 0) \end{cases}$$

و هذا يكافئ

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{x} + \dfrac{24}{5} \\ y = \dfrac{1}{x} \\ (x > 0) \quad (y > 0) \end{cases}$$

و هذا يكافئ

$$\begin{cases} 5x^2 - 24x - 5 = 0 \\ y = \dfrac{1}{x} \\ (x > 0) \quad (y > 0) \end{cases}$$

و هذا يكافئ $(x = 5) \quad (y = \dfrac{1}{5})$

* بنفس المنهجية يتم حل كل جملة من الجمل المتبقية مع الملاحظة أنه :

– من أجل $x>0$ و $y>0$ يكون :

(II) تكافئ

$$\begin{cases} 3x' + 2y' = 3 \\ 5x' + 4y' = 7 \\ x' = \ln(x) \quad y' = \ln(y) \end{cases}$$

(الاستفادة من مجهول مساعد)

– من أجل $x>0$ و $y>0$ يكون :

(III) تكافئ

$$\begin{cases} \ln(x)+\ln(y)=2 \\ \ln(x)\times\ln(y)=-15 \end{cases}$$

و نستفيد من كيفية حل الجملة السابقة.

– من أجل x>0 و y>0 يكون :

(IV) تكافئ

$$\begin{cases} x.y=2.e^{x} \\ x+y=3e \end{cases}$$

$\left(\begin{array}{r} 2+\ln 2=\ln e^{2}+\ln e \\ =\ln(2e^{2}) \end{array}\right)$

التمرين 6

الحلول ، في $\Re$، لكل واحدة من المتراجحات المعطاة:

/1 **(1)**.................. $\ln(3x+1)<2$

ليكن x عنصرا من $\Re$.

الجملة (1) تكافئ

$$\begin{cases} \ln(3x+1)<\ln(e^{2}) \\ 3x+1>0 \end{cases}$$

و هذا يكافئ

$$\begin{cases} 3x+1<e^{2} \\ x>-\dfrac{1}{3} \end{cases}$$

(الدالة ln متزايدة تماما على $]0\,;+\infty[$)

و هذا يكافئ

$$\begin{cases} x<\dfrac{e^{2}-1}{3} \\ x>-\dfrac{1}{3} \end{cases}$$

و هذا يكافئ: $-\frac{1}{3} < x < \frac{e^x - 1}{3}$

و منه مجموعة حلول المتراجحة(1) هي:

$$]-\frac{1}{3};\frac{e^x-1}{3}[$$

2/ **(2)**.................. $(3x+5) \geq \ln(9x+2)$

ليكن x عنصرا من $\Re$.

الجملة(2) تكافئ

$$\begin{cases} 3x+5 \geq 9x+2 \\ 3x+5>0 \\ 9x+2>0 \end{cases}$$

(الدالة ln متزايدة تماما على $]0\,;+\infty[$)

أي أن الجملة (2) تكافئ

$$\begin{cases} x \leq \frac{1}{2} \\ x > -\frac{5}{3} \\ x > -\frac{2}{9} \end{cases}$$

و هذا يكافئ $-\frac{2}{9} < x \leq \frac{1}{2}$ و منه مجموعة حلول المتراجحة(2) هي :

$$]-\frac{2}{9};\frac{1}{2}]$$

4/ **(4)**.................. $(\ln(x))^2 - 4\ln(x) < 5$

ليكن x عنصرا من $\Re_+^*$

الجملة (4) تكافئ $(\ln(x))^2 - 4\ln(x) - 5 < 0$

و هذا يكافئ $(\ln(x)+1)(\ln(x)-5) < 0$

نلخص إشارة الجداء $(\ln(x)+1)(\ln(x)-5)$ في الجدول التالي و هذا تبعا لقيم x من $\Re_+^*$

x	$-\infty$	0	$\frac{1}{e}$	e^5	$+\infty$
إشارة ln(x)+1		$-$	0	$+$	$+$
إشارة ln(x)-5		$-$	$-$	0	$+$
إشارة (ln(x)+1)(ln(x)-5)		$+$	0 $-$	0	$+$

و منه مجموعة حلول المتراجحة المعطاة هي : $\left]\frac{1}{e};e^5\right[$

التمرين 7:

ليكن n عددا طبيعيا.

نسمي U_n رأس المال بعد n سنة من الإيداع عندئذ:

$$U_{n+1} = U_n + \frac{5}{100}U_n$$

$$= \frac{105}{100}U_n$$

و عليه (U_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{105}{100}$

و منه $$U_n = U_0 \times \left(\frac{105}{100}\right)^n$$

$$= 80000 \times \left(\frac{105}{100}\right)^n$$

n حل لمسألتنا يعني أن :

$$U_n \geq 150000$$

و هذا يعني : $$80000 \times \left(\frac{105}{100}\right)^n \geq 150000$$

و هذا يعني $\left(\frac{105}{100}\right)^n \geq \frac{15}{8}$

أي أن n حل لمسألتنا يعني أن : $\ln\left(\frac{105}{100}\right)^n \geq \ln\left(\frac{15}{8}\right)$

أي أن : $n \geq \dfrac{\ln\left(\frac{15}{8}\right)}{\ln\left(\frac{105}{100}\right)}$ $\left(\ln \text{ متزايدة تماما } \ln\frac{105}{100} > 0 \right)$

و لكن : $\dfrac{\ln\left(\frac{15}{8}\right)}{\ln\left(\frac{105}{100}\right)} \approx 12{,}88$

و منه بعد 12 سنة ، على الأقل، يصبح رأس المال أكثر من 150000DA .

التمرين 8:

تعيين المجموعة D ،مجموعة تعريف الدالة f ثم دراسة إشارة $f(x)$ ، حسب قيم x في المجموعة D .

1/ $f(x)=-4x^2\ln(x+3)$.

لدينا : $D=\{x, x\in\Re : x+3>0\}$

$=]-3\,;+\infty[$

ليكن x عنصرا من D عندئذ:

x	$-\infty$	-3		-2		0		$+\infty$
إشارة $-4x^2$		‖	$-$	0	$-$	0	$-$	
إشارة $\ln(x+3)$		‖	$-$		$+$		$+$	
إشارة $f(x)$		‖	$+$	0	$-$	0	$-$	

2/ $f(x)=\ln(x).(1-\ln(x))$

لدينا : $D=\{x, x\in\Re : (x>0)\}$

$=]0\,;+\infty[$

ليكن x عنصرا من D عندئذ:

x	$-\infty$		0		1		e		$+\infty$
إشارة ln(x)			‖	−	0	+		+	
إشارة 1-ln(x)			‖	+		+	0	-	
إشارة f(x)			‖	-	0	+	0	-	

$$f(x)=\frac{\ln(5-x)}{x^2-1} \quad /3$$

لدينا : D={x,x∈ℜ :(5-x>0) و(x^2-1≠0)}

أي أن : D=]-∞ ;-1[∪]-1 ;1[∪]1 ;5[

ليكن x عنصرا من D عندئذ:

x	$-\infty$		-1		1		4		5		$+\infty$
إشارة ln(5-x)		+	‖	+		+	0	-	‖		
إشارة x^2-1		+	‖	-		+		+	‖		
إشارة f(x)		+	‖	-		+	0	-	‖		

$$f(x)=1-(\ln(x))^2 \quad /4$$

لدينا : D={x,x∈ℜ :x>0}

=]0 ;+∞[

ليكن x عنصرا من D عندئذ:

لدينا : f(x)=(1-ln(x))(1+ln(x))

عندئذ:

x	$-\infty$	0		$\frac{1}{e}$		e	$+\infty$ e
إشارة 1-ln(x)		‖	+		+	0	-
إشارة 1+ln(x)		‖	-	0	+		+
إشارة f(x)		‖	-	0	+	0	-

التمرين 9:

تعيين واحدة من الدوال الأصلية لدالة f على المجال I فيكل حالة من الحالات التالية:

في كل ما يلي نسمي F الدالة الأصلية المعتبرة للدالة f على I:

/1 $f(x)=5x^{3}+3x+1+\frac{1}{x}$ و $I=]0\ ;+\infty[$

الدالة f مستمرة على I .ليكن x عنصرا من I عندئذ:

$$F(x)=\frac{5}{4}x^{4}+\frac{3}{2}x^{2}+x+\ln(x)$$ (لأن $x>0$)

/2 $f(x)=\frac{x^{2}+x+3}{x+1}$ و $I=]-1\ ;+\infty[$ الدالة f مستمرة على I .

ليكن x عنصرا من I عندئذ:

$$f(x)=\frac{x(x+1)+3}{x+1}=x+3\times\frac{1}{x+1}$$

و منه $F(x)=\frac{1}{2}x^{2}+3\ln(x+1)$ (لأن $x+1>0$)

/3 $f(x)=1-\frac{5}{\sqrt{x}}+\frac{3}{x}$ و $I=]-\infty\ ;0[$

الدالة f مستمرة على I .

ليكن x عنصرا من I عندئذ:

$$f(x)=1+10.\frac{-1}{2\sqrt{-x}}-3.\frac{-1}{-x}$$

و منه $F(x) = x + 10\sqrt{-x} - 3\ln(-x)$ (لأن $-x>0$)

/4 $f(x) = \frac{3x}{2x^2+1}$ و $I=\Re$

الدالة f مستمرة على I .

ليكن x عنصرا من I عندئذ:

$$f(x) = \frac{3}{4} \cdot \frac{4x}{2x^2+1}$$

و منه $F(x) = \frac{3}{4}\ln(2x^2+1)$ (لأن $2x^2+1>0$)

/5 الكيفية مماثلة للحالة الرابعة.

/6 الكيفية مماثلة للحالة الثالثة.

/7 $f(x) = \frac{5x+1}{5x^2+2x+20} - \frac{5x}{\sqrt{x^2+3}}$ و $I=\Re$

الدالة f مستمرة على I .

ليكن x عنصرا من I عندئذ:

$$f(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{10x+2}{5x^2+2x+20} - 5 \cdot \frac{2x}{2\sqrt{x^2+3}}$$

و منه $F(x) = \frac{1}{2}\ln(5x^2+2x+20) - 5\sqrt{x^2+3}$

(لأن $5x^2++2x+20>0$).

/8 $f(x) = \frac{(\ln x)^3}{x}$ و $I=]0\,;+\infty[$

الدالة f مستمرة على I .

ليكن x عنصرا من I عندئذ:

$$f(x) = \frac{1}{x}(\ln(x))^3$$

(الدالة f من الشكل $g^1.g^n : n \in N^*$)

و منه $F(x)=\frac{1}{4}(\ln(x))^4$

9/ $f(x)=\frac{1}{x.\sqrt{\ln(x)}}$ و I=]1 ;+∞[

الدالة f مستمرة على I .

ليكن x عنصرا من I عندئذ:

$$f(x)=\frac{\frac{1}{x}}{\sqrt{\ln(x)}}=2.\frac{\frac{1}{x}}{2\sqrt{\ln(x)}}$$

و منه $F(x)=2\sqrt{\ln(x)}$

10/ $f(x)=\frac{1}{x.\ln(x)}$ و I=]1 ;+∞[

الدالة f مستمرة على I .

ليكن x عنصرا من I عندئذ:

$$f(x)=\frac{\frac{1}{x}}{\ln(x)}$$

و منه $F(x)=\ln(\ln(x))$ (لأن ln(x)>0)

التمرين 10:

لدينا f الدالة المعرفة بالدستور: $f(x)=\frac{6x^2+5x}{2x+1}$

1/ تعيين المجموعة D، مجموعة تعريف الدالة f:

لدينا: D={x,x∈ℜ :2x+1≠0}

$$=\mathcal{R}-\{-\frac{1}{2}\}$$

2/ إيجاد أعداد حقيقية a،b،c بحيث من أجل كل عنصر x من المجموعة D يكون

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{2x+1}$$:

ليكن x عنصرا من D :

لدينا : $$f(x) = \frac{6x^2 + 3x - 3x + 5x}{2x+1}$$

$$= \frac{3x(2x+1) + 2x}{2x+1}$$

$$= \frac{3x(2x+1) + 2x + 1 - 1}{2x+1}$$

أي أن : $$f(x) = 3x + 1 - \frac{1}{2x+1}$$

و منه يكفي أخذ: a=3 و b=5 و c=-1.

* كان بالإمكان إجراء القسمة الإقليدية لـــ $(6x^2+5x)$ على $(2x+1)$.

3/تعيين مجموعة الدوال الأصلية للدالة f على المجال $]-\infty ; -\frac{1}{2}[$.

نسمي F_k الدوال الأصلية للدالة f على $]-\infty ; -\frac{1}{2}[$ حيث k ثابت من $\Re$.

مع الملاحظة أن الدالة f مستمرة على $]-\infty ; -\frac{1}{2}[$.

ليكن x عنصرا من $]-\infty ; -\frac{1}{2}[$ ، عندئذ:

$$f(x) = 3x + 1 - \frac{1}{2x+1}$$

$$= 3x + 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{-2}{-2x-1}$$

و منه $$F_k(x) = \frac{3}{2}x^2 + x - \frac{1}{2}\ln(-2x-1) + k$$

التمرين 11:

حساب التكامل من التكاملات المعطاة:

$$I_1 = \int_1^e \frac{1}{x} dx \ /1$$

لدينا : $I_1 = \int_1^e \frac{1}{x} dx = [\ln(x)]_1^e$

$$I_2 = \int_e^{e^2} \frac{x^2 + x + 1}{x^3} dx \ /2$$

لدينا : $I_2 = \int_e^{e^2} \frac{x^2 + x + 1}{x^3} dx = [\ln(x) - \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2}]_e^{e^2}$

أي : $I_2 = 2 - \frac{1}{e^2} - \frac{1}{2e^4} - 1 + \frac{1}{e} + \frac{1}{2e^2}$

$$= 1 - \frac{1}{2e^4} - \frac{1}{2e^2} + \frac{1}{e}$$

$$I_3 = \int_0^1 \frac{x}{x^2 + 1} dx \ /3$$

لدينا : $I_3 = \int_0^1 \frac{x}{x^2 + 1} dx = [\frac{1}{2} \ln(x^2 + 1)]_0^1 = \frac{1}{2} \ln(2)$

التمرين 12:

f الدالة المعرفة على المجال]0; +∞[بالدستور: $f(x) = x\ln(x) - x$

1/ تعيين الدالة المشتقة للدالة f :

ليكن x عنصرا من]0; +∞[

لدينا : $f'(x) = 1.\ln(x) + x.\frac{1}{x} - 1$

$$= \ln(x)$$

2/ تعيين مجموعة الدوال الأصلية للدالة ln على المجال]0; +∞[.

بالاستفادة من الفرع الأول الدوال الأصلية للدالة ln على]0; +∞[معرفة بالدستور : $x \to x\ln(x) - x + k$ حيث k ثابت حقيقي.

التمرين 13:

نفس فكرة التمرين 12 مع الملاحظة أنه من أجل كل x من]-1; +∞[

لدينا: $\ln(x+1) - \ln(x+2) = \ln\left(\dfrac{x+1}{x+2}\right)$

التمرين 14:

حساب كل نهاية من النهايات المعطاة:

في كل حالة من الحالات التالية نسمي f(x) العبارة المعطاة (التي طلب حساب نهايتها).

1/ $\lim\limits_{-\infty}\left(x \to \ln\left(\dfrac{2x+1}{x-2}\right)\right)$

لدينا : $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x+1}{x-2} = 2$ و منه $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \ln(2)$

2/ $\lim\limits_{(-3)^-}\left(x \to \ln\left(\dfrac{x+3}{x+1}\right)\right)$

لدينا $\lim\limits_{x\to(-3)^-}\dfrac{x+3}{x+1} = 0$

و منه $\lim\limits_{x\to(-3)^-} f(x) = -\infty$ (لأن $\lim\limits_{0^+}\ln = -\infty$)

3/ $\lim\limits_{(-1)^+}\left(x \to \ln\left(\dfrac{x+3}{x+1}\right)\right)$

لدينا : $\lim\limits_{x\to(-1)^+}\dfrac{x+3}{x+1}$ و منه $\lim\limits_{x\to(-1)^+} f(x) = +\infty$ (لأن $\lim\limits_{+\infty}\ln = +\infty$)

4/ $\lim\limits_{+\infty}\left(x \to \ln(3x^3 + x^2 + 1)\right)$

لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(3x^3 + x^2 + 1\right) = +\infty$

و منه $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ (لأن $\lim\limits_{+\infty}\ln=+\infty$)

5/ $\lim\limits_{-\infty}\left(x\to x^3+x\ln(-x)\right)$

لدينا : لما $x\to-\infty$ يكون :

$$\begin{cases} x^3\to-\infty \\ x\to-\infty \\ \ln(-x)\to+\infty \end{cases}$$

و منه : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ (اء $\lim\limits_{+\infty}\ln=+\infty$)

6/ $\lim\limits_{5^+}\left(x\to x+\ln(x-5)\right)$

لدينا : لما $x\to5^+$ نجد $x-5\to0$

و منه $\lim\limits_{x\to5^+} f(x)=-\infty$ (لأن $\lim\limits_{0^+}\ln=-\infty$)

7/ $\lim\limits_{\left(-\frac{1}{2}\right)^+}\left(x\to x^2+(4x+2)^3.\ln(2x+1)\right)$

لدينا: $\lim\limits_{x\to\left(-\frac{1}{2}\right)^+} f(x)=\lim\limits_{x\to\left(-\frac{1}{2}\right)^+}\left(x\to x^2+(4x+2)^3.\ln(2x+1)\right)$

$=\dfrac{1}{4}$

لأن $\lim\limits_{y\to0^+} y\ln y=0$

علما أن $y=2x+1$

8/ $\lim\limits_{+\infty}\left(x\to\dfrac{\ln(x+3)}{(5x+8)^5}\right)$

لدينا: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x+3}{(5x+8)^5}.\dfrac{\ln(x+3)}{x+3}\right)$

$=0$

لأن $\lim\limits_{y\to+\infty}\dfrac{\ln y}{y}=0$

علما أن $y=x+3$

9/ $\lim\limits_{-\infty}\left(x\to\dfrac{\ln(x^2+1)}{x+1}\right)$

ليكن x عنصرا من]-∞ ;0[

لدينا : $f(x)=\dfrac{\ln(x^2+1)}{x+1}$

$$=\frac{\ln(x^2(1+\frac{1}{x^2}))}{x+1}$$

$$=\frac{\ln(x^2)+\ln(1+\frac{1}{x^2})}{x+1}$$

$$=\frac{2\ln(-x)+\ln(1+\frac{1}{x^2})}{x+1}$$

$$=2\frac{\ln(-x)}{x+1}+\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{x+1}$$

أي أن : $f(x)=2.\dfrac{-x}{x+1}.\dfrac{\ln(-x)}{-x}+\dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{x+1}$

و لدينا : لمايكون $x\to-\infty$:

$$\begin{cases}\dfrac{-x}{x+1}\to -1\\ \dfrac{\ln(-x)}{-x}\to 0\\ \dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{x+1}\to 0\end{cases}$$

و منه : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$.

/10 $\lim\limits_{+\infty}\left(x\to\dfrac{\ln(3x^2+2x+1)}{\ln(2x^2+x+4)}\right)$

ليكن x عنصرا من $]0;+\infty[$ عندئذ:

$$f(x)=\frac{\ln\left(x^2\left(3+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right)\right)}{\ln\left(x^2\left(2+\frac{1}{x}+\frac{4}{x^2}\right)\right)}$$

$$=\frac{2\ln(x)+\ln\left(3+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{2\ln(x)+\ln\left(2+\frac{1}{x}+\frac{4}{x^2}\right)}$$

$$=\frac{\ln(x).\left[2+\frac{\ln\left(3+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{\ln(x)}\right]}{\ln(x).\left[2+\frac{\ln\left(2+\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}\right)}{\ln(x)}\right]}$$

$$=\frac{2+\frac{\ln\left(3+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{\ln(x)}}{2+\frac{\ln\left(2+\frac{1}{x}+\frac{4}{x^2}\right)}{\ln(x)}}$$

و منه $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\frac{2}{2}=1$

$$\lim_{0}\left(x\to\frac{\ln(x+2)-\ln 2}{x}\right)/11$$

لتكن g الدالة المعرفة بالدستور: $g(x)=\ln(x+2)$ عندئذ:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{g(x)-g(0)}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{g(x+0)-g(0)}{x}$$

$$= g'(0) \qquad \left(g'(x) = \frac{1}{x+2} \right)$$

$$= \frac{1}{2}$$

12/ نفس الفكرة المستعملة في النهاية 12.

$$\lim_{3} \left(x \to \frac{\ln(x-2)}{x-3} \right) /13$$

لدينا : $\lim_{x\to 3} f(x) = \lim_{x\to 3} \frac{\ln(x-2)-\ln(1)}{x-3}$

بوضع: g(x)=ln(x-2)

$$\lim_{x\to 3} f(x) = \lim_{x\to 3} \frac{g(x)-g(3)}{x-3}$$

$$= g'(3) \qquad \left(g'(x) = \frac{1}{x-3} \right)$$

$$= 1$$

14/نفس الفكرة المتبعة في النهاية 13.

$$\lim_{-1^+} \left(x \to \frac{1}{x+1} + \ln(x+1) \right) /15$$

لدينا : $\lim_{x\to(-1)^+} f(x) = \lim_{x\to(-1)^+} \left(\frac{1}{x+1} \left(1+(x+1)\ln(x+1)\right) \right)$

$$= +\infty$$

(لأن $\lim_{x\to(-1)^+} \left(x \to (x+1)\ln(x-1) \right) = 0$)

$$\lim_{+\infty}\left(x \to (x^2+7)-\ln(x^2+x+3)\right)$$/16

لدينا : $$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}(x^2+x+3)\left(\frac{x^2+7}{x^2+x+3}-\frac{\ln(x^2+x+3)}{x^2+x+3}\right)$$

(لأن $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(x^2+x+3\right)}{x^2+x+3}=0$)

التمرين 15:

$(U_n)_{n\in N}$ متتالية عددية جميع حدودها موجبة تماما بحيث:

$U_{0}=3$ و مهما تكون قيمة n في N: $\ln(U_{n+1})=-2+\ln(U_n)$.

1/إعطاء عبارة U_{n+1} بدلالة U_n:

ليكنn عنصرا من N .

لدينا : $\ln(U_{n+1})=-2+\ln(U_n)$

أي أن : $\ln(U_{n+1})-\ln(U_n)=-2$

أي أن : $\ln\left(\frac{U_{n+1}}{U_n}\right)=-2$

أي أن : $\frac{U_{n+1}}{U_n}=e^{-2}$

و هذا يعني: $U_{n+1}=e^{-2}U_n$.

طبيعة المتتالية(U_n):

لتكن nعنصرا من N.

من السؤال السابق لدينا : $U_{n+1}=e^{-2}U_n$

و منه المتتالية(U_n) هندسية أساساها r حيث $r=e^{-2}$.

2/إعطاء عبارة الحد العام للمتتالية (U_n):

ليكن n عنصرا من N.

لدينا : $U_n=U_0.r^n$

$=3.(e^{-2})^n$

$=3.e^{-2n}$

دراسة اتجاه تغير المتتالية (U_n):

ليكن n عنصرا من N.

لدينا : $U_{n+1}-U_n=3.e^{-2(n+1)}-3.e^{-2n}$

$=3.e^{-2n-2}(1-e^2)$

و بما أن $(1-e^2<0)$ و $(3.e^{-2n-2}>0)$

فإن: $U_{n+1}-U_n<0$:

و منه المتتالية (U_n) متناقصة تماما.

دراسة تقارب المتتالية (U_n):

(U_n) هندسية أساسها r حيث $r=e^{-2}$

بما أن (U_n): هندسيو و أساسها يحقق $-1<r<1$

فإن : (U_n) متقاربة نحو: 0.

3/طبيعة المتتالية (V_n):

ليكن n عنصرا من N.

لدينا : $V_n=\ln(U_n)$

$=\ln(3.e^{-2n})$

$=\ln3.\ln(e^{-2n})$

$=\ln3-2n$

عندئذ: $V_{n+1}-V_n=(\ln3-2n-2)-(\ln3-2n)$

و منه المتتالية (V_n) هندسية أساسها r' حيث : $r'=-2$

حساب المجموع S_n بدلالة العدد الطبيعي n:

ليكن n عنصرا من N.

لدينا : $S=V_0+V_1+\ldots..+V_n$

$$=\frac{n+1}{2}\left(V_0+V_n\right)$$

$$=\frac{n+1}{2}\left(\ln(U_0)+\ln 3-2n\right)$$

$$=(n+1)\left(\ln 3-n\right)$$

استنتاج عبارة الجداء Π_n بدلالة العدد الطبيعي n:

حدود المتتالية (U_n)
كلها موجبة

ليكن n عنصرا من N.

لدينا : $\Pi_n=u_0\times u_1\times\ldots\ldots\times u_n$

عندئذ: $\ln(\Pi_n)=\ln(u_0\times u_1\times\ldots\ldots\times u_n)$

$=\ln(u_0)+\ln(u_1)+......+\ln(u_n)$
$=v_0+v_1+......+v_n$
$=S_n$

و عليه: $\ln(\Pi_n)=S_n$

و بالتالي : $\Pi_n=e^{Sn}$
$=e^{(n+1)(\ln(3)-n)}$

التمرين 16:

f الدالة المعرفة بالدستور : $f(x)=\dfrac{9\ln(x)}{x}$

1/دراسة تغيرات الدالة f:

نجد جدول تغيرات الدالة f ممثلا في التالي:

x	$-\infty$	0		e		$+\infty$
$f'(x)$		‖	+	0	-	
$f(x)$		‖ $-\infty$	↗	$\frac{9}{e}$	↘	0

$$f'(x)=9.\frac{1-\ln(x)}{x^2}$$

2/دراسة الفروع اللانهائية للمنحني (C_f) الممثل للدالة f :

لدينا $\lim\limits_{0^+} f=-\infty$ و منه المستقيم الذي x=0 معادلة له هو مستقيم مقارب للمنحني (C_f).

و لدينا : $\lim\limits_{+\infty} f=-\infty$ و منه المستقيم الذي y=0 معادلة له هو مستقيم مقارب للمنحني (C_f).

3/ معادلة المستقيم (d) ،المماس للمنحني(C_f) في نقطة تقاطعه مع حامل محور الفواصل:

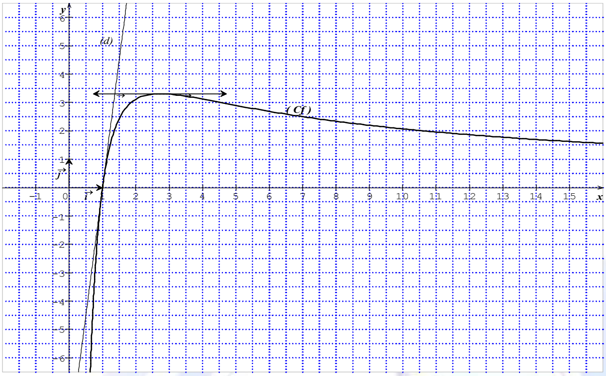
نقطة تقاطع (C_f) مع حامل محور الفواصل هي A حيث A(1 ;0)

عندئذ: معادلة لـــ(d) معرفة بـــ:

$y=f'(1).(x-1)+f(1)$
$=9(x-1)+0$
$=9x-9$

و منه y)9x-9 هي معادلة للمنحني (C_f) في النقطة A .

4/رسم المستقيم (d) و المنحني (C_f):



5/حساب المساحة المقدرة بالسنتيمتر المربع للحيز المحتوي

($\mathcal{D}$)المحدد بالمنحني (C_f) و المستقيمات ذات المعادلات y=0، x=e ، $x=e^2$

لتكن $\mathcal{A}$ المساحة المعتبرة عندئذ:

$$\mathcal{A}=\int_e^{e^2}9.\frac{\ln(x)}{x}dx$$

$$=9\int_e^{e^2}\frac{1}{x}(\ln(x))^1dx$$

$$=9\left[\frac{(\ln(x))^2}{2}\right]_e^{e^2}$$

$$=9\left(\frac{2^2}{2}-\frac{1^2}{2}\right)$$

$$=\frac{27}{2}$$

و بالسنتيمتر المربع: أي $\frac{27}{2}\times1\times1cm^2$ أي $\frac{27}{2}cm^2$

التمرين 17:

f الدالة المعرفة بالدستور: $f(x)=\ln\left(\dfrac{x}{x+1}\right)$

1/ دراسة تغيرات لدالة f:

بإتباع نفس المراحل المعتادة نجد أن جدول تغيرات f يتمثل في التالي:

x	$-\infty$ $\quad$ -1	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$		$+$
$f(x)$	$0 \nearrow +\infty$		$-\infty \nearrow 0$

2/تعيين المماسات لــ(C_f) الموازية للمستقيم (Δ) ذو المعادلة : $y=\dfrac{1}{2}x+3$

ليكن x عنصرا من $]-\infty;-1[\cup]0;+\infty[$

X حل لمسألتنا يعني أن : $f'(x)=\dfrac{1}{2}$

و هذا يعني: $x^2+x-2=0$

و هذا يعني : ($x=-2$) أو ($x=1$) .

و منه هناك نقطتان من(C_f) نسميها A_1 و A_2 حيث المماس لــ(C_f) في كل منهما يوازي(Δ) أين $A_1(1;-\ln(2))$ و $A_2(-2;\ln(2)$.

ليكن(Δ_1)المماس لــ (C_f)عند A_1 و ليكن ($\Delta2$)عندئذ:

$$\begin{cases}(\Delta_1): y=f'(1)(x-1)+f(1)\\(\Delta_2): y=f'(-2).(x+2)+f(-2)\end{cases}$$

أي أن :

$$\begin{cases}(\Delta_1): y=\dfrac{1}{2}(x-\dfrac{1}{2})+\ln(2)\\(\Delta_2): y=\dfrac{1}{2}.(x+2)+\ln(2)\end{cases}$$

أي أن :

$$\begin{cases} (\Delta_1): y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} - \ln(2) \\ (\Delta_2): y = \frac{1}{2}.x + 1 + \ln(2) \end{cases}$$

3/إثبات أن النقطة ω حيث $\omega(-\frac{1}{2};0)$ هي مركز تناظر للمنحني (C_f).

مهما يكون x ينتمي إلى $]-\infty;-1[\cup]0;+\infty[$

لدينا : $2\left(-\frac{1}{2}\right)-x$ ينتمي إلى هذه المجموعة.

لأن : $x\in]-\infty;-1[\cup]0;+\infty[$

يعني أن : $(x<-1)$ أو $(x>0)$

أي أن : $(-x>1)$ أو $(-x<0)$

و هذا يعني أن : $(-1-x>0)$ أو $(-1-x<-1)$

و هذا يعني أن : $\left(2\left(-\frac{1}{2}\right)-x>0\right)$ أو $\left(2\left(-\frac{1}{2}\right)-x<-1\right)$

لدينا : من أجل x ينتمي إلى المجموعة $]-\infty;-1[\cup]0;+\infty[$

$$f\left(2\left(-\frac{1}{2}\right)-x\right)+f(x)=f(-1-x)+f(x)$$

$$=\ln\left(\frac{-1-x}{-x}\right)+\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$$

$$=\ln\left(\frac{x+1}{x}.\frac{x}{x+1}\right)$$

$$=\ln(1)$$

$$=0$$

$$=2(0)$$

و منه و حسب المبرهنة نجد أن النقطة ω هي مركز تناظر للمنحني (C_f).

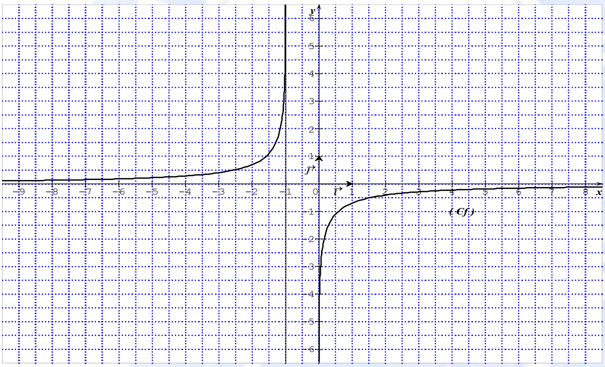
4/دراسة الفروع اللانهائية للمنحني (C_f).

لدينا : $\lim\limits_{+\infty} f = 0$ و $\lim\limits_{-\infty} f = 0$ و منه المستقيم الذي y=0 معادلة له هو مستقيم مقارب للمنحني لـــ(C_f).

و لدينا : $\lim\limits_{(-1)^-} f = +\infty$ و منه المستقيم الذي x=-1 معادلة له هو مستقيم مقارب للمنحني لـــ (C_f).

و لدينا : $\lim\limits_{0^+} f = -\infty$ و منه المستقيم الذي x=0 معادلة له هو مستقيم مقارب للمنحني لـــ (C_f).

*** رسم المنحني (C_f).**



5/إثبات أن F هي واحدة من الدوال الأصلية للدالة *f* على المجال]0; +∞[

الدالة F قابلة للاشتقاق على المجال]0; +∞[.

ليكن x عنصرا من المجال]0; +∞[

لدينا :
$$F'(x) = 1.\ln(x) + x.\frac{1}{x} - 1.\ln(x+1) - (x+1).\frac{1}{x+1}$$
$$= \ln(x) + 1 - \ln(x+1) - 1$$
$$= \ln(x) - \ln(x+1)$$

$$= \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$$

$$= f(x)$$

و منه F هي واحدة من الدوال الأصلية للدالة f على المجال $]0 ;+\infty[$

g/6 الدالة المعرفة بالدستور : $g(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$

إنشاء المنحني(C_g)مثل للدالة g بالنسبة إلى نفس المعلم السابق:

مجموعة تعريف الدالة g هي $]-\infty ;-1[\cup]0 ;+\infty[$

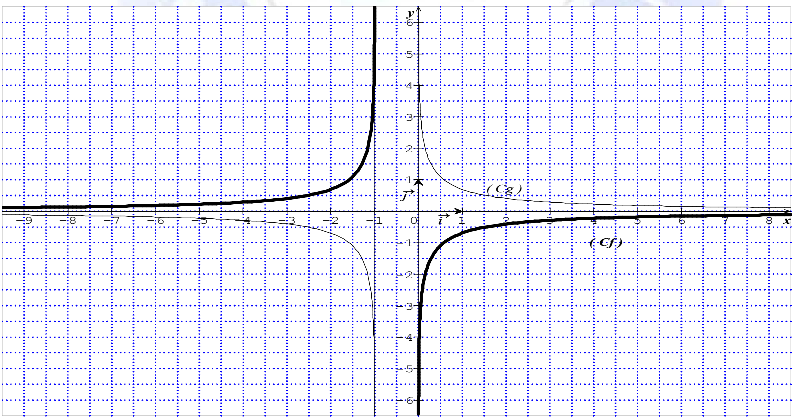
ليكن x عنصرا من $]-\infty ;-1[\cup]0 ;+\infty[$

لدينا : $g(x) = \ln\frac{x+1}{x}$

$$= -\ln\frac{x}{x+1}$$

$$= -f(x)$$

و منه(C_g) يناظر(C_f) بالنسبة لحامل محور الفواصل.



ب) حساب المساحة ، المقدرة بالسنتيمتر المربع ، للحيز المستوي$(\mathcal{D})$ المحدد بالمنحنيين (C_f) و(C_g)

و المستقيمين ذا المعادلتين x=1 و x=2

في المجال $[1 ;2]$ لدينا : $g(x)>f(x)$

و كل من f و g على المجال[2; 1] مستمرة :

نسمي $\mathcal{A}$ المساحة المعتبرة عندئذ:

$$\mathcal{A} = \int_1^2 (g(x) - f(x))dx$$

$$= \int_1^2 \left(\ln\left(\frac{x+1}{x}\right) - \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)\right)dx$$

$$= -2\int_1^2 f(x)dx$$

$$= -2[x\ln x - (x+1)\ln(x+1)]_1^2$$

$$= -2(2\ln(2) - 3\ln(3) - 0 + 2\ln(2))$$

$$= 6\ln(3) - 8\ln(2)$$

و بالسنتيمتر مربع المساحة هي:

$$(6\ln(3) - 8\ln(2)) \times 2 \times 2cm^2$$

أي هي : $24\ln(3) - 32\ln(2)$