التمرين الأول (نقطتان ونصف)

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بما يلي: $u_0=1$ و $u_{n+1}=\dfrac{u_n^3}{3u_n^2+1}$ لكل n من $\mathbb{N}$.

1) أ- بين أن $u_n>0$ لكل n من $\mathbb{N}$.	0.5
ب- بين أن المتتالية (u_n) تناقصية.	0.5
ج- استنتج أن (u_n) متقاربة.	0.25
2) أ- بين أن $u_{n+1}\leq\dfrac{1}{3}u_n$ لكل n من $\mathbb{N}$.	0.5
ب- استنتج أن: $u_n\leq\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$ لكل n من $\mathbb{N}$ ثم احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}u_n$.	0.75

التمرين الثاني (3نقط ونصف)

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

النقط $A(1,2,-2)$ و$B(0,3,-3)$ و $C(1,1,-2)$ والمستوى (P) الذي معادلته: $x+y-3=0$.

1) أ- احسب مسافة النقطة $\Omega(0,1,-1)$ عن المستوى (P).	0.5
ب- استنتج أن معادلة ديكارتية للفلكة (S) التي مركزها $\Omega(0,1,-1)$ والمماسة للمستوى (P) هي: $x^2+y^2+z^2-2y+2z=0$	1
2) أ- حدد $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ ثم استنتج أن النقط A و B و C غير مستقيمة.	0.75
ب- بين أن: $x-z-3=0$ معادلة ديكارتية للمستوى (ABC).	0.5
3) أ- تحقق من الفلكة (S) مماسة للمستوى (ABC).	0.25
ب- احسب المسافة ΩC واستنتج نقطة تماس (S) والمستوى (ABC).	0.5

التمرين الثالث (3 نقط)

نعتبر في مجموعة الأعداد العقدية $\mathbb{C}$ المعادلة التالية: $2z^2-2iz-1=0 \quad (E)$

1) أ- حل في $\mathbb{C}$ المعادلة (E). (z_1 و z_2 هما حلا المعادلة بحيث $\text{Re}(z_1)>0$).	0.75
ب- اكتب الحلين z_1 و z_2 على الشكل المثلثي.	0.5
2) في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{e}_1,\vec{e}_2)$	
نعتبر النقط A و B و S التي ألحاقها على التوالي هي: $a=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}i$ و $b=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}i$ و $s=i$.	
أ- اكتب على الشكل المثلثي العدد العقدي: $\dfrac{a-s}{b-s}$.	0.75
ب- استنتج أن المثلث SAB متساوي الساقين وقائم الزاوية في S.	0.5
ج- بين أن الرباعي $OASB$ مربع.	0.5

التمرين الرابع (3 نقط)

يحتوي كيس U_1 على بيدقتين تحملان الرقم 1، وعلى أربع بيدقات تحمل الرقم 2 (لا يمكن التمييز بينها باللمس).

ويحتوي كيس U_2 على ثلاث كرات حمراء وأربع كرات خضراء (لا يمكن التمييز بينها باللمس كذلك).

نسحب عشوائيا بيدقة واحدة من الكيس U_1.

1) أحسب احتمال الحدثان التاليان .

A: " البيدقة المسحوبة تحمل الرقم 1 ". 0.5

B: " البيدقة المسحوبة تحمل الرقم 2 ". 0.5

2) نعتبر في هذا السؤال التجربة العشوائية التالية .

نسحب بيدقة واحدة من الكيس U_1 ونسجل رقمها:

- إذا كان هذا الرقم هو 1 نقوم بسحب كرة واحدة من الكيس U_2.

- وإذا كان هذا الرقم هو 2 نقوم بسحب كرتين في آن واحد من الكيس U_2.

ليكن n عدد الكرات الحمراء المسحوبة من الكيس U_2

و E_2 الحدث " الحصول بالضبط على n كرة حمراء "

أ- بين أن: $p(E_1)=\dfrac{11}{21}$ و $p(E_2)=\dfrac{2}{21}$. 1.5

ب- احسب احتمال الحدث A علما أن الحدث E_1 محقق. 0.5

مسألة (8 نقط)

لتكن f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة بما يلي: $f(x)=\ln\left(x^2-2x+2\right)$

و (C) هو المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

1) أ- تحقق من أن: $x^2-2x+2=\left(x-1\right)^2+1$ لكل x من $\mathbb{R}$. 0.25

ب- استنتج أن f معرفة على $\mathbb{R}$ ثم احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$. 0.75

2) بين أن: $f(2-x)=f(x)$ لكل x من $\mathbb{R}$ ثم استنتج أن المستقيم الذي معادلته $x=1$ محور تماثل المنحنى (C). 0.5

3) أ- تحقق من أن: $f(x)=2\ln(x)+\ln\left(1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{x^2}\right)$ لكل x من المجال $[1,+\infty[$. 0.5

ب- استنتج أن: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=0$ ثم أو هندسيا هذه النتيجة. 0.5

4) أ- بين أن: $f'(x)=\dfrac{2(x-1)}{(x-1)^2+1}$ لكل x من $\mathbb{R}$. 0.5

ب- أعط جدول تغيرات الدالة f على $\mathbb{R}$. 0.5

5) أ- بين أن: $f''(x)=\dfrac{2x(2-x)}{\left[(x-1)^2+1\right]^2}$ لكل x من $\mathbb{R}$.	0.5
ب- ادرس تقعر المنحنى (C).	0.5
6) أنشئ المنحنى (C).	0.75
7) ليكن h قصور الدالة f على المجال $[1,+\infty[$	
أ-بين أن h تقابل من المجال $[1,+\infty[$ نحو مجال J يتم تحديده.	0.5
ب- حدد $h^{-1}(x)$ لكل x من J.	0.5
8) أ- بوضع $t=x-1$ بين أن: $\int_0^1 f(x)\,dx=\int_{-1}^0 \ln\left(1+t^2\right)dt$	0.5
ب- باستعمال مكاملة بالأجزاء بين أن: $\int_{-1}^0 \ln\left(1+t^2\right)dt=\ln 2-2\int_{-1}^0 \dfrac{t^2}{1+t^2}\,dt$	0.5
ج- بين أن: $\int_{-1}^0 \dfrac{t^2}{1+t^2}\,dt=1-\dfrac{\pi}{4}$ (لاحظ أن: $\dfrac{t^2}{1+t^2}=1-\dfrac{1}{1+t^2}$ لكل t من $\mathbb{R}$).	0.5
د- استنتج مساحة حيز المستوى المحصور بين المنحنى (C) ومحور الأفاصيل والمستقيمين اللذين معادلتاهما على التوالي $x=1$ و $x=0$	0.25

الدورة الإستدراكية 2004

التمرين الأول:

1) أ- من أجل $n=0$: $U_0=1\succ 0$. نفترض أن $U_n\succ 0$ إذن $U_n^3\succ 0$ ومنه $U_{n+1}=\dfrac{U_n^3}{1+U_n^2}\succ 0$.

و بالتالي $U_n\succ 0$ لكل n من IN .

ب- لدينا $U_{n+1}-U_n=\dfrac{-U_n^2(U_n+1)}{1+U_n^2}\prec 0$ إذن (U_n) تناقصية .

ج- (U_n) تناقصية و مصغورة ب0 ، فهي إذن متقاربة .

2) أ- لدينا $3U_n^2+1\geq 3U_n^2$ إذن $\dfrac{U_n^3}{3U_n^2+1}\leq\dfrac{U_n^3}{3U_n^2}$ $\left(U_n^3\succ 0\right)$ أي $U_{n+1}\leq\dfrac{1}{3}U_n$ لكل n من IN .

ب- لدينا : $\begin{cases} U_n\leq\dfrac{1}{3}U_{n-1}\\ U_{n-1}\leq\dfrac{1}{3}U_{n-2}\\ \\ U_2\leq\dfrac{1}{3}U_1\\ U_1\leq\dfrac{1}{3}U_0\end{cases}$ نضرب طرفا بطرف (كل الأطراف موجبة) نجد $U_n\leq\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$ لكل n من IN

$-1\prec\dfrac{1}{3}\prec 1 \Rightarrow \lim\left(\dfrac{1}{3}\right)^n=0$ و لدينا $U_n\succ 0$ إذن $\lim U_n=0$.

التمرين الثاني :

1) أ- $d(\Omega,(P))=\dfrac{|0+1-3|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$.

ب- $S(\Omega,r)$ مماسة للمستوى (P) ، إذن $r=\sqrt{2}$ ومنه $(S):x^2+(y-1)^2+(z+1)^2=2$

إذن معدلة ديكارتية للفلكة هي : $(S):x^2+y^2+z^2-2y+2z=0$

2) أ- $\overrightarrow{AC}(0,-1,0)$ و $\overrightarrow{AB}(-1,1,-1) \Rightarrow \overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=-\vec{i}+\vec{k}$

$\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\neq\vec{0}$ إذن النقط A و$\mathbf{B}$ وC غير مستقيمية .

ب- لدينا $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ منظمية على (ABC) ، إذن $(ABC):-x+z+d=0$

$B(0,3,-3)\in(ABC)$ إذن $d=3$ و منه $(ABC):x-z-3=0$.

3) أ- لدينا $d(\Omega,(ABC))=\frac{|0+1-3|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}=r$ إذن الفلكة (S) مماسة للمستوى (ABC).

ب- $\overrightarrow{\Omega C}(1,0,-1) \Rightarrow \Omega C=\sqrt{2}$ إذن $C\in(S)$ و لدينا $C\in(ABC)$

إذن : C هي نقطة تماس (S) و (ABC).

التمرين الثالث:

1) أ- $\Delta'=1 \Rightarrow z'=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$ و $z''=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$. لدينا إذن $\mathrm{Re}(z'')\succ 0$ أي $z'=z_2$ و $z''=z_1$.

ب- لدينا $z_1=\left[\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\pi}{4}\right]$ و $z_2=\left[\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{3\pi}{4}\right]$.

2) أ – لدينا $\frac{a-s}{b-s}=\frac{1-i}{-1-i}=i$ إذن $\frac{a-s}{b-s}=\left[1,\frac{\pi}{2}\right]$.

ب- لدينا $\frac{SA}{SB}=\left|\frac{a-s}{b-s}\right|=1$ إذن المثلث SAB متساوي الساقين رأسه S.

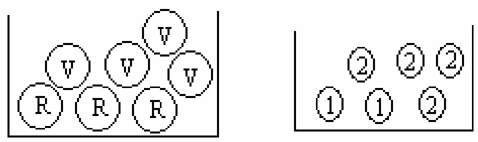
و $\left(\overrightarrow{SA},\overrightarrow{SB}\right)=\arg\left(\frac{a-s}{b-s}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$ يعني أن المثلث SAB قائم الزاوية في S.

ج- لدينا $s=a+b$ يعني $aff(S)=aff(A)+aff(B)$ ومنه $\overrightarrow{OS}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$

إذن الرباعي $OASB$ متوازي الأضلاع ، و بما أن المثلث SAB قائم الزاوية و متساوي الساقين رأسه S

فإن $OASB$ مربع.

التمرين الرابع :



U_2 U_1

1) $p(A)=\frac{1}{3}$ و $p(B)=\frac{4}{6}$

2) أ- $p(E_1)=\left(\frac{1}{3}\times\frac{3}{7}\right)+\left(\frac{2}{3}\times\frac{C_3^1C_4^1}{C_7^2}\right)=\frac{1}{7}+\frac{8}{21}=\frac{11}{21}$

و $p(E_2)=\frac{2}{3}\times\frac{C_3^2}{C_7^2}=\frac{2}{21}$.

ب- لدينا $p_{E_1}(A)=\frac{p(A\cap E_1)}{p(E_1)}$ و $p(A\cap E_1)=p(A).p_A(E_1)=\frac{1}{3}\times\frac{3}{7}=\frac{1}{7}$.

إذن $p_{E_1}(A)=\frac{3}{11}$.

التمرين الخامس:

1) أ- لدينا $x^2-2x+2=x^2-2x+1+1=(x-1)^2+1$ لكل x من IR .

ب- $(x-1)^2+1\succ 0$ لكل x من IR إذن $D_f=IR$. $\lim\limits_{+\infty} f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{-\infty} f(x)=+\infty$.

2) لدينا $f(2-x)=4-4x+x^2-4+2x+2=x^2-2x+2$ إذن $f(2-x)=f(x)$ لكل x من IR .

<u>**الاستنتاج:**</u> المستقيم ذو المعادلة $x=a$ محور تماثل (C) في م م م $(O,\vec{i},\vec{j}) \Leftrightarrow f(2a-x)=f(x) \quad \forall x\in IR$

إذن : المستقيم ذو المعادلة $x=1$ محور تماثل (C).

أو : لدينا $M(x,y)\in(C)\Leftrightarrow y=f(x)$ و لتكن $M'(x',y')$ مماثلة M بالنسبة للمستقيم ذي المعادلة $x=1$ ،

إ ذن : $\begin{cases}\dfrac{x+x'}{2}=1\\ y'=y\end{cases}$ وهذا يكافئ $\begin{cases}x'=2-x\\ y'=y\end{cases}$. و بما أن $f(2-x)=f(x)$ فإن $y'=f(x')$

إذن $M'\in(C)$ و بالتالي (C) متماثل بالنسبة للمستقيم ذي المعادلة $x=1$.

3) أ- $f(x)=\ln\left[x^2\left(1-\dfrac{2}{x}+\dfrac{2}{x^2}\right)\right]=\ln x^2+\ln\left(1-\dfrac{2}{x}+\dfrac{2}{x^2}\right)$. وبما أن $x\in[1,+\infty[$

فإن $\ln x^2=2\ln x$ إذن $f(x)=\ln\left[x^2\left(1-\dfrac{2}{x}+\dfrac{2}{x^2}\right)\right]=2\ln x+\ln\left(1-\dfrac{2}{x}+\dfrac{2}{x^2}\right)$.

ب- لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}2\dfrac{\ln x}{x}+\dfrac{\ln\left(1-\dfrac{2}{x}+\dfrac{2}{x^2}\right)}{x}=0$ ($\lim\limits_{+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$ و $\dfrac{0}{+\infty}=0$)

إذن (C) يقبل فرعا شلجميا في اتجاه محور الأفاصيل بجوار $+\infty$.

4) أ- $f'(x)=\dfrac{(x^2-2x+2)'}{x^2-2x+2}=\dfrac{2(x-1)}{(x-1)^2+1}$ $\forall x\in IR$.

ب-

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

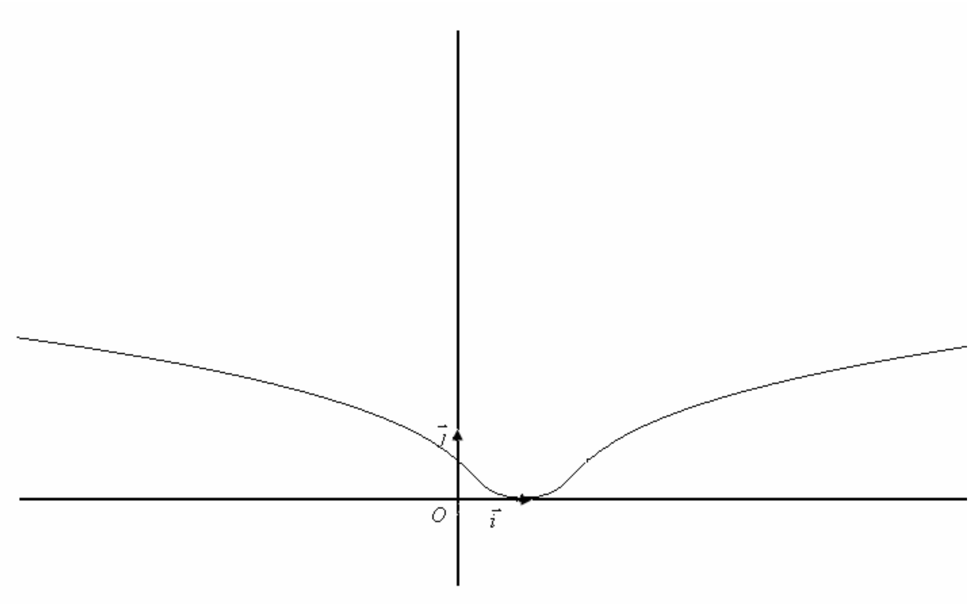
5) أ- $f''(x)=\dfrac{2(x^2-2x+2)-4(x-1)^2}{\left[(x-1)^2+1\right]^2}=\dfrac{2x(2-x)}{\left[(x-1)^2+1\right]^2}$ $\forall x\in IR$.

ب- نلخص إشارة $f''(x)$ في الجدول التالي :

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
(C)		∩	A P.I	∪	B P.I	∩	

المنحنى له نقطتي انعطاف $A(0,\ln(2))$ و $B(2,\ln(2))$

6) المنحنى



7) أ- h متصلة وتزايدية قطعا على المجال $[1,+\infty[$ ، فهي تقابل من $[1,+\infty[$ نحو $[0,+\infty[$ $h\left([1,+\infty[\right)=[0,+\infty[$.

ب- لدينا : $y=h^{-1}(x)\Leftrightarrow x=h(y)$ $\forall x\in[0,+\infty[,\ \forall y\in[1,+\infty[$

إذن $x=\ln\left[(y-1)^2+1\right]\Leftrightarrow e^x=(y-1)^2+1\Leftrightarrow y-1=\pm\sqrt{e^x-1}$ $(x\succ 0\Leftrightarrow e^x-1\succ 0)$

و بما أن $y-1\succ 0$ فإن $y-1=\sqrt{e^x-1}$. إذن $\boxed{\forall x\in[0,+\infty[\ h^{-1}(x)=1+\sqrt{e^x-1}}$

8) أ- لدينا $f(x)=\ln\left[(x-1)^2+1\right]$ إذن $f(t)=\ln(t^2+1)\Leftarrow t=x-1$ و $dt=dx$.

و منه $\int_0^1 f(x)dx=\int_{-1}^0\ln(1+t^2)dt$.

ب- نضع $u(t)=\ln(1+t^2)$ و $v'(t)=1$ فنجد $u'(t)=\frac{2t}{1+t^2}$ و $v(t)=t$ إذن :

$$\int_{-1}^0\ln(1+t^2)dt=\left[t\ln(1+t^2)\right]_{-1}^0-\int_{-1}^0\frac{2t^2}{1+t^2}dt=\ln 2-2\int_{-1}^0\frac{t^2}{1+t^2}dt$$

ج- لدينا $\frac{t^2}{1+t^2}=1-\frac{1}{1+t^2}$ إذن $\int_{-1}^0\frac{t^2}{1+t^2}dt=\int_{-1}^0 1-\frac{1}{1+t^2}dt=\left[t-arctg(t)\right]_{-1}^0=1-\frac{\pi}{4}$.

د- لتكن A مساحة الحيز المحصور بين المنحنى (C) ومحور الأفاصيل و المستقيمين اللذين معادلتاهما على التوالي $x=1$ و $x=0$ ، إذن $A=\int_{-1}^0 f(x)dx=\ln(2)-2\left(1-\frac{\pi}{4}\right)=\ln(2)-2+\frac{\pi}{2}$ بوحدة قياس المساحة.