4 - الدالة الأسية

الكفاءة المستهدفة

- توظيف خواص الدالة الأسية النيبرية .
- حل مشكلات بتوظيف الدالة الأسية.

تصميم الدرس

أنشطة

الدالة الأسية

تكنولوجيا الإعلام و الاتصال

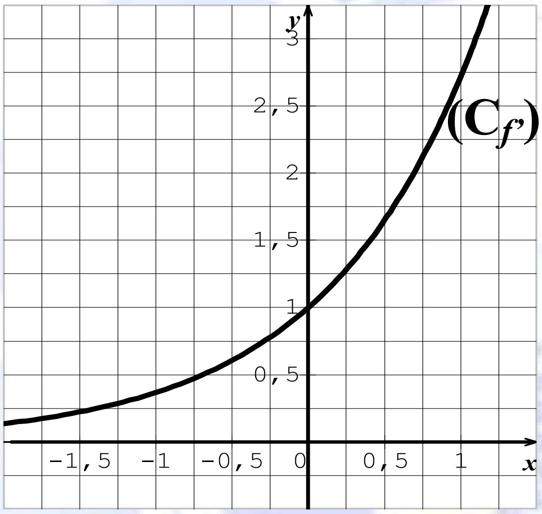
تمـارين و مشكلات

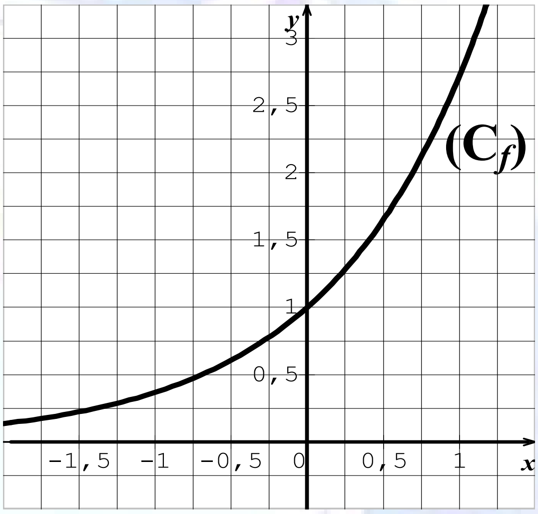
الحـلـــــــــول

أنشطة

النشاط :

إليك التمثيلان البيانيان $\left(C_f\right)$ و $\left(C_{f'}\right)$ لدالة f و دالتها المشتقة f' في معلـمين مختلفين .





1- عين مجموعة تعريف كل من الدالتين f و f' .

2- أحسب كل من $f\left(0\right)$ و $f'\left(0\right)$.

3- أدرس إشارة كل من f و f' ثم اتجاه تغير كل منها .

4- عين جدول تغيرات كل من الدالتين f و f' .

5- ما هو تخمينك حول الدالتين f و f' .

6- نفرض أن $f = f'$ احسب f''' .

الحل :

1)- الدالتان f و f' معرفتان على $\mathbb{R}$

2)- $f\left(0\right)=1$ ، $f'\left(0\right)=1$

3)- دراسة إشارة كل من f و f' :

إن البيانين $\left(C_f\right)$ و $\left(C_{f'}\right)$ يقعان فوق محور الفواصل و عليه فمن أجل كل عدد حقيقي x فإن :

$f'(x)>0$ و $f(x)>0$ و عليه f و f' متزايدتان على $\mathbb{R}$

4)- تعيين جدول التغيرات :

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$f''(x)$	+
$f(x)$	↗

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	+
$f(x)$	↗

5)- المخمنة حول f و f' :

نلاحظ أن : $f(0)=f'(0)=1$.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x)=0$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$$

و نقول أنه من أجل كل عدد حقيقي x فإن : $f'(x) = f(x)$

6)- إذا فرضنا أن $f=f'$ فإن :

$$f''=f'=f$$

$$f'''=f''=f$$

إذن : $f'''=f$.

الدالة الأسية :

1- مبرهنة 1 : (مقبولة) :

المعادلة التفاضلية $y' = y$ تقبل حلا وحيدا على $\mathbb{R}$ يحقق $f(0)=1$

وهذه الدالة f تسمى الدالة الأسية و يرمز لها بالرمز exp

2 – تعريف الدالة الأسية :

exp هي الدالة المعرفة بما يلي :

* exp قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و دالتها المشتقة هي : exp .

* $exp(0)=1$

3- مبرهنة 2 :

الدالة الأسية موجبة تماما على $\mathbb{R}$.

البرهان :

نعرف الدالة g على $\mathbb{R}$ كما يلي : $g(x)=exp(x).exp(-x)$

g تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ حيث :

$$g'(x) = \exp(x)\ .\ exp(-x)\ -\ exp(x)\ .\ exp(-x)=0$$

و منه g دالة ثابتة و عليه :

بما أن $exp(0)=1$ فإن : $g(x)=1$

و عليه : $exp(x).exp(-x)=1$

و منه : exp لا تنعدم أبدا .

لنبرهن أن الدالة exp موجبة تماما بالخلف :

نفرض وجود عدد x_0 بحيث $exp(x_0)\leq 0$ في المجال $\left[0\ ;\ x_0\right]$

أو المجال $\left[x_0\ ;\ 0\right]$. الدالة exp قابلة للاشتقاق فهي إذن مستمرة.

و لدينا : $exp(x_0)<0$ و $exp(0)>0$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $exp\left(x\right)=0$ تقبل حلا في هذا المجال و هذا يناقض الفرض لأن exp لا تنعدم على $\mathbb{R}$.

و منه لا يوجد أي عدد x_0 من $\mathbb{R}$ بحيث $exp\left(x_0\right)<0$

و عليه $exp\left(x\right)>0$ من أجل كل عدد طبيعي x .

4- مبرهنة3 :

a عدد حقيقي ثابت .

حلول المعادلة التفاضلية $y'=ay$ هي الدوال f_k المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة :

$f_k\left(x\right)=k.exp\left(ax\right)$ حيث k هو عدد حقيقي ثابت .

البرهان :

الدالة f_k تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ حيث دالتها المشتقة f_k' معرفة

كما يلي $f_k'\left(x\right)=ka.\exp\left(a\,x\right)$

لأن f_k هي جداء عدد في مركب دالتين و عليه : $f_k'\left(x\right)=af_k\left(x\right)$

و عليه f_k حل على $\mathbb{R}$ للمعادلة التفاضلية $y'=ay$

نفرض وجود حل آخر g على $\mathbb{R}$: $g'\left(x\right)=a.g\left(x\right)$

لنعتبر الدالة u على $\mathbb{R}$ المعرفة بالعبارة : $u\left(x\right)=\dfrac{g\left(x\right)}{exp\left(ax\right)}$

الدالة u تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ حيث :

$$u'\left(x\right)=\frac{g'\left(x\right)exp\left(ax\right)-a.exp\left(ax\right).g\left(x\right)}{\left[exp\left(ax\right)\right]^2}$$

و منه : $$u'\left(x\right)=\frac{g'\left(x\right)-ag\left(x\right)}{exp\left(ax\right)}=\frac{g'\left(x\right)-g'\left(x\right)}{exp\left(ax\right)}$$

إذن : $u'\left(x\right)=0$

و منه u دالة ثابتة . و عليه من أجل كل عدد x من $\mathbb{R}$: $u(x)=k$ و بالتالي :

$$\frac{g(x)}{exp(ax)}=k$$

أي أن : $g(x)=k.exp(ax)$

5- مبرهنة 4 :

من أجل كل عددان حقيقيان a و b : $exp(a+b)=exp(a)\times exp(b)$

البرهان :

نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة :

$g(x)=exp(x+b)$ حيث b عدد حقيقي .

الدالة تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ و دالتها المشتقة g' معرفة بالعبارة :

$g'(x)=exp(x+b)$ و عليه $g'(x)=g(x)$ و منه g حل للمعادلة التفاضلية $y'=y$

و من المبرهنة 3 : $g(x)=k.exp(x)$

و عليه : $exp(x+b)=k.exp(x)$

لكن من أجل $x=0$: $exp(b)=k.exp(0)$

لكن : $exp(0)=1$ و منه : $k=exp(b)$

و بوضع : $x=a$ نجد : $exp(a+b)=exp(a)exp(b)$

6– نتائج :

a و b عددان حقيقيان . x عدد طبيعي .

1) $exp(-a)=\dfrac{1}{exp(a)}$

البرهان :

لدينا $exp(0)=1$ و لدينا $exp(0)=exp(a+(-a))$

و منه : $exp(a+(-a))=1$ و عليه حسب المبرهنة (1) :

$$exp(a)exp(-a)=1$$

و بالتالي : $$exp(-a)=\frac{1}{exp(a)}$$

2) $$exp(a-b)=\frac{exp(a)}{exp(b)}$$

البرهان: $$exp(a-b)=exp(a+(-b))=exp(a)exp(-b)$$

$$=exp(a)\frac{1}{exp(b)}$$

إذن : $$exp(a-b)=\frac{exp(a)}{exp(b)}$$

3) $$exp(nx)=\left(exp(x)\right)^n$$

فمثلا من أجل $n=0$: $exp(0.x)=\left(exp(0)\right)^0$

و منه محققة لأن : $exp(0)=1$

و من أجل : $n=1$: $exp(1.x)=\left[exp(x)\right]^1$ و هي محققة .

و من أجل : $n=2$: $exp(2.x)=\left[exp(x)\right]^2$ و هي صحيحة حسب المبرهنة 4 .

و عليه نقبل أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن : $exp(n.x)=\left[exp(x)\right]^n$

7- المبرهنة 5 :

نرمز إلى صورة العدد 1 بالدالة exp بالرمز e أي : $exp(1)=e$ و يسمى e العدد النيبيري .

حيث تعطى الآلة الحاسبة قيمة e : $e=2,718281828...$

و لدينا من أجل كل عدد حقيقي x : $exp(x)=e^x$

البرهان :

من أجل كل عدد طبيعي n لدينا مما سبق : $exp(nx)=\left[exp(x)\right]^n$

- و من أجل $x=1$ لدينا : $exp(n)=\left[exp(1)\right]^n$

و عليه : $exp(n)=e^n$

- من أجل كل عدد صحيح سالب x

لدينا : $exp(x)=\dfrac{1}{exp(-x)}=\dfrac{1}{\mathrm{e}^{-x}}$

- من أجل كل عدد ناطق x : نضع $x=pa$ حيث : $a=\dfrac{1}{q}$

مع q هو عدد طبيعي موجب تماما .

$$exp(qa)=\left[exp(a)\right]^q$$

لكن $qa=1$ و منه : $\left[exp(a)\right]^q=exp(1)=e$

و عليه : $exp(a)=e^{\frac{1}{q}}$

و عليه : $exp(x)=exp(pa)=\left[exp(a)\right]^p=\left(e^{\frac{1}{q}}\right)^p$

ومنه : $exp(x)=e^{\frac{p}{q}}=e^x$ إذن : $exp(x)=e^x$

- نقبل أن المبرهنة صحيحة من أجل كل عدد حقيقي x اصطلاحا
- أي أن : $exp\left(x\right)=e^{x}$

8- إعادة المبرهنات و النتائج السابقة باستعمال الرمز e^{x} :

1) الدالة $x\mapsto e^{x}$ تسمى الدالة الأسية و هي معرفة على $\mathbb{R}$

و دالتها المشتقة هي : $x\mapsto e^{x}$. حيث : $e^{0}=1$.

2) من أجل كل عدد حقيقي x : $e^{x}>0$.

3) من أجل كل عددان حقيقيان a و b لدينا :

- $e^{a+b}=e^{a}\cdot e^{b}$
- $e^{-a}=\dfrac{1}{e^{a}}$
- $e^{a-b}=\dfrac{e^{a}}{e^{b}}$
- $e^{na}=\left(e^{a}\right)^{n}$ ؛ $n\in\mathbb{N}$

9- نهايات الدالة الأسية :

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{x}=+\infty$

البرهان :

نعتبر الدالة f حيث : $f\left(x\right)=e^{x}-x$.

الدالة هي الفرق بين دالتين تقبلان الاشتقاق على $\mathbb{R}$

و عليه فهي تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ حيث : $f'\left(x\right)=e^{x}-1$

و بما أن الدالة $x\mapsto e^{x}$ متزايدة تماما على $\mathbb{R}$ لأن دالتها المشتقة موجبة تماما على $\mathbb{R}$

فان : $f'\left(x\right)\geq 0$

تكافئ $e^{x}\geq 1$ أي $e^{x}\geq e^{0}$ و منه : $x\geq 0$ إذن f متزايدة تماما على

$\left[0,+\infty\right[$ و متناقصة تماما على $\left]-\infty,0\right]$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$		$\searrow$	1	$\nearrow$	

العدد 1 هو قيمة حدية صغرى للدالة f على $\mathbb{R}$

و عليه من أجل كل عدد حقيقي x : $f(x) \geq 1$

و بالتالي : $f(x) \geq 0$ و منه $e^x - x \geq 0$ إذن : $e^x \geq x$

و بما أن : $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$ فإن : $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = 0$

و ذلك حسب مبرهنة الحد من الأدنى .

(b $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$

البرهان :

$\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{e^{-x}} = \lim\limits_{z \to +\infty} \frac{1}{e^z}$ و هذا بوضع : $-x = z$

(c $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$

البرهان :

لدينا من أجل كل عدد حقيقي x : $e^x \geq x$ مما سبق

و عليه من أجل كل عدد حقيقي x : $e^{\frac{x}{2}} \geq \frac{x}{2}$

من أجل $x \geq 0$: $\left(\frac{x}{2}\right)^2 \leq \left(e^{\frac{x}{2}}\right)^2$

إذن : $e^x \geq \frac{x^2}{4}$ و عليه : $\frac{e^x}{x} \geq \frac{x}{4}$

و بما أن $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{4} = +\infty$ فإن حسب مبرهنة الحصر : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$

(d $\lim\limits_{x \to -\infty} xe^x = 0$

البرهان :

$$\lim_{x \to -\infty} xe^x = \lim_{x \to -\infty} \frac{x}{e^{-x}} = \lim_{x \to -\infty} \frac{-1}{\frac{e^{-x}}{-x}} = \lim_{z \to +\infty} \frac{-1}{\frac{e^z}{z}} = 0$$

و ذلك بوضع $z = -x$

(e $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x}$

البرهان :

الدالة f : $x \mapsto e^x$ تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ و عليه فهي تقبل الاشتقاق عند 0 حيث :

$$(1)\ldots f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{e^x\text{-}e^0}{x\text{-}0} = \lim_{x \to 0} \frac{e^x\text{-}1}{x}$$

و من جهة أخرى الدالة المشتقة للدالة f هي الدالة f' المعرفة بالعبارة : $f'(x) = e^x$

وعليه : $(2)\ldots f'(0) = e^0 = 1$

من (1) و (2) : $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

جدول التغيرات للدالة الأسية : $f : x \mapsto e^{x}$

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	0 ↗	$+\infty$

معادلة المماس عند النقطة $A(0;1)$ هي :

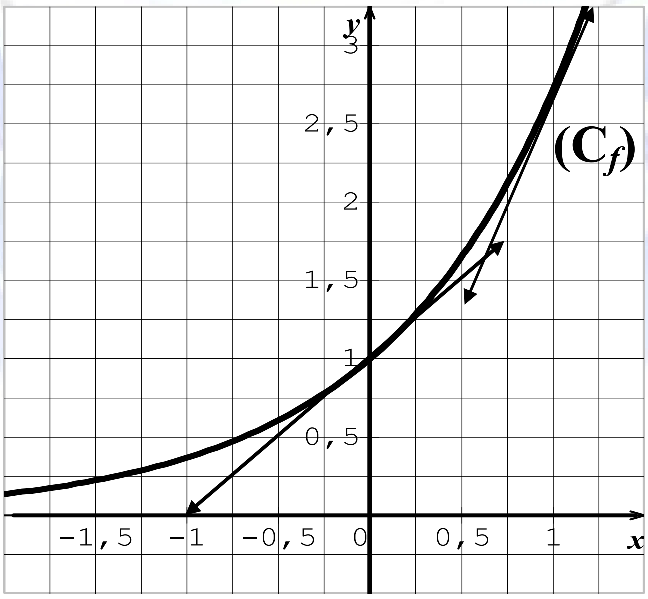
$y = f'(0).(x-0)+f(0)$ و منه : $y = x+1$

معادلة المماس عند النقطة $B(0;1)$ هي : $y = f'(1).(x-1)+f(1)$ و

منه : $y = e(x-1)+e$

وعليه : $y = ex$

التمثيل البياني للدالة الأسية :



نتائج :

لدينا الدالة $x \mapsto e^x$ متزايدة تماما على $\mathbb{R}$ و عليه من أجل كل عددان حقيقيان a و b لدينا :

$a = b$ تكافئ : $e^a = e^b$ ؛ $a > b$ تكافئ : $e^a > e^b$

$a < b$ تكافئ : $e^a < e^b$ ؛ $x > 0$ تكافئ : $e^x > 1$

$x < 0$ تكافئ : $e^x < 1$

10- الدالة المشتقة للدالة $x \mapsto e^{g(x)}$:

مبرهنة :

إذا كانت g دالة معرفة على المجال I و قابلة للاشتقاق على I فإن الدالة $x \mapsto e^{g(x)}$ تقبل الاشتقاق على I و دالتها المشتقة هي الدالة $x \mapsto g'(x)e^{g(x)}$.

البرهان :

الدالة $x \mapsto e^{g(x)}$ هي مركب الدالتين g التي تقبل الاشتقاق على I و الدالة $x \mapsto e^x$ التي تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ و عليه الدالة $x \mapsto e^{g(x)}$ تقبل الاشتقاق على I و دالتها المشتقة هي الدالة $x \mapsto g'(x)e^{g(x)}$

مثال :

الدالة f : $x \mapsto e^{x^2-4x}$ تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ لأنها مركب للدالة $x \mapsto x^2 - 4x$ التي تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ و الدالة $x \mapsto e^x$ التي تقبل الاشتقاق $\mathbb{R}$ و دالتها المشتقة معرفة بالعبارة :

$$f'(x) = (2x-4)e^{x^2-4x}$$

11- الدالة الأصلية للدالة f :

لدينا : $x \mapsto g'(x)e^{g(x)}$ حيث g دالة مستمرة و قابلة للاشتقاق على المجال I

هي الدالة h : $x \mapsto e^{g(x)}$ لأنه من أجل كل عدد حقيقي x من I :

$$f'(x) = g'(x)e^{g(x)} = f(x)$$

مثال :

عين مجموعة الدوال الأصلية للدالة f :

$$x \mapsto xe^{x^2-4}$$

الحل :

الدالة f مستمرة على $\mathbb{R}$ لأنها مركب و جداء دوال مستمرة على $\mathbb{R}$ و عليه تقبل دوال أصلية h .

لدينا : $f(x) = xe^{x^2-4}$ ومنه : $h(x) = \frac{1}{2}.2x.e^{x^2-4}$

و عليه : $f(x) = \frac{1}{2}.e^{x^2-4} + c$ حيث c عدد حقيقي ثابت .

تكنولوجيا الإعلام و الاتصال

التطبيق :

أنشئ تمثيلا تقريبيا لحل المعادلة التفاضلية $y' = y$ و $y(0) = 1$ باستعمال طريقة Euler بمجدول Excel في المجال $\left[-2;2\right]$ والخطوة. $h = 0,005$

الحل :

لدينا: $\Delta y \simeq f'(x).\Delta x$ ومنه $f(x+h) - f(x) \simeq f'(x).h$ أو $f(x-h) - f(x) \simeq -f'(x).h$ مع $h > 0$

وبما أن $y' = y$ فإن $f(x) = f'(x)$ فنحصل على $f(x+h) \approx f(x)(1+h)$ أو $f(x-h) \approx f(x)(1-h)$.

نتحصل بالعبارة الأولى $f(x+h) \approx f(x)(1+h)$ قيم الدالة (الحل) من أجل $x > 0$ وتعطي العبارة الثانية $f(x-h) \approx f(x)(1-h)$ قيم الدالة (الحل) من أجل القيم $x < 0$ وذلك باعتبار $f(0) = 1$ في الانطلاقة وجعل h صغيرا بالقدر الذي يضمن تقريبا جيدا.

نستخدم مجدول Excel لمقاربة التمثيل البياني للدالة الحل .

حجز الأعداد:

نحجز الخطوة h في الخانة A3 مثلا.

على الجزء $\left[-2;0\right]$

نحجز في الخانة A4 قيمة إبتدائية للمتغير وهي 0

نحجز في الخانة A5 القاعدة $= x - h$ التي تعطي قيم المتغير x التي هي قبل 0 بطرح الخطوة في كل مرة حتى الحصول على العدد -2 فنحجز: $= A4 - A\$3$ ثم نعمم على باقي الخانات من عمود A إلى غاية الحصول على القيمة -2 أو أقرب قيمة لها.

نحجز في الخانة B4 العدد 1 وهو قيمة الدالة من أجل 0 لأن $f(0) = 1$

نحجز في الخانة B5 القيمة التقريبية للعدد $y = f(x-h)$ ولدينا $f(x-h) \approx f(x).(1-h)$ فنحجز : $= B4 * (1 - A\$3)$ ثم نعمم على باقي الخانات من عمود B حتى الوصول إلى آخر قيمة للمتغير من العمود A .

على الجزء $[0;2]$

نحجز في الخانة C4 قيمة ابتدائية للمتغير وهي 0

نحجز في الخانة C5 القاعدة $=x+h$ التي تعطي قيم المتغير x التي هي بعد 0 بإضافة الخطوة في كل مرة حتى الحصول على العدد 2 فنحجز: $=C4+A\$3$ ثم نعمم على باقي الخانات من عمود C إلى غاية الحصول على القيمة 2 أو أقرب قيمة لها.

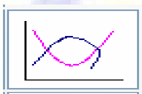
نحجز في الخانة D4 العدد 1 وهو قيمة الدالة من أجل 0 لأن $f(0)=1$

نحجز في الخانة D5 القيمة التقريبية للعدد $y=f(x+h)$ ولدينا $f(x+h)\approx f(x).(1+h)$ فنحجز : $=D4*(1+A\$3)$ ثم نعمم على باقي الخانات من عمود D حتى الوصول إلى آخر قيمة للمتغير من العمود B .

التمثيل البياني:

نختار العمودين A وB نضغط على المساعد البياني 

ونختار 

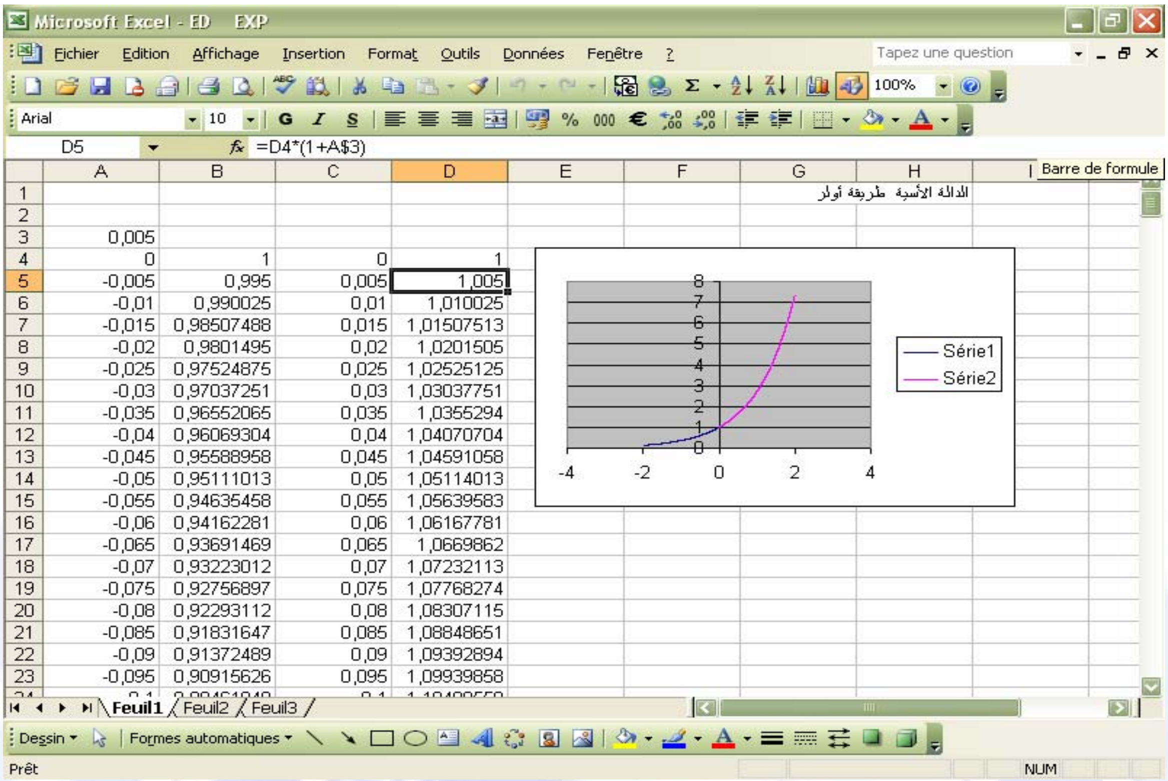
ثم المنحنى من النوع ،

نواصل العملية بالضغط على Suivant > ثم اختيار السلسلة بالضغط على Série نجد السلسلة الأولى التي تخص تمثيل الدالة (الحل) على المجال الأول $[-2;0]$ محجوزة باسم Série1 . ثم نضغط على Ajouter لإضافة السلسلة الثانية التي تعطي التمثيل البياني على المجال الثاني $[0;2]$ كما يلي:

نضع مؤشر الكتابة على خانة قيم x ثم نحجز قيم العمود C بالضغط بالفأرة من القيمة الأولى في C4إلى آخر قيمة من نفس العمود.

نضع مؤشر الكتابة على خانة قيم y ثم نحجز قيم العمود D بالضغط بالفأرة من القيمة الأولى في D4 إلى آخر قيمة من نفس العمود.

نضغط بعدها على التالي Suivant > فيظهر المنحنيان مكملان لبعضهما بلونين مختلفين ،حيث يشكلان منحنى الدالة (الحل) على المجال $[-2;2]$ ، ثم الإنهاء Terminer



Microsoft Excel - ED EXP
Fichier Edition Affichage Insertion Format Outils Données Fenêtre ?
Tapez une question
100%
Arial 10
D5
=D4*(1+A$3)
Barre de formule
الدالة الأسية طريقة أولر
0,005
0 1 0 1
-0,005 0,995 0,005 1,005
-0,01 0,990025 0,01 1,010025
-0,015 0,98507488 0,015 1,01507513
-0,02 0,9801495 0,02 1,0201505
-0,025 0,97524875 0,025 1,02525125
-0,03 0,97037251 0,03 1,03037751
-0,035 0,96552065 0,035 1,0355294
-0,04 0,96069304 0,04 1,04070704
-0,045 0,95588958 0,045 1,04591058
-0,05 0,95111013 0,05 1,05114013
-0,055 0,94635458 0,055 1,05639583
-0,06 0,94162281 0,06 1,06167781
-0,065 0,93691469 0,065 1,0669862
-0,07 0,93223012 0,07 1,07232113
-0,075 0,92756897 0,075 1,07768274
-0,08 0,92293112 0,08 1,08307115
-0,085 0,91831647 0,085 1,08848651
-0,09 0,91372489 0,09 1,09392894
-0,095 0,90915626 0,095 1,09939858
Série1
Série2
Feuil1 Feuil2 Feuil3
Dessin Formes automatiques
Prêt
NUM

تمـارين و مشكلات

التمرين 1 .

ضع العلامة √ أمام كل جملة صحيحة و العلامة × أمام كل جملة خاطئة

1) $e^{-3} < 0$

2) $e^{-5} = -e^{5}$

3) التمثيل البياني للدالة $x \mapsto e^{x}$ يقطع حامل محور الفواصل .

4) $\sqrt{e^{2x}} = e^{x}$

5) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{e^{x}} = 0$

6) الدالة المشتقة للدالة $x \mapsto e^{3x}$ هي $x \mapsto e^{3x}$

7) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \dfrac{e^{x}}{x} = +\infty$

8) إذا كان $x \geq 2$ فإن $e^{x} \geq e^{2}$

9) إذا كان $x \leq 0$ فإن $e^{x} \leq 0$

10) من أجل كل عدد حقيقي x : $e^{x}.e^{-x} = 1$

11) إشارة : $(x-1)e^{x}$ هي نفس إشارة $x-1$

12) من أجل $x < 1$: $e^{x-1} < 0$

13) $\lim\limits_{x \to +\infty} xe^{x} = 0$

14) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{ex}{x^{3}} = +\infty$

15) $e^{x} - e = e^{x-1}$

16) $e^{2x} - 2e^{x} + 1 = \left(e^{x} - 1\right)^{2}$

17) الدالة : $x \mapsto e^{-1}x + 3$ متزايدة تماما على $\mathbb{R}$

18) ليس للمتراجحة $e^{x^2-4x} < 0$ حل في $\mathbb{R}$

19) الدالة : $x \mapsto e^{x^2-4}$ هي حل للمعادلة : $y' = y$

20) $e^{-\frac{1}{2}} < 1$

التمرين 2 .

بسط ما يلي :

$$1)\ e^{3x}.e^{-2x} \qquad 2)\ e^{x}.e^{2} \qquad 3)\ \frac{1}{\left(e^{-x}\right)^2}$$

$$4)\ \frac{e^{4x+1}}{e^{2x}.e^{-1}} \qquad 5)\ \frac{e^{-4x+5}}{\left(e^{x-2}\right)^2} \qquad 6)\ e^{x}\left(e^{-x}+e^{2x}\right)$$

التمرين 3 .

بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x فإن :

$$\frac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}} = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$$

التمرين 4 .

بين أن الدوال f المعرفة كما يلي هي دوال معرفة على $\mathbb{R}$:

$$1)\ f(x)=\sqrt{e^{x}+e^{-x}} \qquad 2)\ f(x)=\frac{1}{e^{2x}+1}$$

$$3)\ f(x)=\frac{1}{\sqrt{e^{x}+4}} \qquad 4)\ f(x)=\frac{e^{x}}{e^{x}+3}$$

التمرين 5 .

نعتبر الدالة f حيث : $f(x)=\dfrac{x}{e^{x}+1}$

إذا علمنا أن: $0 \le x \le 1$ عين حصرا للعبارة $f(x)$.

التمرين 6 .

حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية :

1) $e^{2x-1}=1$ 2) $e^{x^2-1}=e$

3) $\left(x^2-4x+3\right)e^x=0$ 4) $e^{2x}-2e^x+1=0$

5) $\left(x^2-4\right)e^x=\left(9x+10\right)e^x$ 6) $e^x-e^{-x}=0$

7) $e^{3x}-\dfrac{1}{e^x}=0$

التمرين 7 .

حل في $\mathbb{R}$ المتراجحات التالية :

1) $xe^{2x}-x^2e^{2x}\leq 0$ 2) $e^{2x-1}\leq 1$

3) $e^{x^2-4}\leq e^{7x-16}$ 4) $e^{x^2-2}\leq \dfrac{1}{e^x}$

5) $e^{2x}-2e^x+1\leq 0$ 6) $x^2e^{4x}+4e^x>0$

التمرين 8 .

عين مجموعة تعريف الدالة f و المجموعة التي تقبل فيها الاشتقاق ثم عين دالتها المشتقة f' في كل حالة مما يلي :

1) $f\left(x\right)=e^{2x}-e^{-x}$ 2) $f\left(x\right)=xe^{x-1}$

3) $f\left(x\right)=\dfrac{e^x+x}{e^x-1}$ 4) $f\left(x\right)=\dfrac{e^x}{x^2-1}$

5) $f\left(x\right)=\left(x^2-4x+5\right)e^x$ 6) $f\left(x\right)=\sqrt{e^x-1}$

7) $f\left(x\right)=e^{\frac{1}{x}}$ 8) $f\left(x\right)=\sin xe^{\cos x}$

9) $f\left(x\right)=\dfrac{e^x-1}{e^x+1}$ 10) $f\left(x\right)=\sqrt{e^{2x}-2e^x+1}$

التمرين 9 .

احسب نهايات الدالة f في كل حالة مما يلي عند مجموعة التعريف :

1) $f(x)=x+e^{x}$ 2) $f(x)=e^{-x+4}$

3) $f(x)=e^{\frac{1}{x^{2}}}$ 4) $f(x)=xe^{\frac{1}{x}}$

5) $f(x)=\dfrac{e^{x}}{x^{2}}$ 6) $f(x)=\dfrac{e^{-x}}{e^{x}+1}$

7) $f(x)=\dfrac{e^{2x}-1}{x}$ 8) $f(x)=(x-1)e^{x}$

التمرين 10 .

نعتبر الدالة f و المعرفة كما يلي :

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{e^{2x}-e^{x}}{x} \quad , \quad x\neq 0 \\ f(0)=0 \end{cases}$$

1 – ادرس قابلية الاشتقاق للدالة f عند 0 .

2 – عين الدالة المشتقة للدالة f من أجل $x\neq 0$.

التمرين 11 .

نعتبر الدالة f حيث : $f(x)=(4x+3)e^{x}$

احسب كل من المشتقات : f' , f'' , $f^{(3)}$, $f^{(4)}$.

ثم استنتج عبارة $f^{(n)}(x)$.

و برهن على الاستنتاج بالتراجع من أجل $n\geq 1$.

التمرين 12 .

أدرس التغيرات لكل من الدوال المعرفة كما يلي :

1) $f(x)=xe^{x}$ 2) $f(x)=x-e^{x}$

$3)\ f(x)=\frac{e^x}{x}$ $\qquad$ $4)\ f(x)=\frac{e^x+1}{e^x-1}$

التمرين 13 .

نعتبر الدالة f حيث : $f(x)=e^x+e^{-x}$

1) ادرس تغيرات الدالة f ؛ ثم استنتج أنه من أجل كل عدد حقيقي x

فإن : $f(x)\geq 2$.

2) نعتبر الدالة g المعرفة بالعبارة : $g(x)=\frac{1}{e^x+e^{-x}-1}$

- ادرس تغيرات الدالة g .

- باستعمال آلة بيانية أنشئ التمثيل البياني (c) للدالة g .

التمرين 14 .

I) h دالة معرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $h(x)=1-x-e^{-x}$

1) ادرس تغيرات الدالة h .

2) استنتج إشارة $h(x)$ على $\mathbb{R}$.

II) نعتبر الدالة f حيث : $f(x)=\frac{x}{e^x-1}$

1) احسب $f'(x)$ ثم استنتج إشارتها و اتجاه تغير الدالة f .

2) احسب نهايات الدالة f عند مجموعة تعريفها . ثم استنتج جدول

تغيراتها .

3) أنشئ التمثيل البياني للدال f في معلم متعامد متجانس $(O;\ \vec{i}\ ;\vec{j})$

باستعمال آلة بيانية .

التمرين 15 .

نعتبر الدالة f حيث : $f(x)=\dfrac{2e^x}{e^x-1}$

1) ادرس تغيرات الدالة f .

2) ليكن (C) التمثيل البياني للدالة f في معلم متعامد متجانس $\left(O;\ \vec{i},\vec{j}\right)$. بين أن (C) يقبل ثلاثة مستقيمات مقاربة .

3) بين أن النقطة $w(0;1)$ مركز تناظر للمنحنى (C) ثم أنشئه .

4) نعتبر الدالة g حيث : $g(x)=\dfrac{2e^x}{\left|e^x-1\right|}$

- اكتب $g(x)$ دون رمز القيمة المطلقة .
- أنشئ (δ) التمثيل البياني للدالة g باستخدام (C) .
- ناقش بيانيا تبعا لقيم الوسيط الحقيقي m عدد و إشارة حلول المعادلة ذات المجهول الحقيقي m بحيث :

$$(m-3)\left|e^x-1\right|=2e^x$$

التمرين 16 .

I) f دالة معرفة بالعبارة : $f(x)=\left(2x^2-3x\right)e^x$ ، (C) تمثيلها البياني في معلم متعامد متجانس $\left(O;\ \vec{i},\vec{j}\right)$.

1) ادرس تغيرات الدالة f .

2) ادرس الفروع اللانهائية للمنحنى (C).

3) بين أن (C) يقبل نقطتي انعطاف يطلب تعيين فاصلتيهما .

4) عين معادلة المماس (Δ) للمنحني (C) عند النقطة ذات الفاصلة 0 .

5) ارسم (Δ) و (C) .

II) نعتبر الدالة g حيث : $g\left(x\right)=\left(2x^{2}+ax+b\right)e^{x}$

1) عين العددين الحقيقيين a و b حتى تكون الدالة g أصلية للدالة f .

2) اوجد الشرط الذي يحققه a و b حتى تقبل الدالة g قيمة حدية كبرى و أخرى صغرى .

الحــــــــلــــول

التمرين 1

(1 $\times$	(2 $\times$	(3 $\times$	(4 $\surd$
(5 $\surd$	(6 $\times$	(7 $\surd$	(8 $\surd$
(9 $\times$	(10 $\surd$	(11 $\surd$	(12 $\times$
(13 $\times$	(14 $\surd$	(15 $\times$	(16 $\surd$
(17 $\surd$	(18 $\times$	(19 $\times$	(20 $\surd$

التمرين 2

التبسيط :

$$1)\ e^{3x}.e^{-2x}=e^{3x-2x}=e^{x}\qquad 2)\ e^{x}.e^{2}=e^{x+2}$$

$$3)\ \frac{1}{\left(e^{-x}\right)^{2}}=\frac{1}{e^{-2x}}=e^{2x}$$

$$4)\frac{e^{4x+2}}{e^{2x}.e^{-1}}=e^{4x+1}.e^{-2x}.e^{1}=e^{4x-2x+1}=e^{2x+2}$$

$$5)\frac{e^{-4x+5}}{\left(e^{x-2}\right)^{2}}=\frac{e^{-4x+5}}{e^{2x-4}}=e^{-4x+5}.e^{-2x+4}=e^{-6x+9}$$

$$6)\ e^{x}\left(e^{-x}+e^{2x}\right)=e^{x}.e^{-x}+e^{x}.e^{2x}=e^{x-x}+e^{x+2x}=1+e^{3n}$$

التمرين 3

نبين أن : $\dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}=\dfrac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}}$

$$\frac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}}=\frac{e^{x}-\frac{1}{e^{x}}}{e^{x}+\frac{1}{e^{x}}}=\frac{\frac{e^{2x}-1}{e^{x}}}{\frac{e^{2x}+1}{e^{x}}}=\frac{e^{2x}-1}{e^{x}}\times\frac{e^{x}}{e^{2x}+1}=\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$$

التمرين 4

1) لدينا : $f(x)=\sqrt{e^{x}+e^{-x}}$

ومنه : $D_f=\{x\in\mathbb{R}: e^{x}+e^{-x}\geq 0\}$

و هي محققة دوما لأن $e^{x}>0$ و $e^{-x}>0$ ، $D_f=\mathbb{R}$

2) لدينا : $f(x)=\frac{1}{e^{2x}+1}$

ومنه : $D_f=\{x\in\mathbb{R}: e^{2x}+1\neq 0\}$

$e^{2x}+1=0$ تكافئ $e^{2x}=-1$ و هذا مستحيل إذن : $D_f=\mathbb{R}$.

3) لدينا : $f(x)=\frac{1}{\sqrt{e^{x}+4}}$

ومنه : $D_f=\{x\in\mathbb{R}: e^{x}+4>0\}$

$e^{x}+4>0$ محققة دوما لأن $e^{x}>0$ ومنه : $D_f=\mathbb{R}$.

4) لدينا : $f(x)=\frac{e^{x}}{e^{x}+3}$

ومنه : $D_f=\{x\in\mathbb{R}: e^{x}+3\neq 0\}$

$e^{x}+3=0$ تكافئ : $e^{x}=-3$ وهذا مستحيل ومنه : $D_f=\mathbb{R}$.

التمرين 5

تعيين حصرا للعبارة : $f(x)$

لدينا : $0\leq x\leq 1$ ومنه : $e^{0}\leq e^{x}\leq e^{1}$

إذن : $2 \le e^x + 1 \le 1 + e$ و بالتالي : $\frac{1}{1+e} \le \frac{1}{e^x+1} \le \frac{1}{2}$

و منه : $0 \times \frac{1}{1+e} \le x \times \frac{1}{e^x+1} \le 1(e+1)$

إذن : $0 \le f\left(x\right) \le 1 + e$.

التمرين 6

حل المعادلات :

1) لدينا : $e^{2x-1} = 1$ وهي تكافئ : $e^{2x-1} = e^0$

وعليه : $2x - 1 = 0$ ومنه : $x = \frac{1}{2}$ وعليه : $s = \left\{\frac{1}{2}\right\}$

2) لدينا : $e^{2x-1} = e$ و هي تكافئ : $x^2 - 1 = 1$ ومنه : $x^2 = 2$

إذن : $x = \sqrt{2}$ أو $x = -\sqrt{2}$ و بالتالي $s = \left\{-\sqrt{2};\sqrt{2}\right\}$

3) لدينا : $\left(x^2 - 4x + 3\right)x = 0$

و هي تكافئ : $x^2 - 4x + 3 = 0$, $\Delta' = 4$

للمعادلة حلين : $x_1 = 1$, $x_2 = 3$ إذن : $s = \left\{1;3\right\}$

4) لدينا : $e^{2x} - 2e^x + 1 = 0$

بوضع $e^x = y$ نجد : $\begin{cases} y^2 - 2y + 1 = 0 \\ y = e^x \end{cases}$ إذن : $\begin{cases} \left(y-1\right)^2 = 0 \\ y = e^x \end{cases}$

و منه : $\begin{cases} y = 1 \\ e^x = 1 \end{cases}$ أي : $\begin{cases} y = 1 \\ e^x = e^0 \end{cases}$ إذن : $x = 0$ أي : $s = \left\{0\right\}$

5) لدينا : $\left(x^2 - 4\right)e^x = \left(9x - 18\right)e^x$

و هي تكافئ : $x^2 - 4 = 9x - 18$ و منه : $x^2 - 9x + 14 = 0$

$\Delta = 25$ و منه للمعادلة حلين $x_1 = 2$ و $x_2 = 7$ إذن : $s = \left\{2;7\right\}$

6) لدينا : $e^x - e^x = 0$ وهي تكافئ : $e^x - \frac{1}{e^x} = 0$

وعليه : $\frac{e^{2x}-1}{e^x} = 0$ إذن : $e^{2x} - 1 = 0$ وعليه : $e^{2x} = 1$

أي : $e^{2x} = e^0$ وبالتالي : $2x = 0$ ومنه : $x = 0$ إذن : $s\{0\}$

7) لدينا : $e^{3x} - \frac{1}{e^x} = 0$ و هي تكافئ : $\frac{e^{4x}-1}{e^x} = 0$

ومنه : $e^{4x} - 1 = 0$ إذن : $e^{4x} = 1$ وعليه : $4x = 0$

و منه : $x = 0$ إذن : $s\{0\}$

التمرين 7

حل المتراجحات :

1) لدينا : $xe^{2x} - x^2e^{2x} \leq 0$ وهي تكافئ : $e^{2x}\left(x - x^2\right) \leq 0$

وعليه : $x - x^2 \leq 0$ لأن : $e^{2x} > 0$ إذن : $x(-x+1) \leq 0$

وعليه : $x \in \left]-\infty;0\right] \cup \left[1;+\infty\right[$ إذن : $s \in \left]-\infty;0\right] \cup \left[1;+\infty\right[$

x	$-\infty$ 0	1	$+\infty$
x	-	+	+
$-x+1$	+	+	-
$x(-x+1)$	-	+	-

2) لدينا : $e^{2x-1} \leq 1$

و هي تكافئ : $e^{2x-1} \leq e^0$ و منه : $2x - 1 \leq 0$

إذن : $x \le \frac{1}{2}$ وعليه : $s\left]-\infty;\frac{1}{2}\right]$

3) لدينا : $e^{x^2-4} \le e^{7x-16}$ وهي تكافئ : $x^2-4 \le 7x-16$

وعليه : $x^2-7x+12 \le 0$

ندرس إشارة : $x^2-7x+12$ ، $\Delta = 1$

يوجد جذران : $x_1 = 3$ ، $x_2 = 4$

x	$-\infty$		3		4		$+\infty$
$x^2-7x+12$		+	0	-	0	-	

إذن : $S = [3\ ;\ 4]$

4) لدينا : $e^{x^2-2} \le \frac{1}{e^x}$ وهي تكافئ : $e^{x^2-2}.e^x \le 1$

وعليه : $e^{x^2+x-2} \le 1$ إذن : $e^{x^2+x-2} \le e^1$

وبالتالي : $x^2+x-2 \le 1$ إذن : $x^2+x-3 \le 0$

ندرس إشارة : x^2+x-3 ، $\Delta = 13$

يوجد جذران : $x_1 = \frac{-1-\sqrt{13}}{2}$ ، $x_2 = \frac{-1+\sqrt{13}}{2}$

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
x^2+x-3		+	0	-	0	+	

إذن : $S = [x_1 ; x_2]$

5) لدينا : $e^{2x} - 2e^x + 1 \le 0$

بوضع : $e^x = y$ نجد : $\begin{cases} y^2 - 2y + 1 \leq 0 \\ e^x = y \end{cases}$

ومنه : $\begin{cases} (y-1)^2 \leq 0 \\ e^x = y \end{cases}$ و عليه : $\begin{cases} y - 1 = 0 \\ e^x = y \end{cases}$

إذن : $e^x = 1$ وعليه : $x = 0$ إذن : $S = \{0\}$

6) لدينا : $x^2e^{4x} + 4e^x > 0$ وهي تكافئ $e^x\left(x^2e^{3x} + 4\right) > 0$

وهي محققة دوما لأن $e^x > 0$ و $e^{3x} > 0$ و $x^2 > 0$

وعليه : $S = \mathbb{R}$

التمرين 8

1) لدينا : $f(x) = e^{2x} - e^{-x}$

الدالة f معرفة على $\mathbb{R}$ و تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$.

حيث : $f'(x) = 2e^{2x} + e^{-x}$.

2) لدينا : $f(x) = xe^{x-1}$

الدالة f معرفة على $\mathbb{R}$ و تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$.

حيث : $f'(x) = 1.e^{x-1} + xe^{x-1}$ ومنه : $f'(x) = (1+x)e^{x-1}$

3) لدينا : $f(x) = \dfrac{e^x + x}{e^x - 1}$

الدالة f معرفة على $\mathbb{R}^*$ و تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}^*$.

حيث : $$f'(x) = \frac{(e^x+1)(e^x-1) - e^x(e^x+x)}{(e^x-1)^2}$$

ومنه : $f'(x) = \dfrac{e^{2x}\text{-}1\text{-}e^{2x} - xe^x}{(e^x\text{-}1)^2}$ وعليه : $f'(x) = \dfrac{\text{-}1\text{-}xe^x}{(e^x\text{-}1)^2}$

4) لدينا : $f\left(x\right)=\dfrac{e^{x}}{x^{2}-1}$

الدالة f معرفة و قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}\left\{-1;1\right\}$.

حيث : $$f'\left(x\right)=\frac{e^{x}\left(x^{2}-1\right)-2x.e^{x}}{\left(x^{2}-1\right)^{2}}$$

ومنه : $$f'\left(x\right)=\frac{\left(x^{2}-2x-1\right)e^{x}}{\left(x^{2}-1\right)^{2}}$$

5) لدينا : $f\left(x\right)=\left(x^{2}-4x+5\right)e^{x}$ حيث : $D_{f}=\mathbb{R}$

الدالة f معرفة و قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ حيث :

$$f'\left(x\right)=\left(2x-4\right)e^{3x}+\left(x^{2}-4x+5\right)e^{x}$$

وعليه : $$f'\left(x\right)=\left(2x-4+x^{2}-4x+5\right)e^{x}$$

ومنه : $$f'\left(x\right)=\left(x^{2}-2x+1\right)e^{x}$$

6) لدينا : $f\left(x\right)=\sqrt{e^{x}-1}$ حيث : $D_{f}=\left\{x\in\mathbb{R}:e^{x}-1\geq 0\right\}$

ومنه : $e^{x}-1\geq 0$ وعليه : $e^{x}\geq 1$ وبالتالي : $x\geq 0$

إذن : $D_{f}=\left[0;+\infty\right[$

الدالة f قابلة للاشتقاق على $\left]0;+\infty\right[$ حيث : $f'\left(x\right)=\dfrac{e^{x}}{2\sqrt{e^{x}-1}}$

7) لدينا : $f\left(x\right)=e^{\frac{1}{x}}$

الدالة f معرفة و قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}^{*}$ حيث : $f'\left(x\right)=\dfrac{-1}{x^{2}}e^{\frac{1}{x}}$

8) لدينا : $f(x)=\sin x.e^{\cos x}$

الدالة f معرفة و قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ حيث :

$$f'(x)=\cos x.e^{\cos x}+\sin x(-\sin x)e^{\cos x}$$

ومنه : $$f'(x)=e^{\cos x}\left(\cos x-\sin^2 x\right)$$

وعليه : $$f'(x)=e^{\cos x}\left[\cos x-\left(1-\cos^2 x\right)\right]$$

وبالتالي : $$f'(x)=\left(\cos^2 x+\cos x-1\right)e^{\cos x}$$

9) لدينا : $$f(x)=\frac{e^x-1}{e^x+1}$$

الدالة f معرفة و قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ حيث :

$$f'(x)=\frac{e^x\left(e^x+1\right)-\left(e^x-1\right)e^x}{\left(e^x+1\right)^2}=\frac{e^{2x}+e^x-e^{2x}+e^x}{\left(e^x-1\right)^2}$$

$$=\frac{2e^x}{\left(e^x+1\right)^2}$$

10) لدينا : $$f(x)=\sqrt{e^{2x}-2e^x+1}$$

حيث : $$D_f=\left\{x\in\mathbb{R}:e^{2x}-2e^x+1\geq 0\right\}$$

نحل المتراجحة $e^{2x}-2e^x+1\geq 0$ بوضع : $y=e^x$

نجد : $y^2-2y+1\geq 0$ و عليه : $(y-1)^2\geq 0$

أي أن : $\left(e^x-1\right)^2\geq 0$ و هي محققة دوما . إذن : $D_f=\mathbb{R}$.

الدالة f تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}^*$ حيث :

$$f'(x)=\frac{2e^{2x}-2e^x}{2\sqrt{e^{2x}-2e^x+1}}=\frac{e^{2x}-e^x}{\sqrt{e^{2x}-2e^x+1}}$$

التمرين 9

1) لدينا : $f(x)=x+e^{x}$ حيث : $D_f=]-\infty;+\infty[$

ومنه : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x+e^{x}\right)=-\infty$

وعليه : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x+e^{x}\right)=+\infty$

2) لدينا : $f(x)=e^{-x+4}$ حيث : $D_f=]-\infty;+\infty[$

ومنه : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x+4}=+\infty$

وعليه : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x+4}=0$

3) لدينا : $f(x)=e^{\frac{1}{x^2}}$ حيث : $D_f=]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$

ومنه : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} e^{\frac{1}{x^2}}=1$

وعليه : $\lim\limits_{\substack{<\\x\to0}} f(x)=\lim\limits_{\substack{<\\x\to0}} e^{\frac{1}{x^2}}=+\infty$

وبالتالي : $\lim\limits_{\substack{>\\x\to0}} f(x)=\lim\limits_{\substack{>\\x\to0}} e^{\frac{1}{x^2}}=+\infty$

إذن : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} e^{\frac{1}{x^2}}=1$

4) لدينا : $f(x)=xe^{\frac{1}{x}}$ حيث : $D_f=]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$

ومنه : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} xe^{\frac{1}{x}}=-\infty$

وعليه : $\lim\limits_{\substack{<\\x\to0}} f(x)=\lim\limits_{\substack{<\\x\to0}} xe^{\frac{1}{x}}=0$

وبالتالي : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} xe^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^t}{t} = +\infty$

(نضع : $\dfrac{1}{x} = t$) . إذن : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} xe^{\frac{1}{x}} = +\infty$

5) لدينا : $f(x) = \dfrac{e^x}{x^2}$ حيث : $D_f =]-\infty\ ;\ 0[\cup]0\ ;\ +\infty[$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{e^x}{x^2} = 0$$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} \frac{e^x}{x^2} = +\infty$$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{e^x}{x^2} = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^2} = +\infty$$

6) لدينا : $f(x) = \dfrac{e^{-x}}{e^x + 1}$ حيث : $D_f =]-\infty ; +\infty[$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{e^{-x}}{e^x + 1} = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^{-x}}{e^x + 1} = 0$$

7) لدينا : $f(x) = \dfrac{e^{2x} - 1}{x}$ حيث : $D_f =]-\infty\ ;\ 0[\cup]0\ ;\ +\infty[$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{e^{2x} - 1}{x} = 0$$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} \frac{e^{2x}-1}{x} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} 2 \times \frac{e^{2x}-1}{2x} = 2$$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{e^{2x}-1}{x} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} 2 \times \frac{e^{2x}-1}{2x} = 2$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^{2x}-1}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^{2x}}{x} - \frac{1}{x}$$

$$\lim_{x \to +\infty} 2\frac{e^{2x}}{2x} - \frac{1}{x} = +\infty$$

8) لدينا : $f(x) = (x-1)e^{x}$ حيث : $D_f =]-\infty;+\infty[$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} (x-1)e^{x} = \lim_{x \to -\infty} xe^{x} - e^{x} = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} (x-1)e^{x} = +\infty$$

التمرين 10

1- قابلية الاشتقاق عند 0 : $D_f = \mathbb{R}$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} \frac{\frac{e^{2x}-e^{x}}{x}}{x} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} \frac{e^{2x}-e^{x}}{x^2}$$

$$= \lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} \frac{e^{x}}{x} \times \frac{e^{x}-1}{x} = -\infty$$

و منه f غير قابلة لاشتقاق عند 0 من اليسار .

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{e^{2x}-e^{x}}{x^2} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{e^{x}}{x} \times \frac{e^{x}-1}{x} = +\infty$$

و منه f غير قابلة للاشتقاق عند 0 من اليمين و بالتالي f غير قابلة للاشتقاق عند 0 .

2- تعيين الدالة المشتقة من أجل $x \neq 0$:

$$f'(x)=\frac{\left(2e^{2x}-e^{x}\right)x-1\left(e^{2x}-e^{x}\right)}{x^{2}}$$

$$f'(x)=\frac{2xe^{2x}-xe^{x}-e^{2x}+e^{x}}{x^{2}}$$

$$f'(x)=\frac{(2x-1)e^{2x}-(x-1)e^{x}}{x^{2}}$$

التمرين 11

$$f(x)=(4x+3)e^{x}$$

$$f'(x)=4.e^{x}+(4x+3)e^{x}=(4+4x+3)e^{x}$$

$$f'(x)=(4x+7)e^{x}$$

$$f''(x)=4.e^{x}+(4x+7)e^{x}=(4+4x+7)e^{x}$$

$$f''(x)=(4x+11)e^{x}$$

$$f^{(3)}(x)=4.e^{x}+(4x+11)e^{x}=(4+4x+11)e^{x}$$

$$f^{(3)}(x)=(4x+15)e^{x}$$

$$f^{(4)}(x)=4.e^{x}+(4x+15)e^{x}=(4+4x+15)e^{x}$$

$$f^{(4)}(x)=(4x+19)e^{x}$$

استنتاج عبارة $f^{(n)}$:

$$f^{(n)}(x)=(4x+3+4n)e^{x}$$

البرهان بالتراجع على صحة $p_{(n)}$: $f^{(n)}(x)=(4x+3+4n)e^{x}$

من أجل $n=1$: $f_{(n)}(x)=(4x+7)e^{x}$ و منه $p_{(1)}$ محققة .

نفرض صحة $p(k)$ و نبرهن صحة $p(k+1)$

$$p(k): f^{(k)}(x)=(4x+3+4k)e^x$$

$$p(k+1): f^{(k+1)}(x)=\left[4x+3+4(k+1)\right]e^x$$

لدينا : $f^{(k+1)}(x)=\left(f^k\right)'(x)=4.e^x+(4x+3+4k)e^x$

$$=(4x+3+4k+4)e^x=\left[4x+3+4(k+1)\right]e^x$$

ومنه $p(k+1)$ صحيحة و عليه $p(n)$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n حيث $n\geq 1$.

التمرين 12

دراسة تغيرات f :

1) لدينا : $f(x)=xe^x$ حيث : $D_f=]-\infty;+\infty[$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} xe^x=0$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} xe^x=+\infty$$

$$f'(x)=e^x+xe^x=e^x(x+1)$$

و عليه $f'(x)$ له نفس إشارة $x+1$ و لدينا :

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$x+1$	-	0	+

إذن f متزايدة تماما على $[-1;+\infty[$ و متناقصة تماما

على $]-\infty;-1]$ ؛ و عليه جدول التغيرات كما يلي :

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f'(x)$	-		+
$f(x)$	0 ↘	$\frac{-1}{e}$	↗ $+\infty$

2) لدينا : $f(x)=x-e^x$ حيث : $D_f =]-\infty \ ; \ +\infty]$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x-e^x = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x-e^x = \lim_{x\to+\infty} x\left(1-\frac{e^x}{x}\right) = -\infty$$

$$f'(x)=1-e^x$$

$f'(x)=0$ تكافئ : $1-e^x=0$ ومنه : $e^x=1$ وعليه : $x=0$

$f'(x)>0$ تكافئ : $1-e^x>0$ ومنه : $e^x<1$ إذن : $x<0$

و عليه f متزايدة تماما على $]-\infty;0]$.

$f'(x)<0$ تكافئ $x>0$ ومنه f متناقصة تماما على $]-\infty;0]$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	+		-
$f(x)$	$-\infty$ ↗	-1	↘ $-\infty$

3) لدينا : $f(x)=\dfrac{e^x}{x}$ حيث : $D_f=]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x}{x}=0$$

$$\lim_{\substack{x\to0\\ <}} f(x)=\lim_{\substack{x\to0\\ <}}\frac{e^x}{x}=-\infty$$

$$\lim_{\substack{x\to0\\ >}} f(x)=\lim_{\substack{x\to0\\ >}}\frac{e^x}{x}=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty$$

$$f'(x)=\frac{e^x.x-e^x}{x^2}=\frac{e^x(x-1)}{x^2}$$

$f'(x)$ له نفس إشارة $x-1$ إذن : $f'(x)=0$ تكافئ : $x=1$

$f'(x)>0$ تكافئ $x>1$ إذن : f متزايدة تماما على $[1;+\infty[$

و كذلك f متناقصة تماما على $]-\infty;0[$ وعلى $]0\ ;\ 1]$.

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$-$	$+$	
$f(x)$	$0 \searrow -\infty$	$+\infty \searrow e$	$e \nearrow -\infty$	

4) لدينا : $f(x)=\dfrac{e^x+1}{e^x-1}$ حيث : $D_f=\left\{x\in\mathbb{R} : e^x-1\neq 0\right\}$

$e^x-1=0$ تكافئ $e^x=1$ و عليه : $x=0$.

إذن: $D_f=\left]-\infty\ ;\ 0\right[\cup\left]0\ ;\ +\infty\right[$

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^x+1}{e^x-1}=-1$
- $\lim\limits_{\substack{< \\ x\to 0}} f(x)=\lim\limits_{\substack{< \\ x\to 0}}\dfrac{e^x+1}{e^x-1}=-\infty$

لأن : $\begin{cases} e^x+1\longrightarrow 2 \\ e^x-1\xrightarrow{<} \end{cases}$

- $\lim\limits_{\substack{> \\ x\to 0}} f(x)=\lim\limits_{\substack{> \\ x\to 0}}\dfrac{e^x+1}{e^x-1}=+\infty$

لأن : $\begin{cases} e^x+1\longrightarrow 2 \\ e^x-1\xrightarrow{>} \end{cases}$

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x+1}{e^x-1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x\left(1+\dfrac{1}{e^x}\right)}{e^x\left(1-\dfrac{1}{e^x}\right)}$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1+\dfrac{1}{e^x}}{1-\dfrac{1}{e^x}} = 1$$

- $f'(x) = \dfrac{e^x\left(e^x-1\right)-e^x\left(e^x+1\right)}{\left(e^x-1\right)^2}$

$$= \frac{e^x\left(e^x-1-e^x-1\right)}{\left(e^x-1\right)^2} = \frac{-2e^x}{\left(e^x-1\right)^2}$$

و منه : $f'(x) < 0$

الدالة f متناقصة تماما على كل من المجالين $]-\infty;0[$ و $]0;+\infty[$:

x	$-\infty$ $\quad$ 0 $\quad$ $+\infty$	
$f'(x)$	-	-
$f(x)$	$-1 \searrow -\infty$	$+\infty \searrow 1$

التمرين 13

1- دراسة تغيرات f :

- $D_f =]-\infty\ ;\ +\infty[$

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ - $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

- $f'(x)=e^{x}-e^{-x}$

$f'(x)=0$ تكافئ : $e^{x}-e^{-x}=0$ ومنه : $e^{x}=e^{-x}$

و عليه: $x=-x$ و منه: $2x=0$ أي: $x=0$.

$f'(x)>0$ تكافئ : $e^{x}-e^{-x}>0$ ومنه : $e^{x}>e^{-x}$

إذن : $x>-x$ ومنه : $2x>0$ وعليه : $x>0$

إذن f متزايدة تماما على $[0\ ;\ +\infty[$ و بالتالي فهي متناقصة تماما على $]-\infty;0]$.

x	$-\infty$ 0 $+\infty$
$f'(x)$	- 0 +
$f(x)$	$+\infty$ ↘ 2 ↗ $+\infty$

الاستنتاج :

من جدول التغيرات القيمة 2 هي قيمة حدية صغرى للدالة f على $\mathbb{R}$ و عليه من أجل كل عدد حقيقي x فإن : $f(x)\geq 2$

2- دراسة تغيرات g :

- $D_g=\{x\in\mathbb{R}:\quad e^{x}+e^{x}-1\neq 0\}$

نحل المعادلة: $e^{x}+e^{-x}-1=0$ أي: $e^{x}+e^{-x}=1$

أي: $f(x)=1$ و هذا مستحيل لأن : $f(x)\geq 2$

إذن ليس للمعادلة حلول و عليه : $D_f=]-\infty;+\infty[$.

- $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=0$ - $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=0$

- $g'(x)=\dfrac{-e^{x}+e^{-x}}{\left(e^{x}+e^{-x}-1\right)^{2}}$

$g'(x)=0$ تكافئ : $-e^{x}+e^{-x}=0$ أي: $e^{-x}=e^{x}$

و عليه : $-x=x$ و منه : $2x=0$ أي : $x=0$

$g'(x)=0$ تكافئ : $-e^{x}+e^{-x}>0$ أي: $e^{-x}>e^{x}$

و عليه : $-x>x$ ومنه : $2x>0$ أي : $x>0$

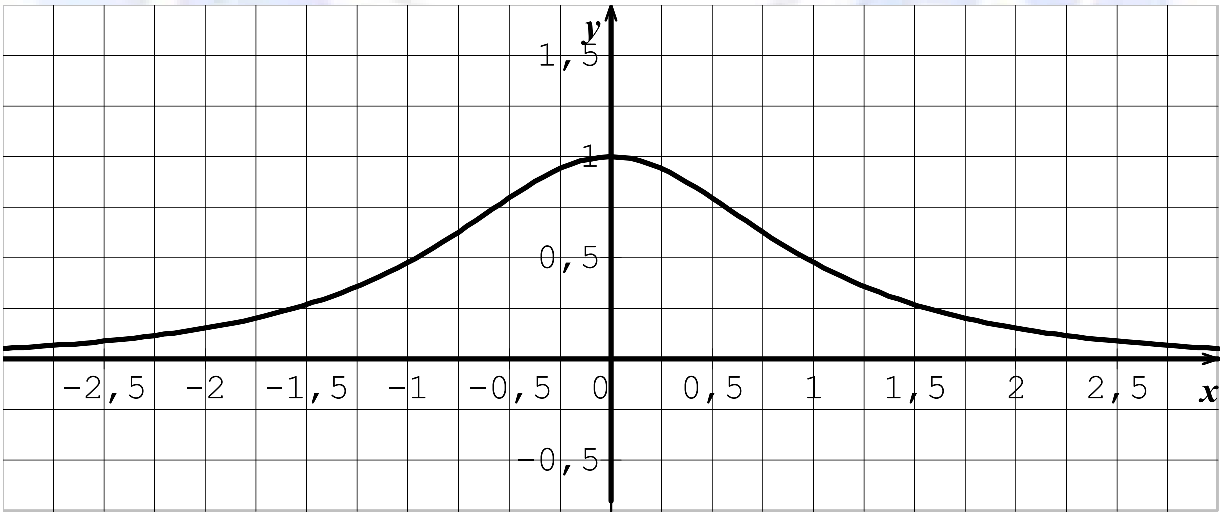
إذن g متزايدة تماما على $]-\infty;0]$ و عليه فهي متناقصة تم

على $[0;+\infty]$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	+		-
$g(x)$	0 ↗	1	↘ 0

$g(0)=1$

إنشاء (c) :



التمرين 14

I) 1- دراسة تغيرات h : $D_h =]-\infty;+\infty[$

$$\lim_{x\to-\infty} h(x) = \lim_{x\to-\infty} 1-x-e^{-x} = \lim_{x\to-\infty}(-x)\left[\frac{-1}{x}+1-\frac{e^{-x}}{-x}\right] = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} h(x) = \lim_{x\to+\infty} 1-x-e^{-x} = -\infty$$

$$h'(x) = -1+e^{-x}$$

$h'(x)=0$ تكافئ : $-1+e^{-x}=0$ ومنه : $e^{-x}=1$

و عليه : $e^{-x}=e^{0}$ أي : $x=0$

$h'(x)>0$ تكافئ : $-1+e^{-x}>0$ وعليه : $e^{-x}>1$

أي أن : $-x>0$ و منه : $x<0$

إذن h متزايدة تماما على $]-\infty;0]$ و عليه فهي متناقصة

تماما على $[0;+\infty[$.

x	$-\infty$ $\qquad$ 0 $\qquad$ $+\infty$
$h'(x)$	$+$ $\qquad$ 0 $\qquad$ $-$
$h(x)$	$-\infty \nearrow 0 \searrow -\infty$

$$h(0)=0$$

2- استنتاج إشارة $h(x)$

لدينا : $h(x)=0$ تكافئ : $x=0$ و لدينا : $h(x)<0$

من أجل : $x\in\mathbb{R}^*$.

II) 1- حساب $f'(x)$: $D_f = \mathbb{R}^*$

$$f'(x) = \frac{1(e^x - 1) - e^x x}{(e^x - 1)^2} = \frac{e^x - 1 - xe^x}{(e^x - 1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{e^x(1 - e^{-x} - x)}{(e^x - 1)^2} = \frac{e^x(1 - x - e^{-x})}{(e^x - 1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{e^x . h(x)}{(e^x - 1)^2}$$

و عليه $f'(x) = 0$ تكافئ $h(x) = 0$ ومنه : $x = 0$

$f(x) < 0$ تكافئ $h(x) < 0$ و هي محققة لأن $h(x) < 0$

من أجل : $x \in \mathbb{R}^*$ إذن f متناقصة تماما على $\mathbb{R}$.

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x - 1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\frac{e^x - 1}{x}} = 0$$

2- حساب النهايات :

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{x}{e^x - 1} = +\infty$$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} \frac{x}{e^x - 1} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} \frac{1}{\frac{e^x - 1}{x}} = 1$$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{x}{e^x - 1} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{1}{\frac{e^x - 1}{x}} = 1$$

جدول التغيرات :

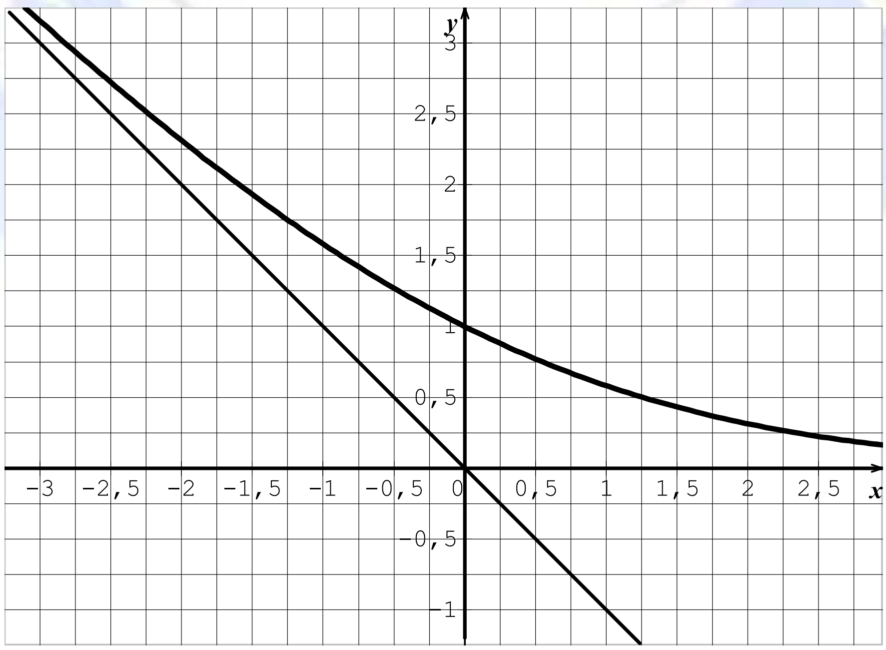
x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	||	$-$
$f(x)$	$+\infty \searrow 1$	||	$1 \searrow 0$

3- إنشاء $\left(c_f\right)$: $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} \dfrac{1}{e^x-1} = -1$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)+x = \lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{x}{e^x-1} + x = \lim_{x\to-\infty} \frac{x+xe^x-x}{e^x-1}$$

$$= \lim \frac{xe^x}{e^x-1}$$

إذن يوجد مستقيم مقارب مائل معادلته $y=-x$ عند $-\infty$ و لدينا $y=0$ معادلة مستقيم مقارب عند $+\infty$.



التمرين 15

1- دراسة تغيرات f : $D_f = \left\{ x \in \mathbb{R} : e^x - 1 \neq 0 \right\}$

$D_f =]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$ ، $D_f = \mathbb{R}^*$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{2e^x}{e^x - 1} = 0$$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} \frac{2e^x}{e^x - 1} = -\infty$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$e^x - 1$	-		+

ومنه : $\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{2e^x}{e^x - 1} = +\infty$ لأن : $\begin{cases} 2e^x \to 2 \\ e^x - 1 \underset{<}{\to} 0 \end{cases}$

وعليه : $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 2$ لأن : $\begin{cases} 2e^x \to 2 \\ e^x - 1 \underset{>}{\to} 0 \end{cases}$

$$f'(x) = \frac{2e^x(e^x - 1) - e^x.2e^x}{(e^x - 1)^2} = \frac{2e^x(e^x - 1 - e^x)}{(e^x - 1)^2}$$

إذن: $$f'(x) = \frac{-2e^x}{(e^x - 1)^2}$$

و منه $f'(x) < 0$ و منه f متناقصة تماما على كل من

المجالين : $\left]-\infty;0\right[$, $\left]0;+\infty\right[$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	-	||	-
$f(x)$	$0 \searrow -\infty$	||	$+\infty \searrow 2$

2- بما أن $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$ فإن $y=0$ معادلة مستقيم مقارب

و بما أن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2$ فإن $y=2$ معادلة مستقيم مقارب

و بما أن $\left|\lim\limits_{x\to 0} f(x)\right|=+\infty$ فإن $x=0$ معادلة مستقيم مقارب

3- نبين أن $w(0;1)$ مركز تناظر :

من أجل $x\in D_f$:

لدينا : $2\alpha - x\in D_f$ و $f(2\alpha-x)+f(x)=2\beta$

أي : $f(2\times 0-x)+f(x)=2\times 1$

و عليه : $f(-x)+f(x)=2$

لدينا من أجل كل x من D_f : $-x\in D_f$

إذن : $$f(-x)+f(x)=\frac{2e^{-x}}{e^{-x}-1}+\frac{2e^{x}}{e^{x}-1}=\frac{\frac{2}{e^{x}}}{\frac{1}{e^{x}}-1}+\frac{2e^{x}}{e^{x}-1}$$

$$=\frac{\frac{2}{e^{x}}}{\frac{1}{e^{x}}\text{-}1}+\frac{2e^{x}}{e^{x}\text{-}1}=\frac{2}{1\text{-}e^{x}}+\frac{2e^{x}}{e^{x}\text{-}1}$$

$$=\frac{-2}{e^{x}-1}+\frac{2e^{x}}{e^{x}-1}$$

$$=\frac{-2+2e^{x}}{e^{x}-1}=\frac{2\left(e^{x}-1\right)}{e^{x}-1}=2$$

و منه w مركز تناظر (c).

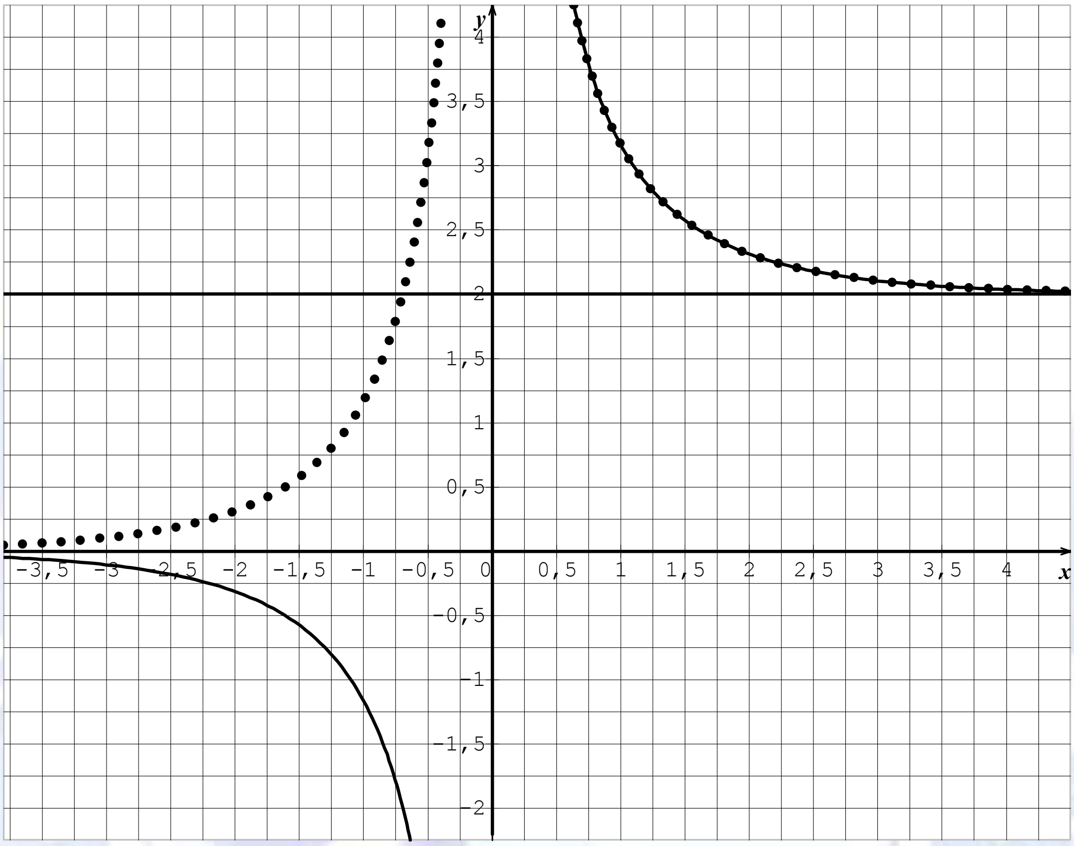
4) كتابة $g(x)$ دون رمز القيمة المطلقة :

$$\begin{cases} g(x)=\dfrac{2e^{x}}{-\left(e^{x}-1\right)} \quad , \quad e^{x}\text{-}1<0 \quad \text{أي} \quad x<0 \\ g(x)=\dfrac{2e^{x}}{e^{x}-1} \quad , \quad e^{x}-1>0 \quad \text{أي} \quad x>0 \end{cases}$$

إذن : $$\begin{cases} g(x)=-f(x) \quad , \quad x\in\left]-\infty;0\right] \\ g(x)=f(x) \quad , \quad x\in\left]0;+\infty\right[\end{cases}$$

في المجال $\left]0;+\infty\right[$: (δ) ينطبق على (c) و في المجال $\left]-\infty;0\right]$: (δ) نظير (c) بالنسبة لمحور الفواصل .

- إنشاء (c) و (δ) :



- المناقشة البيانية : $(m-3)\left|e^x-1\right|=2e^x$

أي : $m-3=\dfrac{2e^x}{\left|e^x-1\right|}$ أي : $m-3=g(x)$

و منه بوضع $m-3=\alpha$ نجد : $g(x)=\alpha$

لما $\alpha \le 2$ أي : $m-3\le 2$ أي : $m\le 5$

- ومنه ليس للمعادلة حلول .

- لما $\alpha > 2$ أي $m>5$: للمعادلة حلين مختلفين في الإشارة .

التمرين 16

I) 1- دراسة تغيرات f :

$$D_f=\left]-\infty;+\infty\right[$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(2x^2-3x\right)e^x=\lim_{x\to-\infty}2xe^{2x}-3xe^x=0$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}(2x^2-3x)e^x = \lim_{x\to+\infty} x(2x-3)e^x = +\infty$$

$$f'(x) = (4x-3)e^x + (2x^2-3x)e^x$$

إذن : $f'(x) = (4x-3+2x^2-3x)e^x$

و منه : $f'(x) = (2x^2+x-3)e^x$

و عليه : $f'(x)$ له نفس الإشارة $2x^2+x-3$

$\Delta = (1)^2 - 4(-3)(2)$ أي : $\Delta = 25$ يوجد جذران :

$$x_2 = \frac{-1+5}{4} = 1 \quad , \quad x_1 = \frac{-1-5}{4} = \frac{-3}{2}$$

x	$-\infty$		$\frac{-3}{2}$		1		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+	

f متزايدة تماما على كل من المجالين $\left]-\infty;-\frac{3}{2}\right]$ و $[1;+\infty[$ و متزايدة تماما

على $\left[-\frac{3}{2};1\right]$.

x	$-\infty$		$\frac{-3}{2}$		1		$+\infty$
$f'(x)$		+		-		+	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$9e^{\frac{-3}{2}}$	$\searrow$	$-e$	$\nearrow$	$+\infty$

$$f\left(-\frac{3}{2}\right)=\left[2\left(\frac{-3}{2}\right)^2-3\left(\frac{-3}{2}\right)\right]e^{\frac{-3}{2}}=\left(\frac{9}{2}+\frac{9}{2}\right)e^{\frac{-3}{2}}=9e^{\frac{-3}{2}}\simeq 2$$

$$f(1)=\left(2(1)^2-3(1)\right)e^1=-e$$

2- دراسة الفروع اللانهائية :

لدينا $y=0$ معادلة مستقيم مقارب عند $-\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x^2-3x}{x}\right)e^x=\lim_{x\to+\infty}(2x-3)e^x=+\infty$$

إذن (c) يقبل فرع قطع مكافئ باتجاه محور التراتيب عند $+\infty$

3- نبين أن (c) يقبل نقطتي انعطاف :

$$f''(x)=(4x+1)e^x+\left(2x^2+x-3\right)e^x$$

$$f''(x)=\left(4x+1+2x^2+x-3\right)e^x$$

$$f''(x)=\left(2x^2+5x-2\right)e^x$$

$f''(x)=0$ يكافئ $2x^2+5x-2=0$, $\Delta=41$

للمعادلة حلين : $x_1=\dfrac{-5-\sqrt{41}}{4}$, $x_2=\dfrac{-5\sqrt{41}}{4}$

x	$-\infty$ x_1 x_2 $+\infty$
$f''(x)$	+ 0 - 0 +

إذن $f''(x)$ ينعدم عند x_1 مغيرا إشارته و ينعدم كذلك عند x_2 مغيرا إشارته و عليه

النقطتان ذات الفاصلتين x_1 و x_2 هما نقطتي انعطاف $x_2 \simeq -2,85$, $x_1 \simeq 0,35$

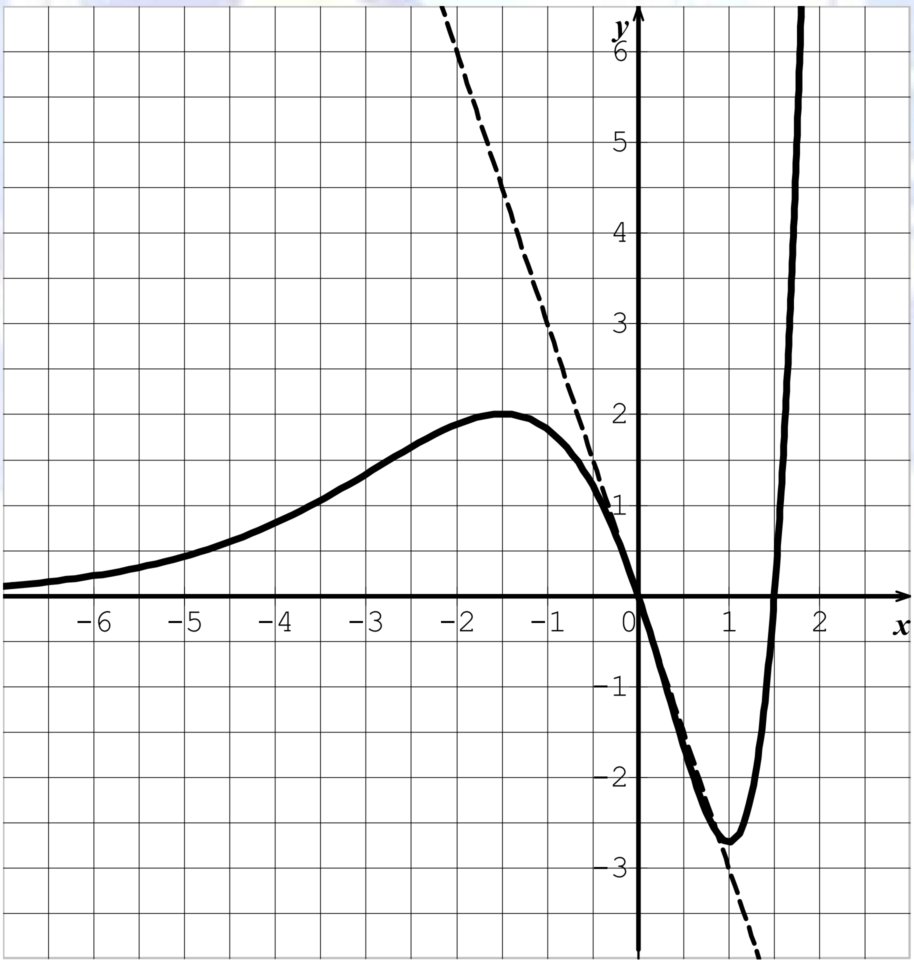
4- معادلة المماس (Δ) :

لدينا : $y = f'(0)\times(x-0)+f(0)+f(0)$

حيث : $f(0)=0$, $f'(0)=-3$

و عليه : $y=-3x$ هي معادلة المماس (Δ)

5- رسم (Δ) و (c) :



II) 1- تعيين a و b :

$$g(x)=(4x+a)e^{x}+\left(2x^{2}+ax+b\right)e^{x}$$

$$g(x)=\left(4x+a+2x^{2}+ax+b\right)e^{x}$$

$$g(x)=\left(2x^{2}+(a+4)x+a+b\right)e^{x}$$

تكون g دالة أصلية للدالة f إذا و فقط إذا كان من أجل كل عدد حقيقي x .

$g'(x)=f(x)$ و عليه : $\begin{cases} a+4=-3 \\ a+b=0 \end{cases}$ ومنه : $\begin{cases} a=-7 \\ b=7 \end{cases}$ و يكون :

$$g(x)=\left(2x^{2}-7x+7\right)e^{x}$$

2- تعيين a و b حيث تقبل g قيمة حدية كبرى و صغرى و هي أن ينعدم المشتق مرتين مغيرا إشارته مرتين .

$g'(x)=0$ يكافئ : $\left[2x^{2}+(a+4)x+a+b\right]=0$

$\Delta=(a+4)^{2}-4(a+b)$ و منه : $\Delta=a^{2}+8a+16-4a-4b$

إذن : $\Delta=a^{2}+4a-4b+16$

و عليه إذا كان $\Delta>0$ فإن للمعادلة حلين متمايزين و تكون إشارة $g'(x)$ متغيرة مرتين أي

من أجل : $a^{2}+4a-4b+16>0$

يكون للدالتين قيمتين حديتين واحدة كبرى و الأخرى صغرى .