المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية و التعليم العالي و تكوين الأطر و البحث العلمي

المركز الوطني للامتحانات — **قطاع التربية الوطنية** — **الصفحة:** 1 / 2

الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا — **الموضوع:**
(الدورة العادية 2005)

المـادة: الرياضيات — **مدة الإنجاز: ثلاث ساعات**
الشعبة: العلوم التجريبية - العلوم التجريبية الأصلية – العلوم الزراعية — **المعامـــل: 7**

- يتكون هذا الموضوع من أسئلة مستقلة فيما بينها و ثلاث تمارين و مسألة .
- يسمح باستعمال الآلة الحاسبة غير قابلة للبرمجة.

4,5 **أسئلة :**

1 1) حل المعادلة : $z^2 - 2(1+2i)z + 1 + 4i = 0$. $z \in \mathbb{C}$

1 2) بين أن : $\left(\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right)^{12} = 1$.

1 3) باستعمال مكاملة بالأجزاء، بين أن : $\int_1^e x^2 \ln x dx = \frac{2e^3+1}{9}$.

1,5 4) بين أن $\int_2^4 \frac{dx}{x\sqrt{x-1}} = \frac{\pi}{6}$ (يمكنك وضع $t = \sqrt{x-1}$) .

2,5 **التمرين الاول**

نعتبر في الفضاء المنسوب الى معلم متعامد ممنظم الفلكة (S) التي معادلتها:
$(x-1)^2 + y^2 + (z-1)^2 = 2$ و المستوى (P) الذي معادلته $x + y - 3 = 0$

1 1) بين أن المستوى (P) مماس للفلكة (S)

1,5 2) حدد مثلوث احداثيات نقطة تماس (P) و (S)

3 **التمرين الثاني :**

يحتوي صندوق على ثلاث كرات بيضاء وسبع كرات سوداء (لا يمكن التمييز بينها باللمس).

1) نسحب عشوائيا وفي آن واحد كرتين من الصندوق. ليكن A و B الحدثين التاليين :

A : " الكرتان المسحوبتان لونهما أسود " .

B : " من بين الكرتين المسحوبتين توجد على الأقل كرة لونها أبيض " .

1,25 بين أن احتمال الحدث A يساوي $\frac{7}{15}$ وأن احتمال الحدث B يساوي $\frac{8}{15}$.

2) نعتبر التجربة العشوائية التالية : نسحب كرة واحدة من الصندوق ، فإذا كانت بيضاء نتوقف عن السحب، وإذا كانت سوداء نضعها جانبا ثم نسحب كرة ثانية وأخيرة من الصندوق.

ليكن C و D الحدثين التاليين :

C : " الحصول على كرة بيضاء في السحبة الأولى " .

D : " الحصول على كرة بيضاء " .

0,75 أ) احسب احتمال الحدث C .

1 ب) بين أن احتمال الحدث D يساوي

←...

10 مسألة :

الجزء الأول :

نعتبر الدالتين g و h المعرفتين على المجال $]0 , +\infty[$ بما يلي :

$g(x) = x - 1 - \ln x$ و $h(x) = x + (x-2)\ln x$.

0,75 1) أ - احسب $g'(x)$ لكل x من المجال $]0 , +\infty[$ ثم ادرس منحى تغيرات الدالة g .

0,25 ب - استنتج أن $g(x) \geq 0$ لكل x من المجال $]0 , +\infty[$.

0,5 2) أ - بين أن : $h(x) = 1 + g(x) + (x-1).\ln x$ لكل x من المجال $]0 , +\infty[$.

0,5 ب - بين أن : $(x-1).\ln x \geq 0$ لكل x من المجال $]0 , +\infty[$.

0,5 3) استنتج أن : $h(x) > 0$ لكل x من المجال $]0 , +\infty[$.

الجزء الثاني :

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]0 , +\infty[$ بما يلي : $f(x) = 1 + x.\ln x - (\ln x)^2$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ وليكن (C) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم .

0,5 1) أ - احسب $\lim\limits_{0^+} f(x)$ ثم أول النتيجة مبيانيا.

1 ب - احسب $\lim\limits_{+\infty} f(x) = +\infty$ ثم حدد الفرع اللانهائي للمنحنى (C) بجوار $+\infty$

0,5 (لاحظ أن : $f(x) = 1 + x\ln x.\left(1 - \dfrac{\ln x}{x}\right)$) .

0,25 2) أ - بين أن $f'(x) = \dfrac{h(x)}{x}$ لكل x من المجال $]0 , +\infty[$.

0,5 ب - استنتج أن الدالة f تزايدية قطعا على المجال $]0 , +\infty[$.

0,5 3) ليكن (Δ) المستقيم المماس للمنحنى (C) في النقطة A(1 , 1) .

1 أ - بين أن معادلة ديكارتية للمستقيم (Δ) هي $y = x$.

0,75 ب - تحقق من أن : $f(x) - x = (\ln x - 1).g(x)$ لكل x من المجال $]0 , +\infty[$.

ج ادرس إشارة $f(x) - x$ ثم استنتج الوضع النسبي للمنحنى (C) والمستقيم (Δ) .

4) أنشئ المنحنى (C) والمستقيم (Δ) في نفس المعلم. (نقبل أن المنحنى (C) يقبل نقطة انعطاف أفصولها محصور بين 1 و 1,5) .

الجزء الثالث :

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بما يلي : $u_0 = \sqrt{e}$ و $u_{n+1} = f(u_n)$ لكل n من IN .

0,5 1) بين بالترجع أن : $1 < u_n < e$ لكل n من IN .

1 2) بين أن المتتالية (u_n) تناقصية (يمكنك استعمال السؤال 3) ج- من الجزء الثاني) .

1 3) استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة ثم احسب نهايتها.

الدورة العادية 2005

أسئلة :

1) نحسب المميز المختصر: $\Delta' = (1+2i)^2 - (1+4i) = -4 = (2i)^2$

إذن $z_1 = 1$ و $z_2 = 1+4i$.

2) لدينا $\frac{\sqrt{3}+i}{2} = \left[1, \frac{\pi}{6}\right] \Leftarrow \left(\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right)^{12} = [1, 2\pi] = 1$.

3) $I = \int_1^e x^2 \ln(x) dx = \left[\frac{x^3 \ln(x)}{3}\right]_1^e - \int_1^e \frac{x^2}{3} dx \Leftarrow \begin{cases} u(x) = \ln(x) \Rightarrow u'(x) = \frac{1}{x} \\ v'(x) = x^2 \Rightarrow v(x) = \frac{x^3}{3} \end{cases}$

إذن : $I = \frac{e^3}{3} - \left(\frac{e^3}{9} - \frac{1}{9}\right) = \frac{2e^3+1}{9}$.

4) نضع $t = \sqrt{x-1}$ إذن $\begin{matrix} t = 1 \Leftarrow x = 2 \\ t = \sqrt{3} \Leftarrow x = 4 \end{matrix}$ و $x = t^2 + 1 \Leftarrow dx = 2t\,dt$

ومنه $\int_2^4 \frac{dx}{x\sqrt{x-1}} = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{2}{1+t^2} dt = 2[arctg(t)]_1^{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}$

التمرين الأول:

1) لدينا $\Omega(1,0,1)$ مركز الفلكة (S) و $r = \sqrt{2}$ شعاعها.

$d(\Omega,(P)) = \frac{|1+0-3|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} = r \Leftarrow (P)$ مماس للفلكة (S).

2)نقطة تماس (S) و (P) هي H المسقط العمودي للنقطة Ω على (P).

ليكن (Δ) المستقيم المار من Ω والعمودي على (P)، إذن $\vec{n}(1,1,0)$ المنظمية على (P) موجهة ل (Δ).

H هي تقاطع (Δ) و (P)، مثلوث إحداثياتها هو حل النظمة:

$$1+t+t-3=0 \Leftarrow \begin{cases} x = 1+t \\ y = t \\ z = 1 \\ x+y-3=0 \end{cases}$$

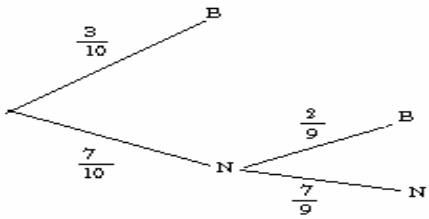
إذن $t = 1$ و منه $H(2,1,1)$.

التمرين الثاني

1) $p(A)=\frac{C_7^2}{C_{10}^2}=\frac{7}{15}$ و $B=\overline{A}$ $\Leftarrow$ $p(B)=1-p(A)=\frac{8}{15}$.

2) أ- $p(C)=\frac{3}{10}$.

ب- $p(D)=p(C)+p(\overline{C})p_{\overline{C}}(D)=\frac{3}{10}+\frac{7}{10}.\frac{3}{9}=\frac{8}{15}$.



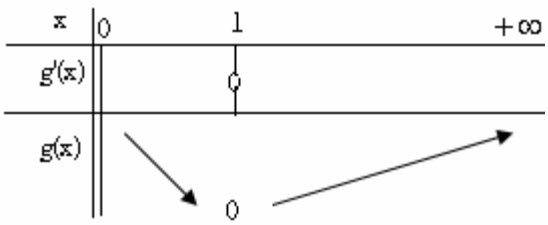
يمكن استعمال الشجرة :

مسألة :

الجزء الأول :

1) أ- لكل x من $]0,+\infty[$ لدينا $g'(x)=\frac{x-1}{x}$.

إشارة $g'(x)$ هي إشارة $x-1$ ، إذن جدول تغيرات الدالة g هو:

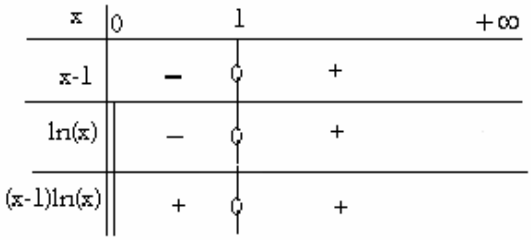


ب- الدالة g تقبل قيمة دنيا عند النقطة 1 ، إذن $g(x)\geq g(1)=0$ لكل x من $]0,+\infty[$.

2) أ- لكل x من $]0,+\infty[$ ، لدينا $1+g(x)+(x-1)\ln(x)=x-\ln(x)+(x-1)\ln(x)$

$=x+(x-2)\ln(x)=h(x)$

ب- من الجدول التالي :



نستنتج أن $(x-1)\ln(x)\geq 0$ لكل x من $]0,+\infty[$.

3) $(x-1)\ln(x)\geq 0$ و $g(x)\geq 0$ لكل x من $]0,+\infty[$ $\Leftarrow$ $h(x)\geq 1$

إذن $h(x)\succ 0$ لكل x من $]0,+\infty[$.

الجزء الثاني:

1) أ- $\lim\limits_{0^+}\ln(x)=-\infty$ و $\lim\limits_{0^+}x\ln(x)=0$ $\Leftarrow$ $\lim\limits_{0^+}f(x)=-\infty$.

التأويل المبياني : المنحنى C_f يقبل مقاربا عموديا معادلته $x=0$.

ب- $f(x)=1+x.\ln(x)\left(1-\dfrac{\ln(x)}{x}\right)$ و $\lim\limits_{+\infty}\dfrac{\ln(x)}{x}=0$ $\Leftarrow$ $\lim\limits_{+\infty}f(x)=+\infty$.

$\dfrac{f(x)}{x}=\dfrac{1}{x}+\ln(x)\left(1-\dfrac{\ln(x)}{x}\right)$ $\Leftarrow$ $\lim\limits_{+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=+\infty$.

التأويل المبياني : المنحنى C_f يقبل محور الأراثيب كاتجاه مقارب بجوار $+\infty$.

2) أ- لكل x من $]0,+\infty[$ ، لدينا $f'(x)=\ln(x)+1-2\dfrac{\ln(x)}{x}=\dfrac{h(x)}{x}$.

ب- حسب السؤال 3 من الجزء الأول، $h(x)\succ 0$ لكل x من $]0,+\infty[$ ، إذن $f'(x)\succ 0$ لكل x من $]0,+\infty[$. و بالتالي f تزايدية قطعا على المجال $]0,+\infty[$.

3)أ- معادلة (Δ) هي : $y=f'(1)(x-1)+f(1)$ و $f'(1)=h(1)=1$

إذن : (Δ) : $y=x$.

ب- لكل x من $]0,+\infty[$ ، لدينا $f(x)-x=1-(\ln(x))^2+x\ln(x)-x$

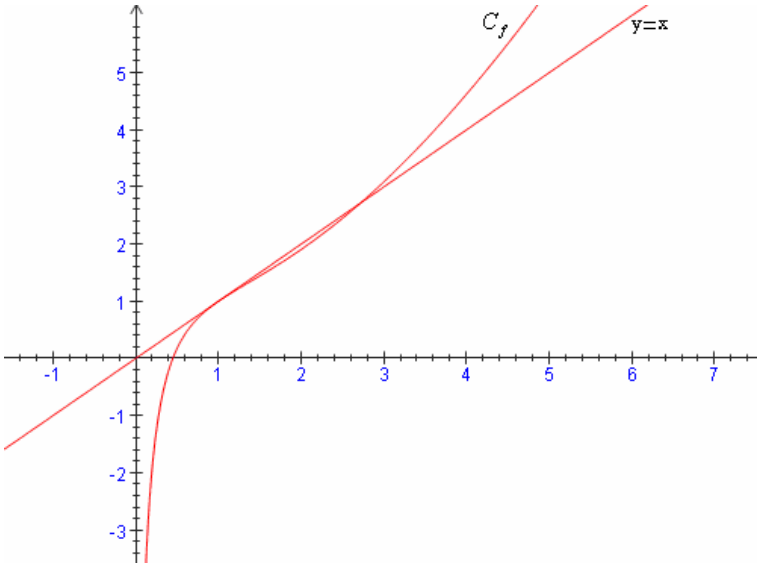
$=(1-\ln(x))(1+\ln(x))-x(1-\ln(x))$

$=(1-\ln(x))(1+\ln(x)-x)=(\ln(x)-1)g(x)$

ج- $g(x)\geq 0$ لكل x من $]0,+\infty[$ ،إذن إشارة $f(x)-x$ هي إشارة $\ln(x)-1$.

x	0	e	$+\infty$
$\ln(x)-1$	‖ −	0	+
الوضع النسبي	‖ (Δ) تحت C_f	تقاطع	(Δ) فوق C_f

4)المنحنى:



الجزء الثالث :

1) من أجل $n=0$: $1\prec u_0=\sqrt{e}\prec e$ إذن العلاقة صحيحة.

نفترض أن $1\prec u_n\prec e$ ، وبما أن f تزايدية قطعا على المجال $]0,+\infty[$ فإن $f(1)\prec f(u_n)\prec f(e)$

إذن $1\prec u_{n+1}\prec e$ و منه $1\prec u_n\prec e$ لكل n من IN.

2) حسب السؤال 3)ج من الجزء الثاني: $f(x)-x\leq 0$ لكل x من $]0,e]$

بما أن $1\prec u_n\prec e$ فإن $f(u_n)-u_n\leq 0$ أي $u_{n+1}\leq u_n$ لكل n من IN.

3) المتتالية (u_n) تناقصية و مصغورة بالعدد1 ، إذن فهي متقاربة.

الدالة f متصلة على المجال $[1,e]$ و $I=[1,e]$ و $f(I)=I$ (حسب السؤال 1من الجزءالثالث) والمتتالية متقاربة ، إذن نهايتها l تحقق $f(l)=l$ و $l\in[1,e]$(المجال **مغلق**).

$f(l)=l \Leftrightarrow \ln(l)-1=0$ أو $g(l)=0$ حسب السؤال3)ب من الجزء الثاني.

$\Leftrightarrow l=1$ أو $l=e$

بما أن المتتالية (u_n) تناقصية فإن $l=1$.