



- يتكون هذا الموضوع من أسئلة مستقلة فيما بينها و ثلاث تمارين و مسألة .
- يسمح باستعمال الآلة الحاسبة غير قابلة للبرمجة.

أسئلة (أربع نقط)

- (1) حل المعادلة التفاضلية: $y'' + y' - 6y = 0$ 1
- (2) أكتب على الشكل المثلثي العدد العقدي $Z = \frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}$ 1
- (3) باستعمال المكاملة بالأجزاء، بين أن $\int_0^{\pi} \cos(x) \cdot \ln(1 + \cos(x)) dx = \frac{\pi}{2} - 1$ (نذكر أن $\sin^2(x) = 1 - \cos^2(x)$) 1
- (4) نضع $u_n = n + \left(\frac{1}{3}\right)^n$ لكل n من \mathbb{N}^* . 1
- أحسب بدلالة n المجموع: $S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n$

التمرين الأول (نقطتان)

- في الفضاء المنسوب الى معلم متعامد ممنظم ، نعتبر المستوى (P) الذي معادلته $x - z + 1 = 0$ و
الفلكة (S) التي مركزها $\Omega (1; 0; 0)$ و شعاعها $r = 2$.
(1) بين أن (P) و (S) يتقاطعان و فق دائرة Γ . 0,5
(2) حدد مركز و شعاع الدائرة Γ . 1,5

التمرين الثاني (نقطتان و نصف)

- (1) أكتب الشكل الجبري العدد العقدي $(1-i)^2$. 0,25
- (2) حل في مجموعة الأعداد العقدية المعادلة: $z^2 - 2(1+2i)z - (3-6i) = 0$. 0,75
- (3) نعتبر في المستوى العقدي النقطتين A و B لحقاهما على التوالي هما: $a = 3i$ و $b = 2+i$
حدد ثم أنشئ (D) مجموعة النقط M ذات اللحق z بحيث: $|z-3i| = |z-2-i|$ 1,5

التمرين الثالث (ثلاث نقط و نصف)

- يحتوي كيس على أربع كرات بيضاء و كرتين سوداوين لا يمكن التمييز بينها باللمس.
(1) نسحب عشوائيا كرة واحدة من الكيس.
ما هو احتمال الحصول على كرة بيضاء؟ 0,5

←...

- (2) نسحب عشوائيا بالتتابع و بإحلال 5 كرات من الكيس.
ما هو احتمال الحصول على كرة بيضاء مرتين بالضبط؟
(3) نسحب عشوائيا بالتتابع و بإحلال n كرة من الكيس.

أ- بين أن احتمال الحصول على كرة بيضاء على الأقل هو $p = 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n$

- ب- ما هو العدد الأدنى من السحبات التي يكون من أجلها $p \geq 0,999$ ؟
(نأخذ $\log 3 \approx 0,48$ حيث \log هو اللوغاريتم العشري)

مسألة (ثمان نقط)

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $]0; 2[$ بما يلي : $f(x) = \ln\left(\frac{x}{2-x}\right)$

و ليكن (C) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم.

(1) أ- أحسب $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$

ب- بين أن: $\forall x \in]0; 2[\quad f'(x) = \frac{2}{x(2-x)}$

ج- أعط جدول تغيرات الدالة f

(2) أ- بين أن النقطة $A(1,0)$ مركز تماثل المنحنى (C) .

ب- أكتب معادلة ديكارتية للمماس (T) للمنحنى (C) في النقطة $A(1,0)$.

(3) نضع $\varphi(x) = f(x) - x$ لكل x من المجال $]0; 2[$.

أ- بين أن $\varphi\left(\frac{3}{2}\right) < 0$ و $\varphi\left(\frac{7}{4}\right) > 0$ (نأخذ $\ln 3 \approx 1,1$ و $\ln 7 \approx 1,94$)

ب- استنتج أن المعادلة $f(x) = x$ تقبل حلا α بحيث $\frac{3}{2} < \alpha < \frac{7}{4}$ و أول النتيجة مبيانيا.

(4) أ- بين أن الدالة f تقبل دالة عكسية f^{-1} .

ب- بين أن: $\forall x \in \mathbb{R} \quad f^{-1}(x) = \frac{2e^x}{1+e^x}$

(5) أنشئ في نفس المعلم المنحنى (C) و المنحنى (Γ) الممثل للدالة f^{-1} .

(6) أ- أحسب $\int_0^\alpha \frac{e^x}{1+e^x} dx$

ب- أحسب مساحة الحيز المحصور بين المنحنيين (C) و (Γ) و محوري المعلم.

الدورة الاستدراكية 2005

أسئلة :

(1) المعادلة المميزة هي : $r^2 + r - 6 = 0$ ، $\Delta = 25$ ، $r_1 = -3$ و $r_2 = 2$.
 حلول المعادلة التفاضلية هي $y = \alpha e^{-3x} + \beta e^{2x}$ حيث $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.

$$(2) \quad Z = \left[\sqrt{2}, \frac{7\pi}{12} \right] \Leftrightarrow 1-i = \left[\sqrt{2}, \frac{-\pi}{4} \right] \text{ و } 1+i\sqrt{3} = \left[2, \frac{\pi}{3} \right]$$

$$(3) \quad \text{نضع } u(x) = \ln(1 + \cos(x)) \Leftrightarrow u'(x) = \frac{-\sin(x)}{1 + \cos(x)}$$

$$v(x) = \sin(x) \Leftrightarrow v'(x) = \cos(x)$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x) \ln(1 + \cos(x)) dx = \left[\sin(x) \ln(1 + \cos(x)) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2(x)}{1 + \cos(x)} dx \quad \text{إذن}$$

$$= 0 + \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 - \cos(x) dx = \left[x - \sin(x) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - 1$$

(4) ملاحظة: (u_n) عبارة عن مجموع متناهيين، إحداهما حسابية $(v_n = n)$ و الأخرى هندسية $(w_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n)$.

$$S_n = 1 + 2 + 3 + \dots + n + \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^3 + \dots + \left(\frac{1}{3}\right)^n \quad \text{لدينا إذن}$$

$$= \frac{n(n+1)}{2} + \frac{1}{3} \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{n(n+1) + 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{2}$$

التمرين الأول :

$$(1) \quad d(\Omega, (P)) = \frac{|1+1|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \leq r \quad \text{يتقاطعان وفق دائرة.}$$

(2) مركز الدائرة هو H المسقط العمودي للنقطة Ω على المستوى (P)

ليكن (Δ) المستقيم المار من Ω والعمودي على (P) ، إذن $\vec{n}(1,0,-1)$ المنظمة على (P) موجهة ل (Δ) .

$$1+t+t+1=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1+t \\ y=0 \\ z=-t \\ x-z+1=0 \end{cases} \quad \text{هي تقاطع } (\Delta) \text{ و } (P) \text{، مثلوث إحداثياتها هو حل النظمة:}$$

إذن $t = -1$ و منه $H(0,0,1)$.

$$.R = \sqrt{r^2 - d^2} = \sqrt{2} \text{ شعاع الدائرة هو } \sqrt{2}$$

التمرين الثاني:

$$(1) (1-i)^2 = -2i$$

$$(2) \text{ نحسب المميز المختصر: } \Delta' = (1+2i)^2 + (3-6i) = -2i = (1-i)^2$$

$$\text{إذن } z_1 = 3i \text{ و } z_2 = 2+i$$

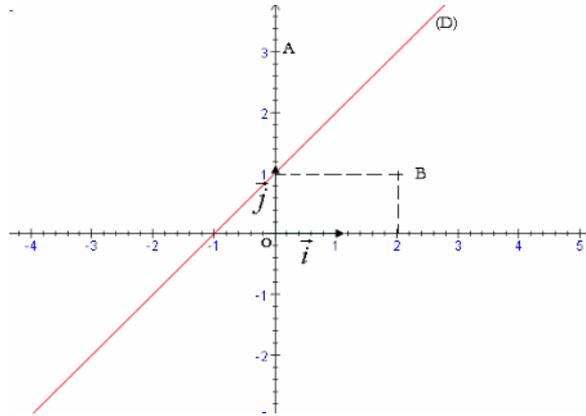
$$(3) \text{ لدينا } |z-3i| = |z-2-i| \Leftrightarrow AM = BM$$

إذن (D) مجموعة النقط M هي واسط القطعة [AB].

$$\text{طريقة تحليلية: نضع } z = x+iy \text{ . إذن } |z-3i| = |z-2-i| \Leftrightarrow x^2 + (y-3)^2 = (x-2)^2 + (y-1)^2$$

$$\Leftrightarrow x - y + 1 = 0$$

إذن (D) مجموعة النقط M هي المستقيم الذي معادلته (D): $x - y + 1 = 0$



التمرين الثالث :

$$(1) \text{ ليكن } A \text{ الحدث : "الحصول على كرة بيضاء" ، إذن } p(A) = \frac{4}{6}$$

$$(2) \text{ ليكن } B \text{ الحدث : "الحصول على كرة بيضاء مرتين بالضبط" ، } p(B) = C_5^2 \left(\frac{2}{3}\right)^2 \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{40}{243}$$

$$(3) \text{ أ- ليكن } C \text{ الحدث : "الحصول على كرة بيضاء على الأقل" ، إذن } \bar{C} \text{ : "الحصول على } n \text{ كرة سوداء"}$$

$$. \left(\frac{1}{3}\right)^n \text{ (احتمال سحب كرة سوداء هو } \frac{1}{3}) \text{ . } p(C) = 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n \Leftrightarrow p(\bar{C}) = \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

$$\text{ب- لدينا } \left(\frac{1}{3}\right)^n \leq 0.001 \Leftrightarrow 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n \geq 0.999 \Leftrightarrow p \geq 0.999$$

$$\log\left(\frac{1}{3}\right)^n \leq \log 10^{-3} \Leftrightarrow$$

$$-n \cdot \log 3 \leq -3 \Leftrightarrow$$

$$n \geq \frac{3}{\log 3} \approx 6.25 \Leftrightarrow$$

إذن ، العدد الأدنى من السحبات هو 7.

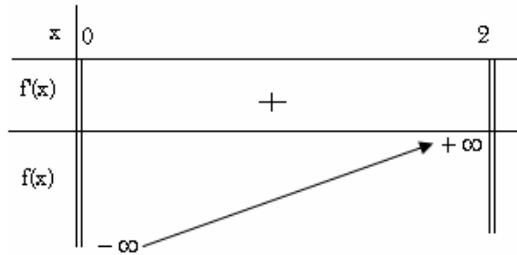
مسألة :

(1) أ- $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x}{2-x} = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{2-x} = 0^+$

ب- لكل x من $]0,2[$ لدينا:

$$f'(x) = \frac{\left(\frac{x}{2-x}\right)'}{\frac{x}{2-x}} = \frac{2}{(2-x)^2} \cdot \frac{2-x}{x} = \frac{2}{x(2-x)}$$

ج- جدول التغيرات:



(2) أ- **تذكير:** $A(a,b)$ مركز تماثل للمنحنى $C_f \Leftrightarrow f(2a-x) = 2b - f(x)$ و $2a-x \in D_f$ و $2-x \in D_f \Leftrightarrow 0 < 2-x < 2 \Leftrightarrow 0 < x < 2$: $f(2-x) = -f(x)$ نبين أن

و $f(2-x) = \ln\left(\frac{2-x}{x}\right) = -f(x)$ إذن $A(1,1)$ مركز تماثل للمنحنى.

ب- معادلة (D) هي : $y = f'(1)(x-1) + f(1)$ و $f'(1) = 2$ ، إذن : $y = 2x - 2$: (D) .

أ- $\varphi\left(\frac{3}{2}\right) = \ln(3) - \frac{3}{2} \approx -0.4 < 0$ و $\varphi\left(\frac{7}{4}\right) = \ln(7) - \frac{7}{4} \approx 0.19 > 0$

ب- الدالة φ متصلة على $\left[\frac{3}{2}, \frac{7}{4}\right]$ (فرق دالتين متصلتين) و $\varphi\left(\frac{3}{2}\right)\varphi\left(\frac{7}{4}\right) < 0$ ، إذن حسب مبرهنة القيمة الوسيطة

فإنه يوجد على الأقل عدد α من $\left[\frac{3}{2}, \frac{7}{4}\right]$ حيث $\varphi(\alpha) = 0$ أي $f(\alpha) = \alpha$.

التأويل المبياني: المنحنى (C_f) يقطع المستقيم ذو المعادلة $y = x$ (المنصف الأول) في النقطة $I(\alpha, \alpha)$.

(3) أ- f دالة متصلة و تزايدية قطعاً على المجال $]0,2[$ ، إذن فهي تقبل دالة عكسية f^{-1} .

(4) ب- f تقابل من $]0,2[$ نحو IR و $\forall x \in IR, \forall y \in]0,2[$ $y = f^{-1}(x) \Leftrightarrow x = f(y)$

$$\Leftrightarrow x = \ln\left(\frac{y}{2-y}\right)$$

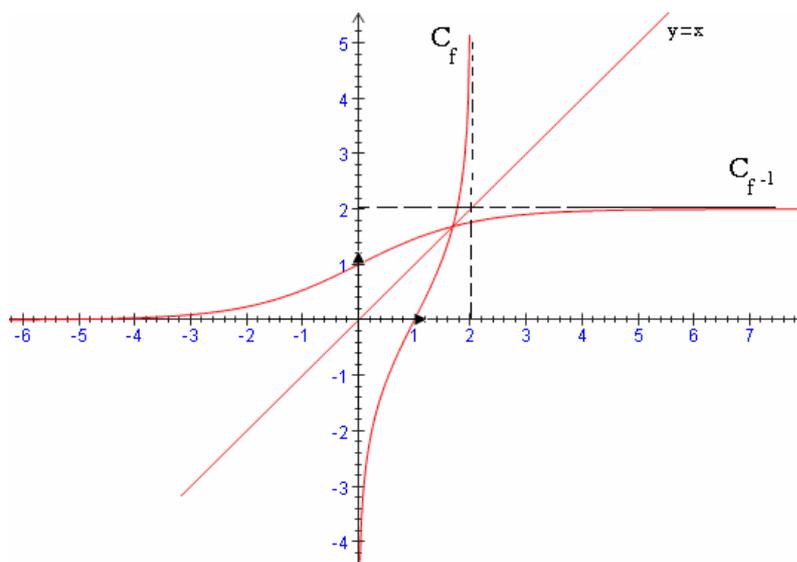
$$\Leftrightarrow e^x = \frac{y}{2-y}$$

$$\Leftrightarrow 2e^x - ye^x = y$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{2e^x}{1+e^x}$$

إذن : $\forall x \in IR, f^{-1}(x) = \frac{2e^x}{1+e^x}$

(5) المنحنى :



$$\int_0^\alpha \frac{e^x}{1+e^x} dx = \left[\ln|1+e^x| \right]_0^\alpha \Leftrightarrow \frac{e^x}{1+e^x} = \frac{(1+e^x)'}{1+e^x} \quad \text{لدينا أ- (6)}$$

$$= \ln(1+e^\alpha) - \ln 2$$

$$\ln \frac{\alpha}{2-\alpha} = \alpha \quad \text{لدينا } f(\alpha) = \alpha \quad \text{نحسب } e^\alpha \text{ بدلالة } \alpha \text{ يعني}$$

$$\frac{\alpha}{2-\alpha} = e^\alpha \quad \text{يعني}$$

$$1+e^\alpha = \frac{2}{2-\alpha} \quad \text{إذن}$$

$$\int_0^\alpha \frac{e^x}{1+e^x} dx = -\ln(2-\alpha) \quad \text{و بالتالي :}$$

ب- لتكن S مساحة الحيز المحصور بين المنحنيين (C_f) و $(C_{f^{-1}})$ و محوري المعلم.

$$\text{إذن : } S = 2 \int_0^\alpha [f^{-1}(x) - x] dx \quad \text{(بوحددة قياس المساحات)}$$

$$= 4 \int_0^\alpha \frac{e^x}{1+e^x} dx - 2 \int_0^\alpha x dx$$

$$= -4 \ln(2-\alpha) - \alpha^2$$

$$. S = \int_0^\alpha f^{-1}(x) dx - \int_1^\alpha f(x) dx \quad \text{طريقة ثانية :}$$

$$\text{لدينا : } \int_0^\alpha f^{-1}(x) dx = -2 \ln(2-\alpha) \quad \text{نحسب } \int_1^\alpha f(x) dx \text{ باستعمال مكاملة بالأجزاء :}$$

$$. u'(x) = \frac{2}{x(2-x)} \quad \Leftrightarrow \quad u(x) = \ln \frac{x}{2-x} \quad \text{نضع}$$

$$. v(x) = x \quad \Leftrightarrow \quad v'(x) = 1$$

$$\int_1^\alpha f(x) dx = \left[x \ln \left(\frac{x}{2-x} \right) \right]_1^\alpha - \int_1^\alpha \frac{2}{2-x} dx \quad \text{إذن :}$$

$$\left(\ln \frac{\alpha}{2-\alpha} = \alpha \Leftrightarrow f(\alpha) = \alpha \text{ لأن } \right) = \alpha \ln \left(\frac{\alpha}{2-\alpha} \right) - [-2 \ln(2-x)]_1^\alpha = \alpha^2 + 2 \ln(2-\alpha)$$

$$\text{و منه : } S = -4 \ln(2-\alpha) - \alpha^2 \quad \text{(بوحددة قياس المساحات).}$$